MAT

PRÉ-VESTIBULAR
MATEMÁTICA

1

Avenida Dr Nelson D'Ávila, 811
Jardim São Dimas   CEP 12245-030
São José dos Campos   SP
Telefone: (12) 3924 1616
www sistemapoliedro.com.br

Coleção PV
Copyright © Editora Poliedro, 2021.
Todos os direitos de edição reservados à Editora Poliedro.
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal, Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ISBN 978-65-5613-075-0

Autoria: João Giudice, Marco Miola, Renato Alberto Rodrigues (Tião), Umberto César Chacon Malanga e Victor Pompêo.

Direção-geral: Nicolau Arbex Sarkis
Gerência editorial: Wagner Nicaretta
Coordenação de projeto editorial: Brunna Mayra Vieira da Conceição
Edição de conteúdo: Waldyr Correa dos Santos Jr.
Analista editorial: Débora Cristina Guedes
Assistente editorial: Graziele Baltar Ferreira Antonio
Gerência de *design* e produção editorial: Ricardo de Gan Braga
Coordenação de revisão: Rogério Salles
Revisão: Amanda Andrade Santos, Ana Rosa Barbosa Ancosqui, Mait Paredes Antunes, Ellen Barros de Souza, Rafaella de A Vasconcellos e Sonia Galindo Melo
Coordenação de arte: Fabricio dos Santos Reis
Diagramação: Daniela Capezzuti, Gisele Oliveira e Vivian dos Santos
Projeto gráfico e capa: Aurélio Camilo
Coordenação de licenciamento e iconografia: Leticia Palaria de Castro Rocha
Pesquisa iconográfica: Jessica Clifton Riley
Planejamento editorial: Maria Carolina das Neves Ramos
Coordenação de multimídia: Kleber S Portela
Gerência de produção gráfica: Guilherme Brito Silva
Coordenação de produção gráfica: Rodolfo da Silva Alves
Produção gráfica: Anderson Flávio Correia, Fernando Antônio Oliveira Arruda, Matheus Luiz Quinhonhes Godoy Soares e Vandré Luis Soares
Colaboradores externos: João Luiz Cabral Júnior (Edição), Madrigais Produção Editorial (Revisão), Casa de Tipos e R2 Editorial (Diagramação)
Impressão e acabamento: PifferPrint

Foto de capa: Christine Bird/Shutterstock.com

A Editora Poliedro pesquisou junto às fontes apropriadas a existência de eventuais detentores dos direitos de todos os textos e de todas as imagens presentes nesta obra didática. Em caso de omissão, involuntária, de quaisquer créditos, colocamo-nos à disposição para avaliação e consequente correção e inserção nas futuras edições, estando, ainda, reservados os direitos referidos no Art. 28 da lei 9.610/98.

Sumário

Frente 1

Frente 2

Frente 3

Georg Cantor, 1845-1918.

FRENTE 1

CAPÍTULO

1

Teoria elementar dos conjuntos

Georg Cantor nasceu na Rússia e viveu grande parte da sua vida na Alemanha Cantor é considerado um dos fundadores da moderna Teoria dos Conjuntos e um dos célebres lógicos e matemáticos do século XX Com a Teoria dos Conjuntos, toda a Matemática sofreu grande transformação e uma precisão teórica gigantesca. Todas as operações existentes da lógica foram representadas por meio das relações e operações entre os conjuntos

Conceitos básicos

Noção intuitiva de conjunto

Conjunto é um conceito primitivo, portanto não possui definição formal. Entretanto, isso não impede uma explicação com mais detalhes Segundo Georg Cantor: “chama-se *conjunto* todo agrupamento de objetos bem definidos e discerníveis, de nossa compreensão e percepção, chamados de elementos do conjunto”.

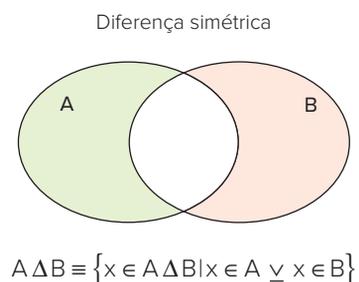
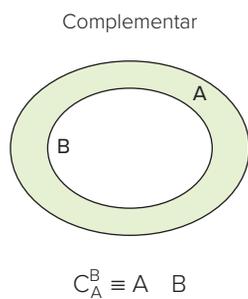
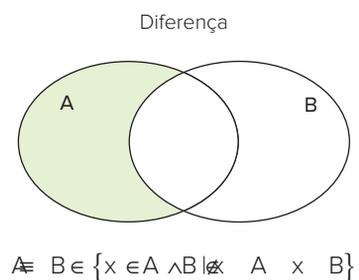
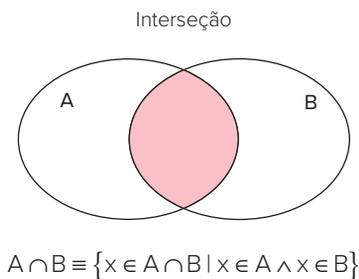



Fig. 1 Relação entre conjuntos.

Representações de um conjunto

Há basicamente três maneiras de apresentar um conjunto:

Enumeração ou Listagem

Os elementos são todos enumerados entre chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula. Observe os exemplos:

$$A = \{1; 2; 3; 5\} \text{ e } B = \{a; b; c\}$$

Método da compreensão

Os elementos são selecionados em um conjunto mais amplo, chamado universo (U), mediante uma propriedade característica. Por exemplo:

Conjunto universo: números inteiros

Propriedade característica: $1 \leq x \leq 5$

Resultado: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Método da compreensão: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

Observe, atentamente, que o método da compreensão possui duas partes: a primeira identifica o conjunto universo e a segunda seleciona os elementos mediante a propriedade característica.

Conclusão: A = {*x* do Conjunto Universo | propriedade característica de *x*}

Diagrama de Venn-Euler

É basicamente uma listagem em que os elementos ficam dentro de uma linha fechada. Utiliza-se muito esse tipo de representação por causa da facilidade de raciocínio e interpretação. Os conjuntos $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ e $B = \{a; b; c\}$ podem ser representados como:

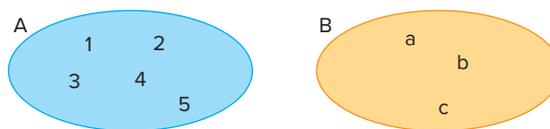



Fig. 2 Diagramas de Venn-Euler.

Relação de pertinência

Um objeto pode ser ou não elemento de um conjunto. Para indicar que ele é *elemento*, utiliza se o símbolo ∈ (per tence); caso contrário, o símbolo ∉ (não pertence)

Exemplo 1

$A = \{1; 2; \{3\}; 4\}$

Temos: $1 \in A$

$3 \notin A$

$\{3\} \in A$

Exemplo 2

$B = \{\{2\}; 1; 2; \{3\}; 4\}$

Temos: $2 \in B$

$\{2\} \in B$

$3 \notin B$

$\{3\} \in B$

Georg F. L. P. Cantor (1845 1918) nasceu em S Petersburgo, mas passou quase toda a vida na Alemanha O fruto de seu longo trabalho e dos incríveis resultados obtidos transformou a teoria dos conjuntos em uma disciplina completamente desenvolvida. O símbolo | significa “tal que”.

John Venn (1834-1923) inventou uma maneira de representar os conjuntos por meio de diagramas.

Nos dois exemplos apresentados, alguns itens não causam problemas, como $1 \in A$ e $2 \in B$; entretanto, poderiam causar problemas os casos em que é analisado um elemento (que também é um conjunto) como {3}, que é elemento de A e B.

! Atenção

O conceito de elemento é relativo
Um conjunto pode ser elemento de outro conjunto.

Conjuntos especiais

Conjunto vazio

É aquele que não possui elementos, ou seja, nenhum elemento satisfaz a sua propriedade característica Simbolicamente: $\forall x \notin$ vazio.

Observe os exemplos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$$

Os conjuntos A e B não possuem elementos satisfazendo as propriedades apresentadas. Pode-se representá-los:

$$A = \varnothing \text{ ou } B = \{\ \}$$

Conjunto unitário

É o conjunto no qual apenas um elemento satisfaz a propriedade característica Analise os exemplos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 4\} \Rightarrow A = \{3\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par e } x \text{ é primo}\} \Rightarrow B = \{2\}$$

Conjunto universo (U)

É o conjunto que possui todos os elementos. Simbolicamente, tem-se $\forall x, x \in U$.

A necessidade da identificação do conjunto universo é fator determinante na solução de uma equação

Exercício resolvido

1 Resolva a equação $x^2 \ \frac{4}{9} = 0$, sabendo que o conjunto universo é o conjunto dos números reais $U = \mathbb{R}$.

Resolução:

As raízes dessa equação são:

$$x^2 \ \frac{4}{9} \ \therefore 0 \ \left(x \ \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$$

assim: $x \ \frac{2}{3} \ \ 0$ ou $x + \frac{2}{3} = 0 \therefore x = \frac{2}{3}$ ou

$$x \ \therefore \ \frac{2}{3} \quad S \quad \left\{\frac{2}{3}; \ \ \frac{2}{3}\right\}$$

Se o conjunto universo fosse o conjunto dos números naturais ($U = \mathbb{N}$), não haveria valores de x, logo, $S = \varnothing$.

! Atenção

O conjunto $\mathbb{R}$, conjunto dos números reais, não possui elemento tal que $x^2 = -1, x \in \mathbb{R}$.

Um número é definido como par se ele for um número natural e o resto de sua divisão por 2 for zero, ou seja: se *x* é par, então $x = 2k$; tal que k é natural

Um número natural é definido como primo se, e somente se, ele possuir dois divisores, ele próprio e a unidade.

Exemplos: {2; 3; 5; 7; 11...}

Contraexemplo: 9 não é primo, pois, além de 1 e 9, o número 3 também é seu divisor

O símbolo $\forall$ significa "qualquer que seja".

No exemplo 1, não se esqueça do caso de fatoração $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, diferença de dois quadrados.

Somente será possível tirar conclusões de uma equação-produto se ela for igual a zero Observe:

$AB = 0$, $A = 0$ ou $B = 0$, mas se $AB = 2$, $A = 2$ e $B = 1$?

Essa é uma possível resposta, mas haverá infinitas respostas!

Noção de subconjunto

Definição de subconjunto

Um conjunto A é subconjunto de outro B se, e somente se, todo elemento de A for também elemento de B. Em notação matemática, tem se:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Quando A é subconjunto de B, pode-se dizer que A está contido em B ($A \subset B$) ou B contém A ($B \supset A$).

Na teoria dos conjuntos, os contraexemplos são importantes para a fixação do conceito.

Qual a consequência de $A \not\subset B$?

Isso quer dizer que existe pelo menos um $x \in A$, tal que esse $x \notin B$.

Propriedades da inclusão

- **P1** $A \subset U$
- **P2** $A \subset A$ (reflexiva)
- **P3** $(A \subset B$ e $B \subset D) \Rightarrow (A \subset D)$ (transitiva)
- **P4** $(A \subset B$ e $B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$ (igualdade de conjuntos)
- **P5** $\varnothing \subset A; \forall A$
- **P6** Se A possui n elementos, então o número de subconjuntos de A é 2^n.

A P_5 é intrigante! Pois como um conjunto que não possui elementos está contido em um outro conjunto?

A demonstração será pelo método da redução ao ab surdo (método indireto)

Hipótese: $\varnothing$ é o conjunto vazio e A um conjunto qualquer.
Tese: $\varnothing \subset A$

Demonstração: Se $\varnothing \not\subset A$ (negação da tese), ou seja, exis te um $x \in \varnothing$, tal que $x \notin A$; essa afirmação de que $x \in \varnothing$ é um absurdo, pois o conjunto $\varnothing$ não possui elementos. Logo, a negação da tese é falsa, o que leva a concluir que $\varnothing \subset A$ (c q.d.).

A propriedade P_6 pode ser demonstrada facilmente pelo princípio multiplicativo da análise combinatória. Observe um conjunto A com n elementos:

$$A = \{a_1; a_2; a_3; \ldots a_n\}$$

Para formar um subconjunto de A, os elementos de A podem ou não pertencer a ele, ou seja, tem-se duas possibilidades para cada elemento.

Assim:

$$\frac{a_1}{2} \cdot \frac{a_2}{2} \cdot \frac{a_3}{2} \ldots \frac{a_n}{2} \rightarrow \text{total de possibilidades: } \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2}_{\text{n vezes}}$$

nº, de subconjuntos: 2^n

Observe um exemplo da P_6: A = {1, 2, 3}, n = 3. Subconjuntos de A = {1}; {2}; {3}; {1; 2}; {1; 3}; {2; 3}; A e ∅ (de acordo com as propriedades P_2 e P_5, respectivamente), perfazendo assim um total de $2^3 = 8$ subconjuntos.

O conjunto formado pelos subconjuntos de A é chamado de *conjunto das partes de A* ou *conjunto potência de A*. Representa-se esse conjunto por P(A).

Assim:

$$P(A) = \{\varnothing; A; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}\}$$

Analise o seguinte exemplo antes de prosseguir o seu estudo.

Considere o conjunto A = {1; 2; ∅; {1}; 3; {1; 2}} e as afirmações a seu respeito:

a $\varnothing \in A$
b. $\varnothing \subset A$
c $1 \in A$
d $\{1\} \in A$
e. $\{1\} \subset A$
f $\{1; 2\} \subset A$
g $\{1; 2; 3\} \notin A$
h $\{1; 2; 3\} \subset A$

Operações entre conjuntos

União

Considere dois conjuntos quaisquer A e B Define-se o conjunto $A \cup B$ como o conjunto formado por todos elementos de A e B. Simbolicamente, tem-se:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

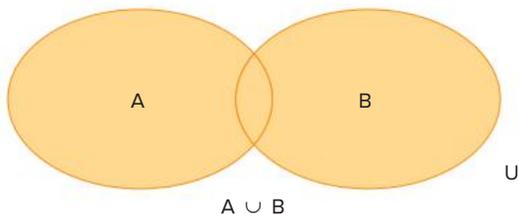



Fig. 3 Operação união.

Atenção

Esse “ou” da operação união não possui o caráter exclusivo, ou seja, não se quer dizer que x só é elemento de A, ou só de B, e sim que ele é de pelo menos um dos conjuntos

Você verá mais tarde que existe uma operação entre conjuntos que utiliza o caráter exclusivo, ou seja, o elemen to deve pertencer a um único conjunto. Essa operação é a diferença simétrica.

Propriedades da união

P1 $A \cup \varnothing = A$

P2 $A \cup U = U$

P3 $A \cup A = A$ (idempotente)

P4 $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)

P5 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativa)

Interseção

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, define-se $A \cap B$ o conjunto formado pelos elementos comuns a A e B. Simbolicamente:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

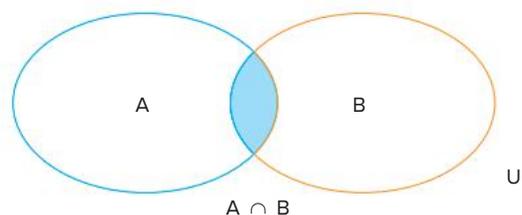



Fig. 4 Operação interseção.

Propriedades da interseção

P1 $A \cap \varnothing = \varnothing$

P2 $A \cap U = A$

P3 $A \cap A = A$ (idempotente)

P4 $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)

P5 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

Atenção

Dois conjuntos A e B são ditos disjuntos se, e somente se, eles não possuem elementos comuns, ou seja, $A \cap B = \varnothing$.

Diferença

Considere os conjuntos A e B, quaisquer, define-se A B o conjunto formado por elementos de A que não pertencem a B. Simbolicamente, tem-se:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

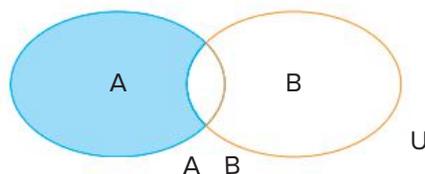



Fig 5 Operação diferença.

Não existe propriedade comutativa da diferença ($A - B \neq B - A$).

Para efetuar $A \quad B$, não se exige que $B \subset A$ Quando A e B são disjuntos, tem-se que $A \quad B = A$, pois nenhum elemento A pertence a B.

Complementar

Considere B subconjunto de $A(B \subset A)$ Define-se C_A^B (lê-se complementar de B em relação a A) o conjunto de elementos que faltam para que B seja igual a A, ou seja, $A - B$. Portanto:

$$C_A^B = A - B$$

Pode-se representar $C_U^A = U - A = \overline{A}$.

Propriedades do complementar

P1 $\overline{\varnothing} = U$

P2 $\overline{U} = \varnothing$

P3 $\overline{\overline{A}} = A$

P4 $x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A}$

$x \in \overline{A} \Rightarrow x \notin A$

P5 Teoremas de De Morgan

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

P6 Contrapositiva

$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

Demonstração:

$x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \overline{A}$

Logo, $\overline{B} \subset \overline{A}$

$x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A} \Rightarrow x \notin \overline{B} \Rightarrow x \in B$.

Logo, $A \subset B$

Essa propriedade será de grande importância para demonstrações e definições futuras.

Exercícios resolvidos

2 Dados os conjuntos: $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{b; d; e\}$ e o conjunto universo $U = \{a; b; c; d; e\}$, determine: $A \cup B$; $B \cap A$; $B \quad A$; $A \quad B$; C_A^B; $\overline{B}$ e $\overline{A \cap B}$.

Resolução:

$A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$

$B \cap A = \{b; d\}$

$B - A = \{e\}$

$A - B = \{a; c\}$

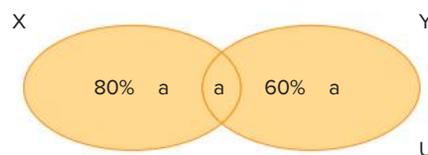
C_A^B não existe, pois $B \not\subset A$

$\overline{B} = C_U^B = U - B = \{a; c\}$

$\overline{A \cap B} = C_U^{A \cap B} = U - (A \cap B) = \{a; c; e\}$

3 Em uma universidade são lidos apenas dois jornais X e Y. Oitenta por cento dos alunos da universidade leem o jornal X e 60% o jornal Y. Sabendo que todo aluno é leitor de pelo menos um dos dois jornais, qual a porcentagem de alunos que leem ambos?

Resolução:

Esse tipo de problema pode ser resolvido facilmente com diagramas, observe:

Seja a o valor da porcentagem dos alunos que leem ambos os jornais O diagrama mostra-nos também que (80%   a) representa a porcentagem dos alunos que leem somente o jornal X, e (60%   a) somente o jornal Y

A soma das porcentagens tem de dar 100%; logo: (80%   a) + a + (60%   a) = 100%. Assim, a = 40%.

> **! Atenção**
>
> Quando na operação do complementar não se identificar o conjunto A (C_A^B), a operação será feita em relação ao conjunto universo.
>
> Outras representações de C_A^B: B', $\overline{B}$ e B^c. Não confunda disjuntos com conjuntos distintos Observe o exemplo: $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \{1; 2; 5; 6\}$ $A \cap B = \{1; 2\} \neq \varnothing$ e $A \not\subset B$ e $B \not\subset A \Rightarrow A \neq B$.

Propriedade distributiva

Pode-se combinar as operações de união e interseção, ou seja, fazer a sua distribuição.

P1 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

P2 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

> **! Atenção**
>
> Teorema importante para a simplificação de expressões envolvendo conjuntos. $A - B = A \cap \overline{B}$. Demonstração:
>
> $A \quad C = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\} = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in \overline{B}\} = A \cap B$ (c q d)

Essas propriedades são úteis para a simplificação de expressões complicadas entre conjuntos. Observe os exemplos:

Exercícios resolvidos

4 Simplifique as expressões:

a) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)$

b) $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

Resolução:

a) $\left[(A \cup B) \cap \overline{A}\right] \cup \left[(A \cup B) \cap B\right] =$
$= \left[(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap A)\right] \cup B =$
$= \left[(\overline{A} \cap B) \cup \varnothing\right] \cup B = (\overline{A} \cap B) \cup B = B$

b) $\left[(A \cup \overline{B}) \cap \overline{A}\right] \cup \left[(A \cup \overline{B}) \cap \overline{B}\right] =$
$= \left[(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap A)\right] \cup \left[(\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap \overline{B})\right] =$
$= \left[(\overline{A} \cap \overline{B})\right] \cup \left[\overline{B} \cup (\overline{B} \cap A)\right] = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{B} = \overline{B}$

5 Simplifique as expressões:

a) $(A \cup B) - B$
b) $(A \quad B) \cup B$

Resolução:

a) $(A \cup B) = B \quad \cup (A \quad \cap B) = \overline{B}$
$= (\overline{B} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = \varnothing \cup (\overline{B} \cap A)$
$= A \cap \overline{B} = A - B$

b) $(A \cap \overline{B}) \cup B = (B \cup \overline{B}) \cap (B \cup A) =$
$= U \cap (B \cup A) = A \cup B$

6 Demonstrate a propriedade $A - B = A - (A \cap B)$.

Resolução:

$A \quad (\cap A \quad \pm B) \quad \cap A \quad \overline{(\cap A \quad \pm B)} \quad \cap A \quad \cup(\overline{A} \quad \pm \overline{B})$
$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \varnothing \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} = A - B$

Diferença simétrica

A diferença simétrica entre os conjuntos A e B é um terceiro conjunto que possui elementos que pertençam apenas a A ou apenas a B. Simbolicamente, $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

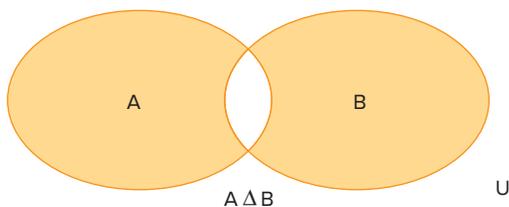



Fig. 6 Operação diferença simétrica.

Observe o exemplo:

Exercício resolvido

7 Sejam $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ e $B = \{3;\ 5;\ 8\}$, obtenha o conjunto $A \Delta B$.

Resolução:

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) =$
$= \{1;\ 2;\ 4\} \cup \{5;\ 8\} = \{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 8\}$

Número de elementos de um conjunto

Para representar a quantidade de elementos de um conjunto X, utiliza se a notação n(X).

Pelos diagramas de Venn-Euler, pode-se observar que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Exercícios resolvidos

8 Em uma rua, 140 pessoas torcem pelos times A ou B. Quantas pessoas torcem somente pelo time A, se B tem 60 torcedores e 40 pessoas torcem para os dois times?

Resolução:

$n(A \cup B) = 140$, $n(B) = 60$ e $n(A \cap B) = 40$
Utilizando o resultado apresentado, tem-se:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad n(A \cap B) \therefore$
$140 = n(A) + 60 \quad 40 \therefore n(A) = 120$
O time A tem 120 torcedores

9 Conhecendo as propriedades distributivas da união e interseção e $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, obtenha $n(A \cup B \cup C)$.

Resolução:

$n(A \cup B \cup C) = n[(A \cup B) \cup C] =$
$= n(A \cup B) + n(C) \quad \cup n[(A \cap B) = C]$
$= n(A) + n(B) \quad \cap n(A + \ B) \quad n(C)$
$- n[(B \cap C) \cup (A \cap C)] =$
$= n(A) + n(B) + n(C) \quad \cap n(A \quad B)$
$- \{n(B \cap C) + n(A \cap C) - n[(B \cap C) \cap (A \cap C)]\} =$
$= n(A) + n(B) + n(C) \quad \cap n(A \cap B) \quad n(B \quad C)$
$\cap n(A \ + C) \quad \cap n(A \cap B \quad C)$

Conjuntos numéricos

Classificação numérica

Observe os conjuntos numéricos e, depois, a composição entre eles pelo diagrama de Venn-Euler.

Naturais:
$\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3...\}$
$\mathbb{N}^* = \{1;\ 2;\ 3...\}$

Inteiros:
$\mathbb{Z} = \{...-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2...\}$
$\mathbb{Z}^+ = \{0;\ 1;\ 2;\ 3...\}$
$\mathbb{Z}^- = \{...-3;\ -2;\ -1;\ 0\}$

Racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{n}{d};\ n \in \mathbb{Z} \text{ e } d \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

$\mathbb{I} =$ conjunto dos irracionais, cujos elementos não podem ser colocados em forma de fração.

$\mathbb{R} =$ conjunto dos números reais, tal que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

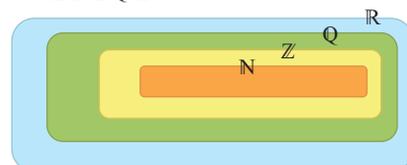



Fig. 7 Relação entre os conjuntos.

Intervalos reais

Todo número real pode ser associado a um ponto em uma reta, chamada *reta real* ($\mathbb{R}$). Observe:

$$x \in \mathbb{R}; x > 0$$
$$y \in \mathbb{R}; y < 0$$

Se $x \in \mathbb{N}$, tal que $1 < x < 3$, o único representante é $x = 2$. Mas, se $x \in \mathbb{R}$, tem-se infinitos valores de x. A representação na reta real é mais prática Observe:

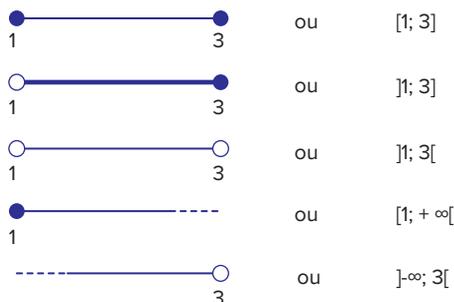
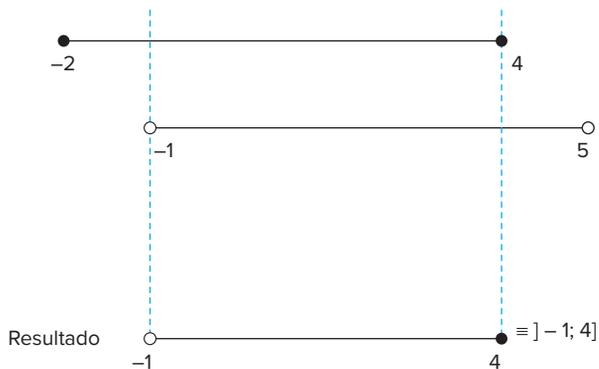



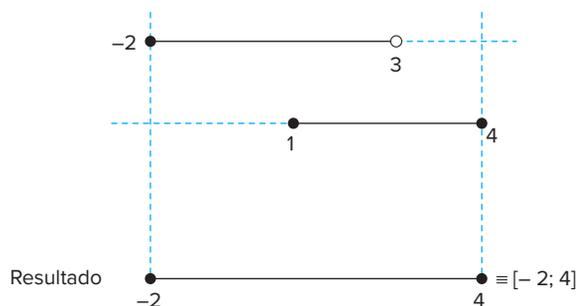
Fig 8 Representação de intervalos na reta real

A representação gráfica será muito útil na resolução de equações e inequações, em que a união e a interseção de intervalos são operações frequentes.

Exercícios resolvidos

10 Obtenha $[-2; 4] \cap]-1; 5[$

Resolução:

11 Obtenha $[-2; 3[\cup [1; 4]$

Resolução:

! Atenção

O conjunto $\mathbb{N}$, conjunto dos números naturais, indica a ideia de quantidade (= {0; 1; 2; 3 })

O conjunto $\mathbb{Q}$, conjunto dos racionais, é formado pelos números que podem ser colocados na forma de fração

O intervalo real é aberto ou fechado, dependendo da posição do colchete. Observe: [a, fechado em a;]a, aberto em a.

Cuidado! Você sabe diferenciar as seguintes notações: (2,5); {2,5}; [2,5]?

Representações no plano cartesiano

Par ordenado

É um conjunto que possui dois elementos, no qual a ordem é levada em consideração. Observe que, na representação antiga, era indiferente indicar {1; 2} ou {2; 1}. Com o conceito de par ordenado, $(1; 2) \neq (2; 1)$, ou seja, $(a; b) = (c; d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Existem basicamente duas representações geométri cas dos pares ordenados. Observe os exemplos para o par (2; 5):

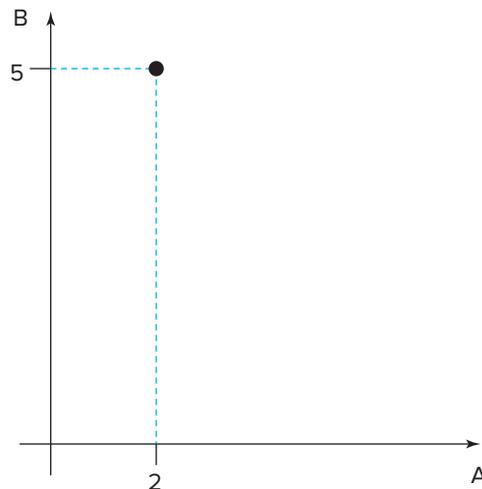



Fig. 9 Plano cartesiano

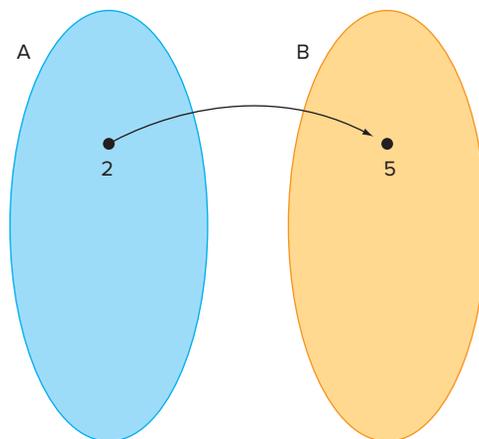



Fig. 10 Diagrama de flechas.

Produto cartesiano

Define se produto cartesiano do conjunto A por B o conjunto formado por todos os pares ordenados $(x; y)$, tal que $x \in$ A e $y \in$ B. Simbolicamente:

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exercício resolvido

12 Seja A = {1; 2; 3} e B = {2; 5}, obtenha A x B e B x B.

Resolução:

A x B = {(1; 2); (1; 5); (2; 2); (2; 5); (3; 2); (3; 5)}
B x B = {(2; 2); (2; 5); (5; 2); (5; 5)}

! Atenção

A x B, lê-se: A cartesiano B.

Propriedades do produto cartesiano

P1 $A \times \varnothing = \varnothing$

P2 $A \times B \neq B \times A$ $(A \neq B \neq \varnothing)$

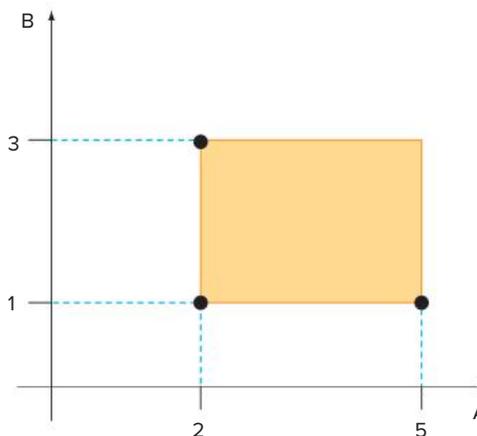
P3 Se A possui m elementos e B possui n elementos, então A x B possui $m \cdot n$ elementos.

P4 $R \times R = R^2$ (plano cartesiano completo).

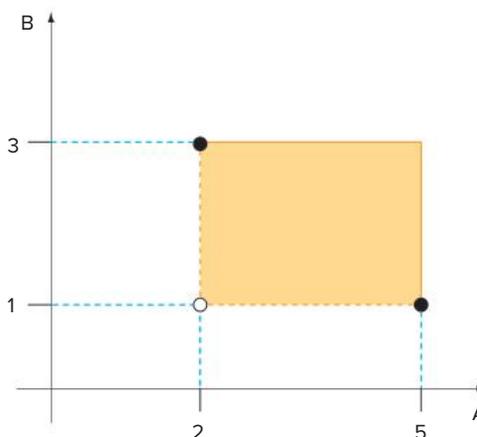
Exercícios resolvidos

13 Dados os intervalos reais [2; 5] e [1; 3], obtenha [2; 5] x [1; 3].

Resolução:

Não é possível representar esse produto cartesiano pelo método da listagem, pois existem infinitos números reais nesses intervalos. A única maneira de representar a resposta é graficamente.

14 Obtenha]2; 5] x]1; 3]

Resolução:

Semelhante ao exemplo anterior, mas com o detalhe de que alguns intervalos são abertos Algumas frontei ras são tracejadas

Revisando

1 Dados os conjuntos U = {a; b; c; d; e; f; g}, A = {a; b; c; d; e}, B = {a; c; e; g} e C = {b; e; f; g}, resolva as seguintes operações considerando U o conjunto universo.

a) $A \cup C$

b) $B \cap A$

c) C B

d) $\overline{B}$

e) $\overline{A}$ B

f) $\overline{A - C}$

g) $\overline{A \cap \overline{A}}$

2 Sendo A = {2; {0}; 0; {0; 6}}, coloque V para verdadeiro e F para falso a respeito das seguintes afirmações.

☐ $2 \in A$	☐ $\{0\} \in A$	☐ $\{2; 0\} \in A$	☐ $\varnothing \in A$	☐ $\{6\} \notin A$
☐ $\{2\} \in A$	☐ $0 \notin A$	☐ $\{0; \{0\}\} \in A$	☐ $6 \in A$	☐ $\{0; 6\} \in A$

3 Sendo A = {2; {2}; 0; {0 ; 5}} coloque V para verdadeiro e F para falso a respeito das seguintes afirmações

☐ $5 \in A$	☐ $\{2\} \subset A$	☐ $0 \in A$	☐ $\{\{0\}\} \subset A$	☐ $\{0\} \notin A$
☐ $\{2\} \in A$	☐ $\{\{2\}\} \subset A$	☐ $\{0\} \subset A$	☐ $\{0; 5\} \subset A$	☐ $\{0; 5\} \in A$

4 Em um colégio, verificou-se que 120 alunos não têm pai professor; 130 alunos não têm mãe professora e 5 têm pai e mãe professores. Qual o número de alunos do colégio, sabendo-se que 55 alunos possuem pelo menos um dos pais professor e que não existem alunos irmãos?

5 Dados os conjuntos $A = [2; 3] \cup \{4\}$ e $B = [1; 2]$, obtenha o gráfico cartesiano de $A \times B$.

Exercícios propostos

1 Complete as sentenças a seguir de forma a torná-las verdadeiras, utilize os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\supset$ ou não contém.

a) 5 { 2, 3, 4, 5, 6, 7}

b) {7, 9} {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}

c) $\varnothing$ 8

d) {5, 7} {5}

e) $7 \notin$ {5, 6, __, 8, 9}

2 Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto U = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 e 9}.

I. $\varnothing \in U$ e $n(U) = 10$

II. $\varnothing \subset U$ e $n(U) = 10$

III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$

IV. $\{0; 1; 2; 5\} \cap \{5\} = 5$

Pode-se dizer, então, que é(são) verdadeira(s):

A apenas I e III.
B apenas II e IV.
C apenas II e III
D apenas IV.
E todas as afirmações.

3 Seja o conjunto $S = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0 \text{ e } r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações

I. $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$

II $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \varnothing$

III $\sqrt{2} \in S$

Pode-se dizer, então, que é(são) verdadeira(s) apenas:

A I e II.
B I e III.
C II e III.
D I.
E II.

4 Se A = {2; 3; 4; 5} e B = {1; 3; 5; 7}, quais afirmações são verdadeiras?

A A B = {1; 2; 4; 7}
B B A = {2; 4}
C A B = {4; 2}
D B A = {1; 2; 4; 7}

5 Dados os conjuntos A = {3; 6; 9; 12; 15} e B = {5; 10; 15; 20; 25; 30}, pode se afirmar que:

A A é subconjunto de B.
B B é subconjunto de A.
C A e B são disjuntos.
D a interseção não é vazia.
E A B = $\varnothing$.

6 **UEG 2018** Dados dois conjuntos, A e B, onde $A \cap B = \{b, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ e $B - A = \{a\}$. O conjunto B é igual a:

A {a}
B {c, e}
C {a, b, d}
D {b, c, d, e}
E {a, b, c, d, e}

7 **UPF 2018** Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$A = \{x \in \mathbb{R} \div 4 - 3x \geq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \div x^2 > 2x - 8\}$

Qual dos conjuntos abaixo representa o conjunto $A \cap B$?

A $\left(\frac{2}{3},\ \infty \right)$ **C** $\left(\infty,\ \frac{2}{3} \right)$ **E** $\varnothing$

B $\left(\infty, \frac{2}{3} \right)$ **D** $\mathbb{R}$

8 Se $A \cap B = \{1; 2\}$, $B \cap C = \{2; 3\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B \cup C = \{1; 2; 3; 5\}$, obtenha $A \cap C$.

9 Sendo $A = \{0; 1; 2;\ \ 1;\ \ 2\}$ e $B = \{\ \ 1; 2; 3; 4; 5\}$, determine $(B\ \ A) \cup (A\ \ B)$

10 Se $A = \{1; 2; 3; \{1\}\}$ e $B = \{1; 2; \{3\}\}$, determine $A\ \ B$

11 **UEM 2015** Sobre teoria dos conjuntos, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).

01. Se $A \subset B$, então $B^c \subset A^c$.
02. Dado um elemento x irracional, então $x \in \mathbb{Q}c$.
04. Para todo $x \in (A \cup B)^c$, temos $x \in A^c \cup B^c$.
08. $\mathbb{R} \neq \mathbb{N}^* \cup \mathbb{Z}^c \cup \mathbb{Q}$.
16. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, temos $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Soma:

12 **Fatec 2019** Entre as pessoas que compareceram à festa de inauguração da FATEC Pompeia, estavam alguns dos amigos de Eduardo. Além disso, sabe-se que nem todos os melhores amigos de Eduardo foram à festa de inauguração.

Considere:

F: conjunto das pessoas que foram à festa de inauguração.
E: conjunto dos amigos de Eduardo
M: conjunto dos melhores amigos de Eduardo.

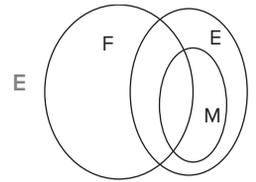
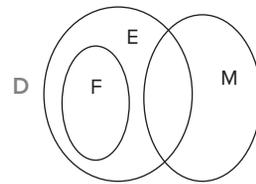
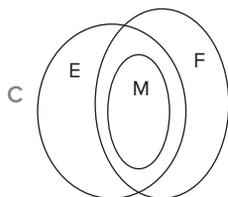
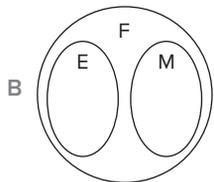
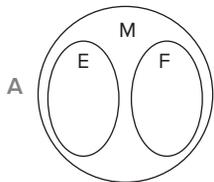
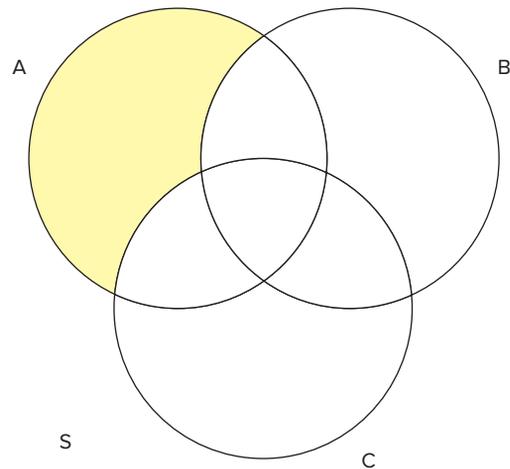
Com base nessas informações assinale a alternativa que contém o diagrama de Euler-Venn que descreve corretamente a relação entre os conjuntos.

A

B

C

D

E

13 **FGV** A parte assinalada no diagrama representa:

A $(\overline{B} \cup \overline{C}) \cup C$
B $(\overline{B} \cup \overline{C})$
C $\overline{C} \cap \overline{B} \cap \overline{A}$
D $A - (B \cup C)$
E $A - (A \cap B \cap C)$

14 **UEG 2019** Em uma pesquisa sobre a preferência para o consumo de dois produtos, foram entrevistadas 970 pessoas Dessas, 525 afirmaram consumir o produto A, 250 o produto B e 319 não consomem nenhum desses produtos O número de pessoas que consomem os dois produtos é

A 124 **C** 525 **E** 775
B 250 **D** 527

15 **UFJF 2018** Uma empresa oferece dois cursos não obrigatórios aos seus funcionários no momento da admissão: Primeiros Socorros e Prevenção de Incêndios. Essa empresa tem hoje 500 funcionários. Desses, 200 fizeram o curso de Primeiros Socorros, 150 fizeram o de Prevenção de Incêndios e 70 fizeram os dois cursos.
O Departamento de Pessoal da empresa está fazendo uma pesquisa sobre a qualidade dos cursos ofertados e sorteia aleatoriamente, dentre seus funcionários, aqueles que responderão a um questionário.
Qual é a probabilidade de se sortear um funcionário que não tenha feito nenhum dos dois cursos?

A 86% **C** 42% **E** 6%
B 44% **D** 30%

16 **UEPG 2019** Foi realizada uma pesquisa em um cursinho preparatório sobre a quantidade de alunos que leram as obras literárias solicitadas pelas universidades.
O resultado da pesquisa foi:

Leram a Moreninha	**150**
Leram o Cortiço	**200**
Leram Helena	**250**
Leram Moreninha e Cortiço	**70**
Leram Moreninha e Helena	**90**
Leram Cortiço e Helena	**80**
Leram os três livros	**60**
Leram nenhum dos livros	**180**

Nesse contexto, assinale o que for correto.
01 420 é o número de alunos pesquisados.
02 280 alunos leram o Cortiço ou a Moreninha.
04 140 alunos leram apenas Helena.
08 300 alunos leram apenas um dos três livros.
Soma: ____

17 **Mackenzie 2015** Se $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é divisor de } 60\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}$, então o número de elementos do conjunto das partes de $A \cap B$ é um número
A múltiplo de 4 menor que 48
B primo, entre 27 e 33
C divisor de 16
D par, múltiplo de 6
E pertencente ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 32 < x \leq 40\}$

18 **UFPR 2019** Em uma pesquisa de opinião, eleitores foram perguntados se recordavam em quais candidatos a deputado (federal e estadual) haviam votado nas últimas eleições. Num grupo de 2018 eleitores entrevistados, constatou se que:
- 1492 eleitores recordavam para qual candidato a deputado federal haviam votado;
- 1278 eleitores recordavam para qual candidato a deputado estadual haviam votado;
- 347 eleitores não recordavam nenhum dos candidatos em que haviam votado

a) Quantos desses eleitores entrevistados se recordavam de pelo menos um candidato (deputado estadual ou deputado federal) em que haviam votado?
b) Quantos eleitores recordavam os dois candidatos (deputado federal e estadual) em que haviam votado? E quantos recordavam apenas o candidato a deputado federal e apenas o candidato a deputado estadual em que haviam votado? Coloque os resultados obtidos na tabela abaixo.

Recordaram os votos	Eleitores
Para ambos os cargos	
Apenas para deputado estadual	
Apenas para deputado federal	

19 Dados A = { 1, 0, 1} e B = { 2, 2}, determine os conjuntos A x B e B x A e represente geometricamente.

20 Sendo (x +2, 2y – 4) = (8x, 3y – 10), determine o valor de *x* e de *y*.

21 Dado A × B = {(1,0); (1,1); (1,2)}, determine os conjuntos A e B.

22 Sejam os conjuntos A e B, tais que
A x B = {(–1; 0); (2; 0); (–1; 2); (2; 2); (–1; 3); (2; 3)}. O núme ro de elementos do conjunto $A \cap B$ é:
A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

23 Se n(A) = 3 e n(B) = 2, então $[n(A \times B)]^{n(A \cap B)}$ é, no máxi mo, igual a:
A 1
B 6
C 12
D 18
E 36

24 **Uefs 2018** Sejam A, B e C conjuntos contidos no conjunto dos números naturais, tais que A é o conjunto dos números menores do que 250, B é o conjunto dos números múltiplos de 4 e C é o conjunto dos números pares. Sendo A^c, B^c e C^c os conjuntos complementares respectivamente de A, B e C, o número 33 pertence a:
A $(A^c \cup B) \cap C^c$
B $A^c \cap B^c \cap C^c$
C $(A \cap B) \cup (A^c \cap C^c)$
D $(A^c \cap B^c) \cup (B^c \cap C^c)$
E $(A \cup B^c) \cap C$

25 **Falbe 2018** Um grupo de 180 turistas estão hospeda dos em um mesmo hotel no estado de São Paulo. As regiões Norte, Sul e Sudeste são as regiões do Bra sil que já foram visitadas por pelo menos um desses turistas. Desses turistas, 89 já estiveram na Região Sul e 78 já estiveram na Região Norte. Sabendo que 33 desses turistas só conhecem a Região Sudeste, o número desses turistas que já estiveram nas Regiões Norte e Sul é
A 10
B 13
C 17
D 20

26 **Fuvest 2018** Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disci plinas. Além disso, sabe-se que:
I 14 não obtiveram nota mínima em matemática;
II. 16 não obtiveram nota mínima em português;
III 12 não obtiveram nota mínima em inglês;
IV. 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;
V. 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;
VI. 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês e
VII 2 não obtiveram nota mínima em português, ma temática e inglês

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi

A 44
B 46
C 47
D 48
E 49

27 **UEM 2017** Considerando os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 5 \text{ e } x \neq 8\}$;

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 4 \text{ ou } x < 0\}$,

é correto afirmar que:

01 $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 4, x \neq 5, x \neq 8 \text{ e } x < 0\}$.

02 $A \cap B = A$.

04 $\mathbb{N} - A = A \{5, 8\}$.

08 $\mathbb{Z} \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

16 $B - A = \{5, 8\}$

Soma:

28 Dados os subconjuntos de $\mathbb{R}$ calcule (faça o gráfico):

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \ 2 \leq x < 3\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$;

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Calcule e faça o gráfico de:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $(A \cap C) \cap B$

29 Represente o conjunto $B \times A$, em que $A = \{1; 2; 3\}$ e $B = [1; 2]$.

30 **FGV** Em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sejam $(2m + n; m - 4)$ e $(m + 1; 2n)$ dois pares ordenados iguais. Então, m^n é igual a:

A 2
B 0
C $\frac{1}{2}$
D 1
E $\sqrt{2}$

31 Represente na reta numerada os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{-3}{2}\right\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

32 Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 < x \leq 10\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$, verifique as seguintes afirmações

I. O conjunto $(A \cup B)$ possui infinitos elementos.

II O conjunto C_A^c possui infinitos elementos

III. O conjunto $(B \cap C)$ não possui elementos.

Marque a alternativa correta.

A Apenas a afirmação I está correta.
B Apenas a afirmação II está correta.
C Apenas a afirmação III está correta.
D Apenas as afirmações I e II estão corretas.
E Todas as afirmações estão corretas.

33 **Ufes** As marcas de cerveja mais consumidas em um bar, num certo dia, foram A, B e C. Os garçons constataram que o consumo se deu de acordo com a tabela a seguir.

Produto	Número de consumidores
A	150
B	120
C	80
A e B	60
A e C	40
B e C	20
A, B e C	15
Outras	70

a) Quantos beberam cerveja no bar, nesse dia?

b) Dentre os consumidores de A, B e C, quantos beberam apenas duas dessas marcas?

c) Quantos não consumiram a cerveja C?

d) Quantos não consumiram a marca B nem a marca C?

34 Uma amostra de 100 caixas de pílulas anticoncepcionais fabricadas pela Nascebem S.A foi enviada para a fiscalização sanitária

No teste de qualidade, 60 foram aprovadas e 40 reprovadas por conterem pílulas de farinha No teste de quantidade, 74 foram aprovadas e 26 reprovadas, por conterem um número menor de pílulas que o especificado.

O resultado dos dois testes mostrou que 14 caixas fo ram reprovadas em ambos os testes. Determine:

a) quantas caixas foram aprovadas nos dois testes?

b) quantas caixas foram aprovadas em um único teste?

c) quantas caixas aprovadas em pelo menos um teste?

35 **Mackenzie 2018** Em uma pesquisa com 120 pessoas, verificou se que

65 assistem ao noticiário A

45 assistem ao noticiário B

42 assistem ao noticiário C

20 assistem ao noticiário A e ao noticiário B

25 assistem ao noticiário A e ao noticiário C

15 assistem ao noticiário B e ao noticiário C

8 assistem aos três noticiários

Então o número de pessoas que assistem somente a um noticiário é

A 7
B 8
C 14
D 28
E 56

36 **UEL 2018** Um estudante fez uma pesquisa com um grupo de universitários para obter um panorama a respeito da utilização de três redes sociais. Ao computar as informações fornecidas pelas pessoas entrevistadas, constatou que:

- 55 utilizam Snapchat, Instagram e Facebook;
- 70 utilizam Snapchat e Facebook;
- 105 utilizam Snapchat e Instagram;
- 160 utilizam Instagram e Facebook;
- 180 utilizam Snapchat;

- 225 utilizam Instagram;
- 340 utilizam Facebook;
- 85 não utilizam qualquer uma das redes sociais da pesquisa.

A partir dessas informações, quantas pessoas foram entrevistadas?

Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução desta questão.

37 **Uerj 2017** Crianças de uma escola participaram de uma campanha de vacinação contra a paralisia infantil e o sarampo. Após a campanha, verificou-se que 80% das crianças receberam a vacina contra a paralisia, 90% receberam a vacina contra o sarampo, e 5% não receberam nem uma, nem outra.

Determine o percentual de crianças dessa escola que receberam as duas vacinas.

38 **ITA** Sejam A, B e C subconjuntos de $\mathbb{R}$, não vazios, e $A - B = \{p \in \mathbb{R}; p \in A \text{ e } p \notin B\}$.

Dadas as igualdades:

1. (A   B) x C = (A x C)   (B x C)
2. (A   B) x C = (A x B)   (B x C)
3. $(A \cap B)$ $A \neq (B \cap A)$ B
4. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
5. (A   B) ∩ (B   C) = (A   C) ∩ (A   B)

Podemos garantir que:

A 2 e 4 são verdadeiras.
B 1 e 5 são verdadeiras.
C 3 e 4 são verdadeiras.
D 1 e 4 são verdadeiras
E 1 e 3 são verdadeiras.

39 **UFRN** Se A, B e C são conjuntos tais que:

n(A   (B ∪ C)) = 15
n(B   (A ∪ C)) = 20
n(C   (A ∪ B)) = 35
$n(A \cup B \cup C) = 120$

determine o número de elementos do conjunto $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Textos complementares

Teoria dos conjuntos

O raciocínio lógico é formado por sentenças que afirmam fatos. Esses fatos podem ser verdadeiros ou falsos (V ou F)

Para formarmos novas sentenças, temos de utilizar operadores lógicos e regras de sintaxe.

Observe a lista dos operadores lógicos e os seus respectivos símbolos:

a e $\wedge$
b ou (no sentido inclusivo) $\vee$
c. não .... ~
d. Se .... então (implicação) .... $\rightarrow$
e. Se e somente se (bi-implicação) .... $\leftrightarrow$
f. Para algum (existe) .... $\exists$
g. Para todo .... $\forall$

O papel da teoria dos conjuntos é representar essas ideias. Leia alguns exemplos:

1. Considere o conjunto $A = \{x \mid x \text{ possui a propriedade } p\}$. Para aqueles elementos que não possuem a propriedade p, ou seja, que negam esse fato, temos o seguinte conjunto: $B = \{x \mid x \text{ não possui a propriedade } p\}$.
   - Esse conjunto B é o complementar de A, ou seja, $(B = \overline{A})$.
2. Sejam A e B conjuntos, tais que $A \subset B$, ou seja, todos os elementos de A também são elementos de B. Podemos entender que todo elemento que possui a propriedade de A também tem a propriedade de B. Simbolicamente: se $x \in A$, então $x \in B$ ou x possui a propriedade de $A \rightarrow x$ possui a propriedade de B.
   - $A \subset B$ significa então que: se x é um elemento que possui a propriedade A, então x é um elemento que possui a propriedade B.
   - Ter a propriedade de A acarreta ter a propriedade de B.
   - Ter a propriedade de A é condição suficiente para ter a propriedade de B.
   - Ter a propriedade de B é condição necessária para quem tem a propriedade de A.
   - (propriedade de A) $\subset$ (propriedade de B).
3. Os conjuntos A e B são iguais quando $A \subset B$ e $B \subset A$ Utilizando a ideia do item 2, temos que possuir a propriedade de A é condição necessária e suficiente para ter a propriedade de B.
   - x possui a propriedade de $A \leftrightarrow x$ possui a propriedade de B.

Noções de lógica matemática

Entenda-se raciocínio como uma modalidade especial do ato de pensar, ou seja, de obter conclusões.

Chamamos de proposição toda oração afirmativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa. As proposições são constituídas da seguinte maneira:

1ª) A oração possui sujeito e predicado.

2ª) São afirmativas.

3ª) Princípio do terceiro excluído: toda proposição possui um dos dois valores lógicos: verdadeira (V) ou falsa (F) excluindo qualquer outra possibilidade. As proposições podem ser classificadas como simples ou compostas.

São exemplos de proposições simples:

a. 2 é um número par.
b $5 > 2$
c. o retângulo é um quadrado.
d a Lua é maior que a Terra

As proposições compostas podem ser construídas a partir do uso de conectivos.

Negação	~	não
Disjunção	$\vee$	ou
Conjunção	$\wedge$	e
Condicional	$\rightarrow$	se ... então
Bicondicional	$\leftrightarrow$	se e somente se

São exemplos de proposições compostas:

a Kant nasceu em 1724 e Newton morreu em 1727

b. Maria toca piano ou Pedro toma banho.

c. José é eleitor se, e somente se, vota.

d. Se João é paulista, então é brasileiro.

Sabemos que as proposições assumem valores V ou F Devemos ter um critério para associar esses valores às proposições simples e compostas Por meio das chamadas tabelas verdades, organizamos esses procedimentos.

Observe as seguintes tabelas-verdades:

p	q
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Dizemos que duas proposições são equivalentes quando possuem as tabelas-verdades iguais.

Exemplos:

a. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Vamos construir as duas tabelas-verdades e comparar.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

colunas iguais

b Construir a tabela-verdade da proposição $[\sim(p \rightarrow q)] \vee q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$[\sim(p \rightarrow q)] \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

c. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

colunas iguais

Atividades

1 Sejam p, q e r três proposições, tais que p é verdadeira, q é falsa e r é verdadeira. Considere as proposições compostas a seguir e indique o valor verdade de cada uma delas.

a) $p \rightarrow q$

b) $q \rightarrow r$

c) $(p \vee \sim r) \vee q$

d) $(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow \sim q$

e) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

2 Sejam p e q duas proposições, a negação de $p \wedge q$ equivale a:

A $\sim p \vee \sim q$

B $\sim p \wedge \sim q$

C $\sim p \vee q$

D $\sim p \wedge q$

E $p \wedge \sim q$

3 A negação da proposição $X \in (A \cup B)$ é:

A $X \notin (A \cap B)$

B $X \notin A$ ou $X \notin B$

C $X \notin A$ e $X \in B$

D $X \in A$ ou $X \notin B$

E $X \notin A$ e $X \notin B$

4 Construa a tabela-verdade das seguintes proposições.

a) $\sim(p \vee q) \wedge r$

b) $(p \wedge q) \rightarrow r$

c) $(\sim p \vee q) \rightarrow r$

Resumindo

A teoria dos conjuntos possui como conceitos primitivos a noção de conjunto, elemento e relação de pertinência.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \rightarrow x \in B)$$

Um conjunto finito com n elementos possui 2^n subconjuntos.

ATENÇÃO $\varnothing \subset A; \forall A$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

$A \quad B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$A \quad B = A \cap \overline{B}$

Quer saber mais?

Site

- Biografia de Georg Cantor
  <www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=41>.

Exercícios complementares

1 **UFF** Dado o conjunto $P = \{\{0\}, 0, \varnothing, \{\varnothing\}\}$, considere as afirmativas:

I $\{0\} \in P$
II. $\{0\} \subset P$
III $\varnothing \in P$

Com relação a essas afirmativas, conclui-se que:

A todas são verdadeiras
B apenas a I é verdadeira.
C apenas a II é verdadeira
D apenas a III é verdadeira.
E todas são falsas.

2 Determine todos os subconjuntos do conjunto $x = \{0, 5, 10\}$.

3 **Uece 2019** Seja U o conjunto de todos os números inteiros positivos menores do que 200. Se

$X_2 = \{n \in U$ tal que n é múltiplo de $2\}$,

$X_3 = \{n \in U$ tal que n é múltiplo de $3\}$ e

$X_5 = \{n \in U$ tal que n é múltiplo de $5\}$,

então, o número de elementos de é:

A 140 **C** 150
B 135 **D** 145

4 Se um conjunto $\mathbb{Z}$ tem apenas 32 subconjuntos, quantos elementos tem esse conjunto $\mathbb{Z}$?

5 Considere o conjunto $A = \{\{2; 6\}; 0; \{0\}; \varnothing\}$ Quais das seguintes sentenças são verdadeiras?

- [ ] $2 \in A$
- [ ] $\varnothing \in A$
- [ ] $\{6\} \in A$
- [ ] $\{2; 6\} \subset A$
- [ ] $\{2; 0; 6\} \subset A$
- [ ] $6 \in A$
- [ ] $\varnothing \subset A$
- [ ] $\{0\} \subset A$
- [ ] $\{\{2; 6\}\} \subset A$

6 Sendo $A = \{\varnothing; a; \{b\}\}$ com $\{b\} \neq a \neq b \neq \varnothing$, então:

A $\{\varnothing; \{b\}\} \subset A$
B $\{\varnothing; b\} \subset A$
C $\{\varnothing; \{a\}\} \subset A$
D $\{a; b\} \subset A$
E $\{\{a\}; \{b\}\} \subset A$

7 **UEG 2016** Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, a intersecção entre eles é dada pelo conjunto

A $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 4\}$
B $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
C $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \quad 2\}$
D $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

8 **FGV** Dados os conjuntos $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{b; c; d; e\}$, $C = \{a; c; f\}$, determine:

$[(A \quad B) \cup (B \quad C) \cup (A \cap B)] \cap [(A \cap C) \cup (B \cap A \cap C)]$

9 Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 7 < y \leq 12\}$, determine (nomeando cada um de seus elementos e colocando-os entre chaves):

a) A c) $A \cap B$ e) $A - B$
b) B d) $A \cup B$

10 Dados os conjuntos: $A = \{a; b; c\}$, $B = \{b; c; d\}$ e $C = \{a; c; d; e\}$, o conjunto $(A \quad C) \cup (C \quad B) \cup$ $\cup (A \cap B \cap C)$ é:

A $\{a; b; c; e\}$
B $\{a; c; e\}$
C A
D $\{b; d; e\}$
E $\{b; c; d; e\}$

11 Sendo $A = \{5, 7, 9\}$, $B = \{0, 9, 10, 90\}$, $C = \{7, 8, 9, 10\}$, $D = \{9, 10\}$ e $E = \{5, 7, 10, 90\}$, determine:

a) $A \cup B$
b) $A \cup B \cup D$
c) $D \cup E$
d) $C \cup D$

12 **PUC** Considere os seguintes subconjuntos de números naturais:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

$P = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \le x \le 20\}$

$A = \{x \in P \mid x \text{ é par}\}$

$B = \{x \in P \mid x \text{ é divisor de } 48\}$

$C = \{x \in P \mid x \text{ é múltiplo de } 5\}$

O número de elementos do conjunto $(A \quad B) \cap C$ é:

A 2
B 3
C 4
D 5
E 6

13 **UFSM** Dados os conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\}$,
$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \le 9\}$ e
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 5\}$,
o produto dos elementos que formam o conjunto $(A \cap B) \quad C$ é igual a:

A 1
B 3
C 15
D 35
E 105

14 **UEM 2016** Considere os conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad \sqrt{3} < x \quad 5\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$,

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \quad 8\}$ e

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 9\}$,

e assinale o que for correto.

01 $(A \cup D) - (A \cap D) = [-3, 0]$.

02 $(B \cap C) \quad D \quad]0, 1]$

04 $(C \cup D) \cap B =]0, 9[$

08 $(B \cap D) \subset C$

16 $\mathbb{R} - B =]-\infty, 0[$.

Soma:

15 Sendo $A = \{2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{2, 3, 7, 8, 10\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$, faça o diagrama das reuniões a seguir, hachurando as regiões correspondentes:

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

16 **UEPG 2017** Se M, N, P e Q são subconjuntos dos números naturais tais que
$(M \quad N) \cap P = \{1, 2, 3, 4\}$, $N = \{5, 6, 7, 8\}$, $P \cap N = \varnothing$, $Q \cap (M - P) = \{7, 8\}$, $M \cap Q \cap P = \{2, 4\}$, assinale o que for correto

01 $M \cap (P \cup Q) = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$.

02 $[M \cap (P \cup Q)] \cap [Q \cup (N \quad P)] \quad \{1, 3\}$.

04 $5 \notin P$ e $7 \notin P$

08 $1 \notin Q$ e $3 \notin Q$.

16 $Q \cap (N \cup P) = \{7, 8\}$.

Soma:

17 **UFSM** Dados os conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\}$,
$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \le 9\}$ e
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 5\}$,
o produto dos elementos que formam o conjunto $(A \cap B) - C$ é igual a:

A 1
B 3
C 15
D 30
E 105

18 Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das seguintes afirmações.

- [ ] $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}+$
- [ ] $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}_+$
- [ ] $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q}_+$
- [ ] $\mathbb{Q}_+ \supset \mathbb{N}^*$
- [ ] $\frac{8}{4} \subset \mathbb{N}$

19 Sendo $A = [2; 7]$ e $B = [-3; 5]$, indicar a sentença falsa.

A $A \cup B = [-3; 7]$
B $A \cap B = [2; 5]$
C $A - B = [5; 7]$
D $B \quad A = [\quad 3; 2[$
E n.d.a.

20 Classifique em V ou F

- [ ] $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}$
- [ ] $\mathbb{Z}+ \subset \mathbb{R}^*$
- [ ] $\mathbb{Z}+ \cap \mathbb{R} = \varnothing$
- [ ] $\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}^*$

21 Complete as sentenças a seguir, de forma que as torne todas verdadeiras:

a) { , , 5, 4} ∪ { , 7, 2, } = {1, , , _, 6, }

b) {2, 9, _} ∪ {_, _, _, 7} = {_, 4, 5, _, 9, 10, 90}

22 **Udesc** Seja A o conjunto dos naturais menores que 10 e seja B outro conjunto, tal que $A \cup B = A$, $A \cap B$ é o conjunto dos pares menores que 10.
Então, o conjunto B é:

A vazio.
B $A \cap B$
C $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$.
D $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$.
E qualquer conjunto de números pares que contenha $A \cap B$.

23 **Uece** Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros,

$I = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, 0 \le \frac{2(x+4)}{3} \le 8\}$ e

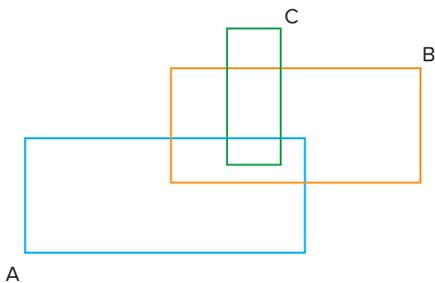
$J = \{x \in \mathbb{Z};\, (x \quad 2)^2 \ge 4\}$.

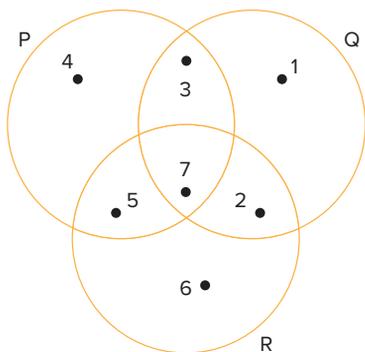
O número de elementos do conjunto $I \cap J$ é:

A 8
B 9
C 10
D 11

24 Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das seguintes afirmações.

- [ ] Se $A \subset B$, então $A \cup B = A$.
- [ ] Se $A = B$, então $A \cup B = \varnothing$.
- [ ] Se $2 \in A$ e $2 \notin B$, então $2 \notin A \cup B$.
- [ ] Se $5 \in A \cup B$, então $5 \in A$ e $5 \in B$.
- [ ] Se $A \cup B \cup C \neq \varnothing$, então $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ e $C \neq \varnothing$.

25 Dado o diagrama a seguir, apresentar por meio de hachuras os conjuntos indicados

a) $A \cap B$
b) $A \cap C$
c) $A - C$
d) $C - A$
e) $(A \cap B) - C$
f) $(A - B) - C$
g) $(B - C) \cap A$

26 **UFF** Considere os conjuntos representados abaixo

Represente, enumerando seus elementos, os conjuntos:
a) P, Q e R
b) $(P \cap Q) - R$
c) $(P \cup Q) \cap R$
d) $(P \cup R) - P$
e) $(Q \cap R) \cup P$

27 **Unirio** Considere três conjuntos A, B e C, tais que: $n(A) = 28$, $n(B) = 21$, $n(C) = 20$, $n(A \cap B) = 8$, $n(B \cap C) = 9$, $n(A \cap C) = 4$ e $n(A \cap B \cap C) = 3$ Assim sendo, o valor de $n((A \cup B) \cap C)$ é:
A 3
B 10
C 20
D 21
E 24

28 **UEPG 2017** Em um grupo de 500 estudantes, 90 estudam Química, 160 estudam Biologia e 20 estudam Química e Biologia. Se um aluno é escolhido ao acaso, assinale o que for correto.
01 A probabilidade de que ele estude Química ou Biologia é de 0,46;
02 A probabilidade de que ele não estude Química nem Biologia é de 0,54;
04 A probabilidade de que ele estude Química e Bio logia é de 0,04;
08 A probabilidade de que ele estude somente Química é de 0,16.

Soma:

29 **Uefs 2018** Em uma empresa com 33 funcionários, 22 são fluentes em italiano, 14 são fluentes em alemão e 27 são fluentes em francês. Sabe-se que todos os funcionários são fluentes em pelo menos uma dessas línguas e que, no total, 18 desses funcionários são fluentes em exatamente duas dessas línguas. O nú mero de funcionários nessa empresa que são fluentes nessas três línguas é
A 2
B 3
C 4
D 5
E 6

30 **UEG 2019** Em uma pesquisa sobre a preferência para o consumo de dois produtos, foram entrevistadas 970 pessoas. Dessas, 525 afirmaram consumir o produto A 250 o produto B e 319 não consomem nenhum desses produtos. O número de pessoas que consomem os dois produtos é
A 124
B 250
C 525
D 527
E 775

31 Sendo $A = \left\{1, 2, \frac{3}{5}\right\}$ e $B = \{\ \ 1, 0\}$, determine:
a) A x B
b) n (A x A)
c) n (B x B)

32 **Ufes** Se $A = \{\ \ 2, 3, m, 8, 15\}$ e $B = \{3, 5, n, 10, 13\}$ são sub conjuntos de $\mathbb{Z}$ (números inteiros), e $A \cap B = \{3, 8, 10\}$, então:
A $n \quad m \in A$
B $n + m \in B$
C $m \quad n \in A \cup B$
D $mn \in B$
E $\{m + n, mn\} \subset A$

33 Determine A x B e A x A, sendo:
$A = \{1, 2, -4\}$ e $B = \left\{\frac{2}{3}, 8\right\}$

34 **Mackenzie** Se A e B são subconjuntos de U e A' e B' seus respectivos complementares em U, então $(A \cap B) \cup (A \cap B')$ é igual a:

A A'
B B'
C B
D A
E A' B'

35 **Cesgranrio** Se A e B são conjuntos, A – (A – B) é igual a:

A A
B B
C A B
D $A \cup B$
E $A \cap B$

36 **ITA** Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, e considere as seguintes afirmações:

I. $(A - B)' \cap (B \cup A')' = \varnothing$
II. $(A - B')' = B - A'$
III. $[(A'\ \ B) \cap (B\ \ A)]' = A$

Sobre essas afirmações, podemos garantir que:

A apenas a afirmação I é verdadeira.
B apenas a afirmação II é verdadeira.
C apenas a afirmação III é verdadeira.
D todas as afirmações são verdadeiras.
E apenas as afirmações I e II são verdadeiras

37 Sejam A, B e C conjuntos quaisquer Demonstrar as seguintes expressões sem utilizar o diagrama de Venn Euler.

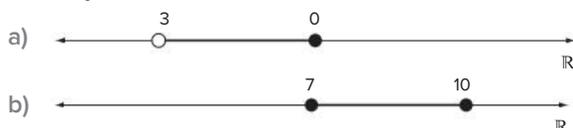
a) $A\ \ B = (A \cup B)\ \ B$
b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
c) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
d) $\overline{(A - B)} = \overline{A} \cup B$
e) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
f) $A \subset B \Rightarrow A \cup (B\ \ A) = B$

38 Sejam U um conjunto não vazio e $A \subset U$ e $B \subset U$, prove que:

I. Se $A \cap B = \varnothing$, então $B \subset A^C$.
II. $B\ \ A^c = B \cap A$.

39 Considere os intervalos A = [1; 5[e B =]0; 3] Determine os seguintes conjuntos:

a) $A \cup B$
b) A B
c) $A \cap B$

40 Represente em linguagem simbólica os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

41 **UEPG 2018** As marcas de celulares mais vendidas em um quiosque, em um certo mês, foram S, N e A. Os vendedores constataram que a venda se deu de acordo com a tabela a seguir

Marcas vendidas	Número de compradores
S	35
N	40
A	40
S e N	15
S e A	12
N e A	10
S, N e A	5
Outras marcas	35

A partir do que foi exposto, assinale o que for correto.

01 115 compradores levaram apenas uma das marcas de celular.
02 83 compradores não levaram a marca S.
04 23 compradores não levaram a marca S e nem a N.
08 22 compradores levaram apenas duas das marcas de celular.

Soma:

42 Os conjuntos a seguir estão apresentados por uma propriedade característica de seus elementos.
Nomeie cada um de seus elementos colocando-os entre chaves.

a) $X = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 8\}$
b) $Y = \{y \in \mathbb{N} \mid y \leq 10\}$
c) $Z = \{z \in \mathbb{N} \mid 5 \leq z < 12\}$
d) $W = \{w \in \mathbb{N}^* \mid w \leq 5\}$

43 Monte um conjunto A e um conjunto B, saben do que A tem apenas 2 elementos, que B tem pelo menos 3 elementos e que $(A \cup B) \subset H$, sendo $H = \{1, 3, 4, 8, 16, 24, 40\}$

44 **Mackenzie** A e B são dois conjuntos, tais que A B tem 30 elementos, $A \cap B$ tem 10 elementos e $A \cup B$ tem 48 elementos. Então, o número de elementos de B A é:

A 8
B 10
C 12
D 18
E 22

45 **UFF** Os conjuntos S, T e P são tais que todo elemento de S é elemento de T ou P.
Esquematize um diagrama que representa esses conjuntos.

46 **Unesp 2019** Em um dia de aula, faltaram 3 alunas e 2 alunos porque os cinco estavam gripados. Dos alunos e alunas que foram à aula, 2 meninos e 1 menina também estavam gripados. Dentre os meninos presentes à aula, a porcentagem dos que estavam gripados era 8% e, dentre as meninas, a porcentagem das que estavam gripadas era 5%. Nos dias em que a turma está completa, a porcentagem de meninos nessa turma é de:

A 52%.
B 50%.
C 54%.
D 56%.
E 46%.

47 **Udesc 2017** Uma pesquisa sobre os fatores que influenciam na escolha de um livro para leitura foi realizada em um grupo de 80 pessoas Elas foram questionadas se na hora de escolher um livro levavam em consideração o gênero de sua preferência, a indicação de amigos ou as listas dos mais vendidos, sendo que poderiam optar por uma, duas ou as três opções.
Ninguém respondeu ser influenciado apenas por listas dos mais vendidos, mas 20 pessoas responderam levar esse fator em consideração. Além disso, 28 responderam considerar apenas o gênero de sua preferência, enquanto 5 disseram que as três opções influenciam suas decisões
Sabendo, ainda, que o número de pessoas que se baseiam apenas nas indicações dos amigos é igual aos que disseram levar em consideração apenas as indicações dos amigos e o gênero de sua preferência, então pode-se afirmar que a quantidade de pessoas que seguem apenas as indicações de amigos é:

A 13 B 10 C 16 D 32 E 8

48 **FGV** Dados dois conjuntos não vazios A e B, se ocorrer $A \cup B = A$, podemos afirmar que:

A $A \subset B$.
B isso nunca pode acontecer.
C B é um subconjunto de A
D B é um conjunto unitário.
E A é um subconjunto de B

49 **Mackenzie** Se $\{\ 1; 2x + y; 2; 3; 1\} = \{2; 4; x \quad y; 1; 3\}$, então:

A $x > y$ C $x = y$ E $x > 2y$
B $x < y$ D $2x < y$

50 **ITA** Sejam E, F, G e H subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ Considere as afirmações:

I Se $E \times G \subset F \times H$, então $E \subset F$ e $G \subset H$
II. Se $E \times G \subset F \times H$, então $E \times G \cup F \times H = F \times H$.
III. Se $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$, então $(E \times G) \subset (F \times H)$.

Então:

A apenas a afirmação (I) é verdadeira.
B apenas a afirmação (II) é verdadeira.
C apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
D apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
E todas as afirmações são verdadeiras

51 **UFSC** Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) verdadeiras(s).

01 Sejam *x* e *y* o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de 15 e 18, respectivamente Então, o produto $xy = 270$.
02 Se $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$, então, A é equivalente a $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 1 < x < 7\}$.
04 Numa divisão, cujo resto não é nulo, o menor número que se deve adicionar ao dividendo para que ela se torne exata é (d – r), sendo d o divisor e r o resto.
08 O conjunto solução da inequação $(x \quad 3)/(x \quad 2) \leq 1$, para $x \neq 2$, é $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$.
16 Sejam A e B dois conjuntos finitos disjuntos. Então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, em que n(X) representa o número de elementos de um conjunto X.

Soma:

52 **ITA** Seja: $A = \left\{\frac{(\ 1)^n}{n!} + \text{sen}\left(\frac{n!}{6}\right); n \in \mathbb{N}\right\}$.

Qual conjunto a seguir é tal que sua interseção com A dá o próprio A?

A $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
B $(-\infty,\ 2]$
C $[\ 2, 2]$
D $[\ 2, 0]$
E $[0, 2)$

53 **Mackenzie** Leia e responda:

I. Se $\{5; 7\} \subset A$ e $A \subset \{5; 6; 7; 8\}$, então os possíveis conjuntos A são em número de 4.
II. Supondo A e B conjuntos quaisquer, então sempre temos $(A \cap \varnothing) \cup (B \cup \varnothing) = A \cup B$.
III. A soma de dois números irracionais pode ser racional.

Das afirmações anteriores:

A I, II e III são verdadeiras.
B apenas I e II são verdadeiras.
C apenas III é verdadeira.
D apenas II e III são verdadeiras.
E apenas I e III são verdadeiras.

54 Leia com atenção:

- Um subconjunto A do conjunto $\mathbb{R}$ é fechado para a operação de adição quando a soma de dois elementos quaisquer de A é também um elemento de A.

$$x \in A \text{ e } y \in A \rightarrow x + y \in A; \forall x\ \forall y$$

- Um subconjunto A do conjunto $\mathbb{R}$ é fechado para a operação de subtração quando a diferença entre dois elementos quaisquer de A é também um elemento de A

$$x \in A \text{ e } y \in A \rightarrow x \quad y \in A; \forall x\ \forall y$$

- Um subconjunto A do conjunto $\mathbb{R}$ é fechado para a operação de multiplicação quando o produto entre dois elementos quaisquer de A é também um elemento de A

$$x \in A \text{ e } y \in A \rightarrow x \quad y \in A; \forall x\ \forall y$$

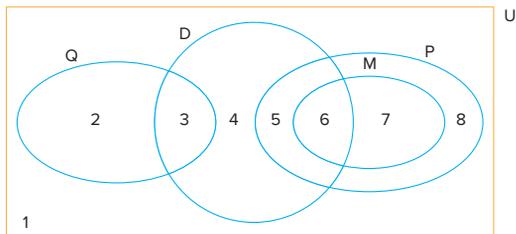
Dados os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
a) $\mathbb{N}$; b) $\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{Z}$; d) $\mathbb{R}+$; e) $\mathbb{R}-$; f) $\mathbb{Q}^*$; g) $\mathbb{R}^*$

a) Quais desses subconjuntos são fechados em relação à soma?
b) Quais desses subconjuntos são fechados em relação à subtração?
c) Quais desses subconjuntos são fechados em relação à multiplicação?

55 **UEFS 2015** Três cometas se aproximam do Sol a cada 20, 24 e 28 anos, respectivamente. Se o último ano em que todos estiveram próximos do Sol foi 1984, o próximo ano em que isso deverá ocorrer será

A 2056
B 2104
C 2264
D 2824
E 15424

56 **Ibmec-SP** No diagrama a seguir, U representa o conjunto de todos os alunos de uma escola Estão representados os seguintes subconjuntos de U:

Q: alunos que gostam de quiabo;
D: alunos com mais de 16 anos de idade;
P: alunos que gostam do professor Pedro;
M: alunos que gostam de Matemática

Em todas as regiões do diagrama, identificadas com um número de 1 a 8, há pelo menos 1 aluno representado. Então, é correto concluir que:

A se um aluno gosta de quiabo, então ele não tem mais do que 16 anos
B pelo menos um aluno que gosta de Matemática tem mais do que 16 anos e gosta de quiabo
C se um aluno gosta do professor Pedro, então ele gosta de Matemática
D todo aluno que gosta de Matemática e tem mais do que 16 anos gosta do professor Pedro.
E se um aluno com mais de 16 anos não gosta do professor Pedro, então ele não gosta de quiabo

57 **UFSC 2018** Preocupado com a saúde de seus funcionários, o dono de uma empresa realizou uma pesquisa sobre os hábitos alimentares de seus empregados. Ele constatou que todos se alimentam ao menos uma vez ao dia e que, devido à rotina familiar e de trabalho, os únicos momentos de alimentação são: café da manhã, almoço e jantar. Os funcionários deveriam responder quando se alimentavam com algum tipo de proteína de origem animal. A pesquisa revelou que:

- 12 ingerem algum tipo de proteína animal apenas no café da manhã;
- 17 ingerem algum tipo de proteína animal apenas no jantar;
- 147 ingerem algum tipo de proteína animal no almoço;
- 97 ingerem algum tipo de proteína animal no café da manhã e no almoço;
- 94 ingerem algum tipo de proteína animal no café da manhã e no jantar;
- 87 ingerem algum tipo de proteína animal no almoço e no jantar; e
- 66 ingerem algum tipo de proteína animal no café da manhã, no almoço e no jantar.

Se o total de funcionários da empresa for 260 determine o número de funcionários que não se alimentam com proteína animal em nenhuma das refeições.

58 **PUC-PR 2016** As afirmações a seguir são verdadeiras:
Todo maratonista gosta de correr na rua.
Existem maratonistas que são pouco disciplinados.
Dessa forma, podemos afirmar que:

A Algum maratonista pouco disciplinado não gosta de correr na rua.
B Algum maratonista disciplinado não gosta de correr na rua.
C Todo maratonista que gosta de correr na rua é pouco disciplinado.
D Todo maratonista pouco disciplinado não gosta de correr na rua.
E Algum maratonista que gosta de correr na rua é pouco disciplinado.

59 **Falbe 2017** Sejam A, B e C subconjuntos do conjunto dos números naturais N = {0, 1, 2, 3, 4, ...}, de modo que:

- A é o conjunto dos números de 3 algarismos, todos distintos
- B é o conjunto dos números que possuem exata mente 1 algarismo 5.
- C é o conjunto dos números pares.

E sejam os conjuntos:

$P = A \cap B$ $\quad Q = A^c \cap B^c$ $\quad P = A \cup B^c$

Onde a notação X^C indica o conjunto complementar do conjunto X.
São elementos respectivos dos conjuntos P, Q e R os números:

A 204, 555, 550
B 972, 1234, 500
C 1234, 505, 5555
D 204, 115, 550

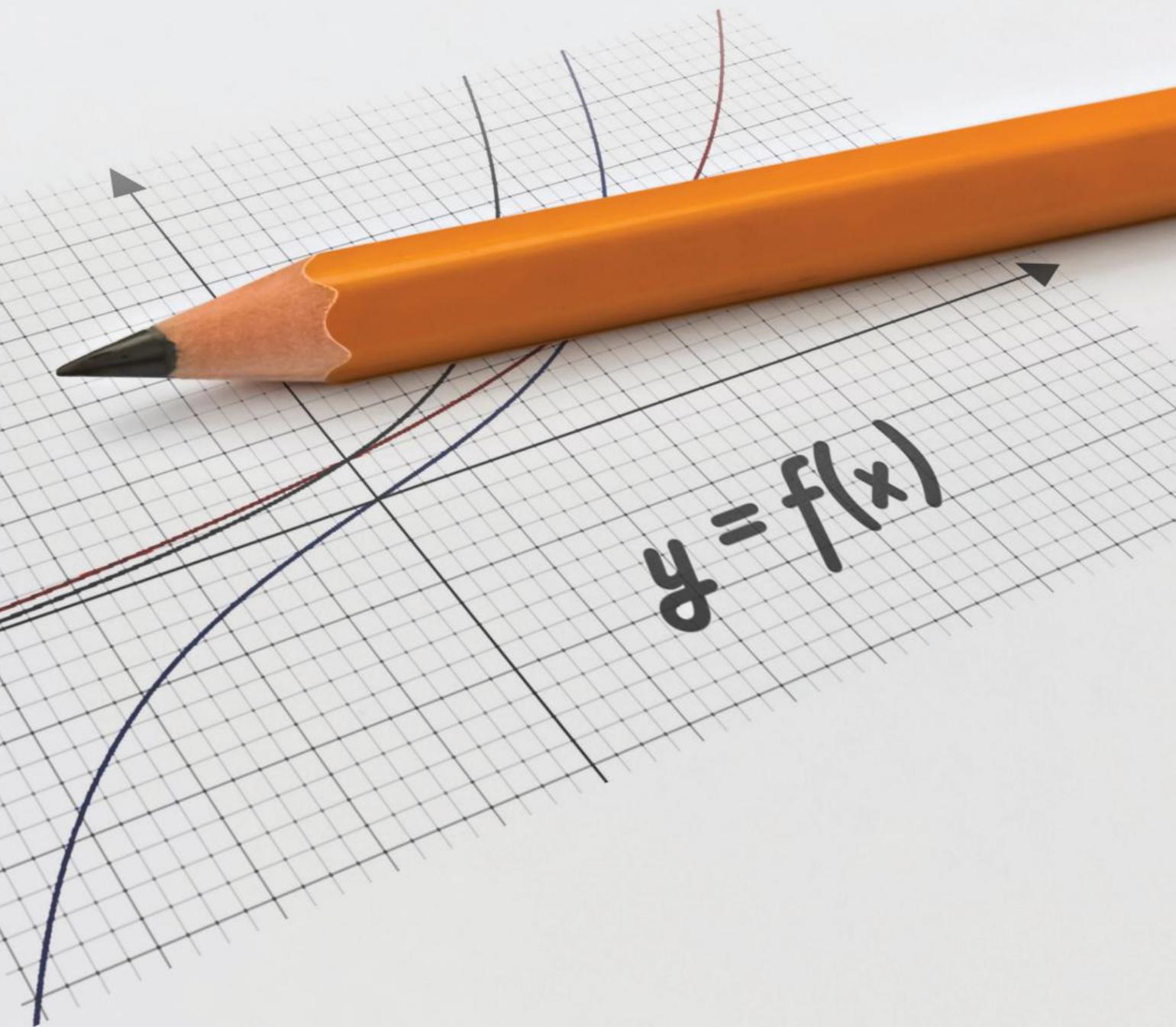
60 Considere os seguintes conjuntos:
A = {1; 2; {1; 2}}, B = {{1}; 2} e C = {1; {1}; {2}}
Assinale a alternativa falsa.

A $A \cap B = \{2\}$
B $B \cap C = \{\{1\}\}$
C B $C = A \cap B$
D $B \subset A$
E $A \cap P(A) = \{\{1; 2\}\}$, em que P(A) é o conjunto dos subconjuntos de A.

61 **UEPG 2018** Com relação aos conjuntos abaixo, assi nale o que for correto

$A = \{x \in Z \mid |x| \leq \sqrt{10}\}$
$B = \{x \in Z \mid x^2 - 2x \leq 3\}$
$D = \{x \in Z \mid x^2 + 5x + 4 < 0\}$

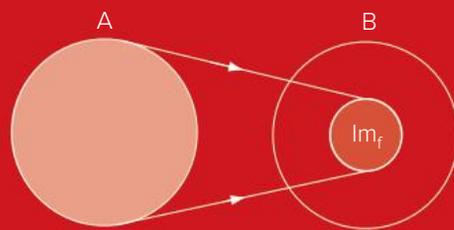
01 A   B = D
02 $(A \cup B) \cap D = \{x \in Z \mid x^2 + 5x + 6 = 0\}$
04 $D \not\subset A$ e $B \subset A$
08 $B \cap D = \{x \in R \mid 2x + 7 = 5\}$
16 O conjunto D admite exatamente 16 subconjuntos.

Soma:

FRENTE 1

CAPÍTULO

2

Relações e funções

Gottfried Leibniz nasceu na Alemanha e foi um célebre filósofo, cientista, matemático e diplomata Atribui-se a ele a criação do termo "função" (1694) Em muitas relações, bastante comuns, envolvendo quantidades variáveis, o valor de uma delas depende do valor da outra O termo "função" serve para descrever a dependência de uma grandeza em relação à outra Simbolicamente:

$f: A \rightarrow B$ e $f(x) = y$

A: Domínio

B: Contradomínio

Im_f: Conjunto imagem

Relações

No final do capítulo anterior, você aprendeu o conceito de par ordenado e produto cartesiano. Relembre que o par ordenado é um conjunto que possui dois elementos que respeitam uma ordem, e o produto cartesiano é um conjunto de pares ordenados em que o 1º elemento é proveniente de um conjunto A e o 2º elemento, de um conjunto B.

Observe o exemplo: A = {1; 2; 3} e B = {2; 4; 6; 8}; pode-se representar A × B pelo gráfico cartesiano ou pelo diagrama de flechas:

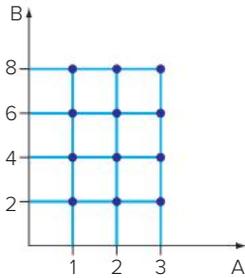



Fig 1 Gráfico cartesiano.

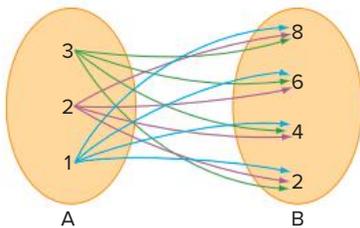



Fig 2 Diagrama de flechas

Assim, A × B possui 12 elementos. Dentre esses 12 elementos, vamos, primeiramente, escolher 5 aleatoriamente: (2; 2), (3; 4), (3; 8), (2; 4) e (1; 8). Esses 5 pares ordenados constituem um subconjunto de A × B chamado de relação, assim:

$R_1 = \{(2; 2), (3; 4), (3; 8), (2; 4), (1; 8)\}$ ($R_1 \subset A \times B$)

Vamos agora estabelecer uma lei para a formação dos elementos Observe o exemplo:

$$R_2 = \{(x; y) \in A \times B \mid y = 2x\}$$

Fazendo a listagem: $R_2 = \{(1; 2); (2; 4),(3; 6)\}$.

Observe a representação no gráfico cartesiano a seguir.

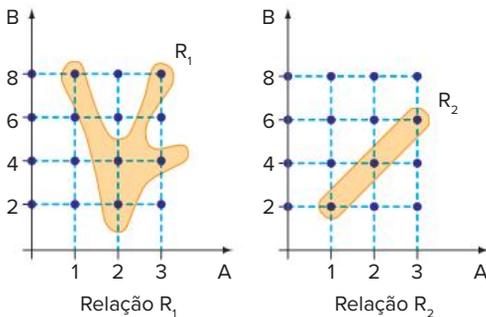



Fig. 3 Gráfico das relações.

! Atenção

Relação é um conjunto de pares ordenados tomados aleatoriamente ou por meio de uma lei de formação entre os elementos desses pares ordenados

Não se esqueça de que R^2 significa R × R. São todos os pontos do plano cartesiano.

Funções

Com base em exemplos simples do cotidiano, incentiva-se a construção do conceito de função; posteriormente, com os conceitos estabelecidos, vai-se para a parte formal das definições Observe:

a) Em uma distribuição de presentes para um grupo de três crianças, cada presente será para uma única criança. Observe:

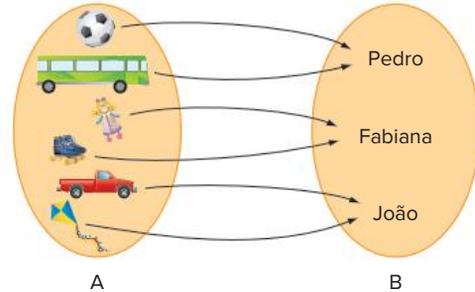



Fig 4 Distribuição dos brinquedos

b) Em um processo de contar objetos, o conceito de fun ção aparece do modo mais natural
Responda quantos símbolos há abaixo:

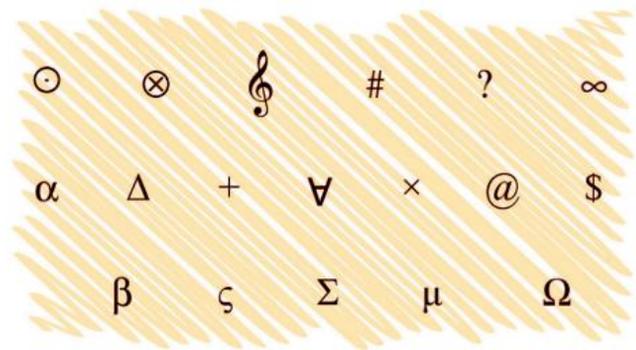



Fig. 5 Símbolos.

Analisando sua resposta, perceba que você associou cada símbolo a um número natural Existem dezoito sím bolos na figura 5; caso contrário, você deve ter cometido um dos seguintes erros:

- encontrou menos do que 18 símbolos: você não con tou todos os elementos;
- encontrou mais do que 18 símbolos: você contou algum símbolo mais de uma vez

A contagem realizada é um tipo de função. Asssocia-se cada símbolo a um número natural Observe o diagrama de flechas:

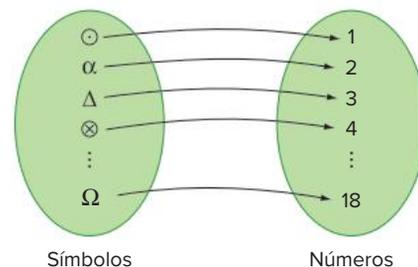



Fig. 6 Correspondência dos símbolos e números.

Define-se f a função da figura 6. Estamos associando, por exemplo, ⊙ ao número 1, ou simbolicamente f (⊙) = 1. A função f pode ser representada por uma tabela.

f: (símbolos)	→	{números}
⊙	→	1
α	→	2
Δ	→	3
⊗	→	4
	...	
Ω	→	18

Tab. 1 Símbolos e números.

c) Associação de um grupo de pessoas aos seus times prediletos:

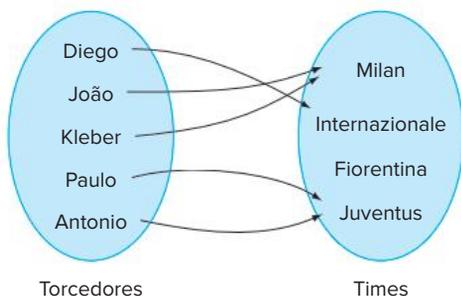



Fig 7 Diagrama torcedores × times

No exemplo *a*, cada brinquedo foi associado a uma única criança. No exemplo *b*, cada símbolo foi associado a um único número, e, finalmente, no exemplo *c*, também foi associado cada torcedor a um único time, mas alguns torcedores diferentes torcem para o mesmo time.

! Atenção

Qualquer que seja o elemento de um conjunto A, iremos associá-lo a um único elemento de um conjunto B

Definição de função

Uma relação recebe o nome de função se, e somente se, para todo elemento de A, existe um único elemento associado em B.

Simbolicamente, tem-se:

$$\forall\ x \in A,\ \exists \text{ um único } y \in B$$

Conjunto A é chamado de domínio e B, de contradomínio Dessa definição, deve-se considerar uma função como uma tríade formada:

- por domínio;
- por contradomínio;
- pela lei que transforma *x* em *y*

Observe o diagrama a seguir

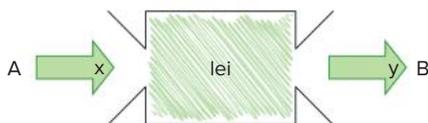
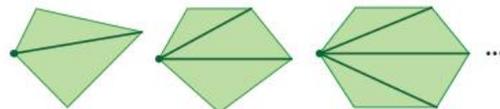



Fig 8 Esquema de uma função

Exercícios resolvidos

1 Observe a sequência de polígonos convexos e o número de diagonais que partem de cada vértice Estabeleça uma função entre os elementos

Resolução:

A observação entre o número de lados e o número de diagonais que partem de cada vértice segue um padrão sugerido pela tabela a seguir

Número de lados	Número de diagonais
4	1
5	2
6	3
⋮	⋮
n	d

A grandeza *d* é uma função de *n*, ou seja, d = f(n). Induzindo o resultado, tem-se d(n) = n – 3.

2 Galileu Galilei fez descobertas que contribuíram para a invenção do relógio de pêndulo. Diz-se que aos 19 anos ficou observando o balanço de um lustre de bronze no teto da catedral de Pisa. Ele relacionou o movimento oscilatório do pêndulo com suas próprias pulsações (como se fosse um cronômetro) e concluiu que o período de oscilação não dependia da amplitude do movimento. Observe a seguinte tabela e identifique a lei de formação entre os elementos do conjunto

Tempo de oscilação (s)	Comprimento do pêndulo (pés)
1	1
2	4
3	9
4	16
⋮	⋮
t	ℓ

Resolução:

A grandeza *t* é uma função de ℓ, ou seja, t = f(ℓ). Introduzindo o resultado, tem-se:

$$t = \sqrt{\ell} \longrightarrow \text{ou} = t(\ell) \quad \sqrt{\ell}$$
$$\ell = t^2 \longrightarrow \ell(t) = t^2$$

3 Uma pesquisa americana estabeleceu uma função entre o tamanho do sapato e o comprimento do pé. Para os homens, a lei é $y = 3x - 25$ e para as mulheres $y = 3x - 22$, em que x é o comprimento do pé e y, o número do sapato. Responda às perguntas:

a) Qual o tamanho do pé de homens e mulheres para que calcem os mesmos números?

b) Um homem e uma mulher possuem o mesmo tamanho de pé. Quem possui a maior numeração?

c) Um homem e uma mulher possuem a mesma numeração Quem possui o maior pé?

Resolução:

a) Se possuem os mesmos números, basta igualar as funções: $3x \quad 25 = 3x \quad 22$; logo, $25 = 22$, impossível.

b) Seja a o tamanho dos pés, a numeração do homem é $y = 3a \quad 25$ e a das mulheres, $y = 3a \quad 22$. A numeração das mulheres é maior.

c) Seja a numeração comum do homem e da mulher, então: $a = 3x - 25$ (homens) e $a = 3x - 22$ (mulheres). Isolando o *x*, tem-se: $x = \frac{a + 25}{3}$ e $x = \frac{a + 22}{3}$.

O maior pé é o do homem.

Representações básicas de uma função

1. Numericamente por meio de tabelas

Ano(x)	população f(x)
1900	17 438 434
1920	30 635 605
1940	41 165 289
1960	70 070 457
1980	119 002 706
2000	169 799 170
2008*	191 696 643

*Estimativa.

Tab. 2 População brasileira em função do ano.

2 Geometricamente por gráficos

A temperatura de uma parábola com 200 g de água, inicialmente a 50 °C, vai decaindo até atingir a temperatura ambiente de 20 °C.

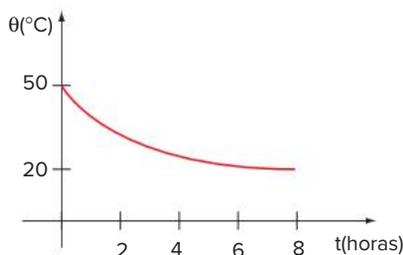
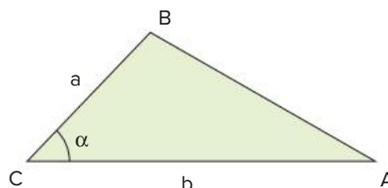



Fig 9 Temperatura em função do tempo

3. Algebricamente por fórmulas

A fórmula $A = \frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{2}$ representa a área de um triângulo de lados a e b e ângulo formando α.

4 Verbalmente

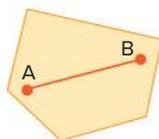
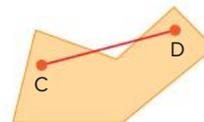
A lei da gravitação universal de Isaac Newton, pode ser descrita da seguinte maneira:

A força gravitacional de atração entre dois corpos no Universo é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

! Atenção

O símbolo ∃ significa "existe pelo menos um" O símbolo ∃| significa "existe e é único"

f: A ⟶ B representa uma função que associa elementos de A em B.

Um polígono é convexo quando dois pontos quaisquer formam um segmento que está inteiramente contido no polígono

Observe o exemplo: **Contraexemplo:**

O segmento $\overline{CD}$ não está inteiramente contido no polígono

Trata-se, então, de um polígono côncavo.

No curso de ondulatória física, você verá que o período do pêndulo simples depende do comprimento do fio (ℓ) e da aceleração da gravidade local (g) $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)$.

Classificação das funções

Respeitando a definição de função, tem-se algumas variações na apresentação das funções Primeiramente, reforce o conceito por uma análise gráfica.

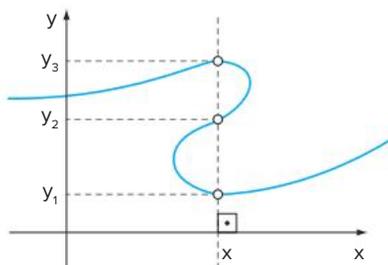



Fig 10 Análise gráfica da função.

O gráfico da figura 10 não representa uma função, pois existe um elemento x pertencente a A que não possui um único elemento y pertencente a B; são os pares ordenados $(x; y_1)$, $(x; y_2)$ e $(x; y_3)$.

Observe o próximo gráfico:

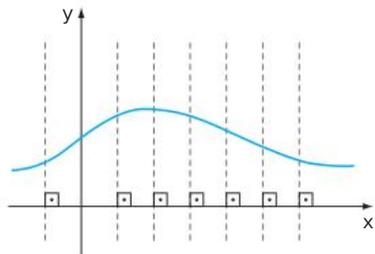



Fig. 11 Análise gráfica da função.

O gráfico da figura 11 representa uma função, pois em todo seu domínio, retas perpendiculares ao eixo x cortam o gráfico em pontos onde as ordenadas (valores de y) são diferentes.

> **! Atenção**
>
> Para verificar se um gráfico é função, basta traçar retas perpendiculares a x. Se cada uma cortar o gráfico em um único ponto, o gráfico é função; cortando em dois ou mais pontos, não é função.

Domínio e imagem

Continuando a análise gráfica das funções, o gráfico pode fornecer o domínio da função. A projeção do gráfico no eixo das abscissas representa o domínio, e a projeção do gráfico no eixo das ordenadas representa o conjunto--imagem da função (ou relação). Observe a figura.

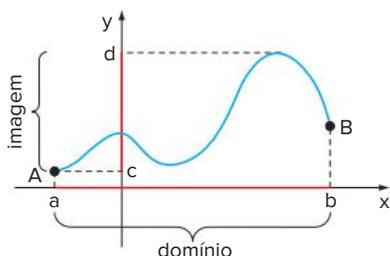



Fig 12 Domínio e imagem

$$D_f = [a; b] \text{ e } Im_f = [c; d]$$

Função injetora

Uma função é injetora quando todos os elementos do domínio possuem, respectivamente, imagens diferentes. Simbolicamente:

$$\forall\ x_1 \neq x_2 \in D_f \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \in Im_f$$

Observe os diagramas e o gráfico:

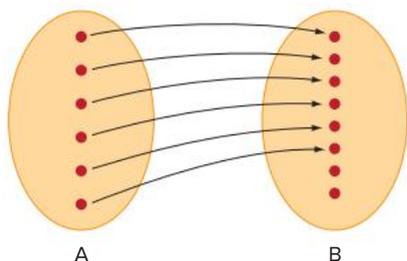



Fig 13 Função injetora

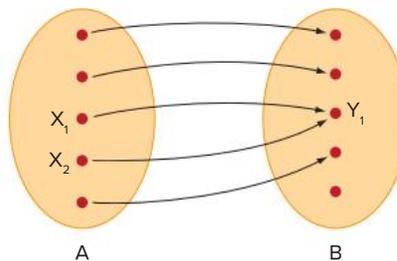



Fig. 14 Função não injetora.

Na figura 14, temos: $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2) = y_1$, que contraria a definição de função injetora

O gráfico da figura 15 insiste na mesma ideia. Observe:

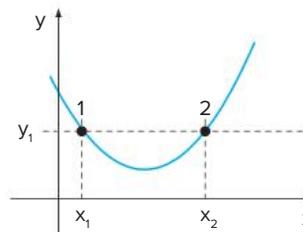



Fig. 15 Função não injetora.

Pode-se definir que uma função é injetora por meio da afirmação contrapositiva da afirmação já apresentada

Assim: $f: A \rightarrow B$ é uma função injetora se, e somente se, $\forall x_1; x_2 \in A$ e $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Para ficar mais claro, imagine que para $f(x_1) = f(x_2)$ tivéssemos $x_1 \neq x_2$.

Observe o diagrama:

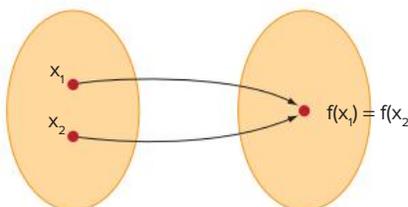



Fig. 16 Diagrama em que $f(x_1) = f(x_2)$

Isso contraria a ideia inicial de função injetora, logo, pode--se utilizar a contrapositiva para demonstrar que uma função é injetora.

Função sobrejetora

Uma função é sobrejetora quando o conjunto-imagem é o próprio contradomínio (B) da função. Simbolicamente:

$$\forall y \in CD_f \Rightarrow \exists x \in D_f \mid f(x) = y$$

Observe o diagrama:

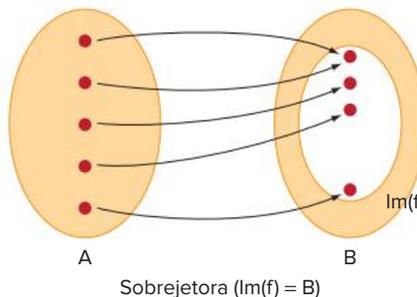



Fig. 17 Função sobrejetora.

Função bijetora

Uma função é bijetora quando for simultaneamente injetora e sobrejetora. Observe o diagrama:

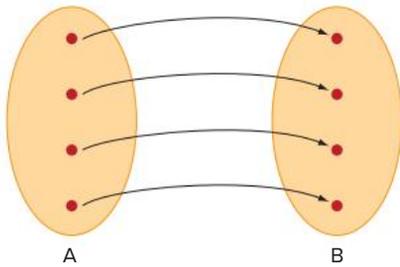



Fig 18 Função bijetora

Paridade das funções

Função par

Uma função é par quando elementos simétricos x e –x possuem a mesma imagem. Observe o gráfico:

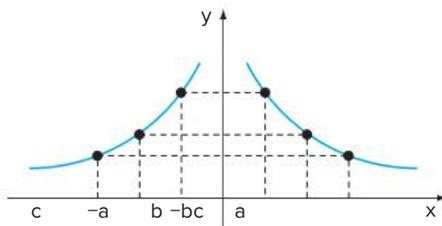



Fig. 19 Função par.

Na figura 19, tem-se uma função *f* tal que f(c) = f(c), f(b) = f(b), f(a) = f(a) Feito isso para todo elemento do domínio, tem-se uma função par

Com mais rigor matemático, tem-se:

$\forall x;\quad x \in D_f \Rightarrow f(x) = f(\ \ x)$ a função *f* é par.

A construção geométrica sugere que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo *y*.

Função ímpar

Uma função é ímpar quando elementos simétricos do domínio produzem imagens simétricas Observe o gráfico a seguir.

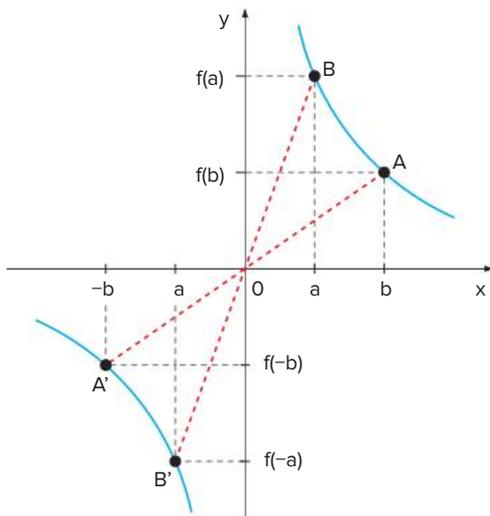



Fig 20 Função ímpar.

Na figura 20, tem-se uma função *f* tal que f(–b) = –f(b) e f(–a) = –f(a).

Se essa propriedade ocorrer para todo elemento do domínio, tem-se uma função ímpar.

Observe a definição rigorosa:

$\forall x;\quad x \in D_f \Rightarrow f(-x) = \quad f(x)$ a função *f* é ímpar.

A construção geométrica sugere uma simetria em rela ção à origem do sistema Observe na figura 20 que AO = A'O e BO = B'O.

Exercício resolvido

4 As expressões de funções que serão apresentadas a seguir podem possuir gráficos de díficil representação, o importante é a demonstração algébrica da paridade. Classifique as funções quanto à sua paridade.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$

b) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} \qquad \sqrt{1 \quad x + x^2}$

c) $f(x) = x^3 + x^2 \quad 2$

Resolução:

De acordo com as definições de função par e ímpar, vamos em todos os exemplos começar o cálculo de f(x). Observe:

a) $f(\ \ast) = \frac{1}{2}(a^{-x} \quad a^{-(-x)}) = \underbrace{\frac{1}{2}(a^{-x} + a^{(x)})}_{\text{própria função f}} = f(x)$

Assim, provamos que f(x) = f(x), para qualquer *x* do domínio, logo a função é par

b) $f(-x) = \sqrt{1 + (-x) + (-x)^2} - \sqrt{1 - (-x) + (-x)^2} =$
$= \sqrt{1 + x \quad x^2} + \sqrt{1 \quad x \quad x^2} =$
$= +(\sqrt{1 + x + x^2} = \sqrt{1 \quad x \quad x^2}) \qquad f(x),$

trata-se de uma função ímpar.

c) $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 2 = -x^3 + x^2 - 2 = -(x^3 - x^2 + 2)$. Não obtivemos f(x) nem –f(x), essa função não possui paridade.

! Atenção

Uma função é sobrejetora quando o contradomínio é o conjunto--imagem.

O gráfico da função par é simétrico em relação ao eixo *y*.

O gráfico da função ímpar é simétrico em relação à origem.

Pense a respeito! Toda função que é par não pode ser injetora

Função estritamente crescente

Uma função é estritamente crescente se, e somente se, para valores crescentes de $x(x_1 > x_2)$, tem-se também valores crescentes de $y(y_1 > y_2)$. Mais precisamente: $\forall x_1 > x_2 \in D_f \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ a função f é crescente. Observe o gráfico a seguir:

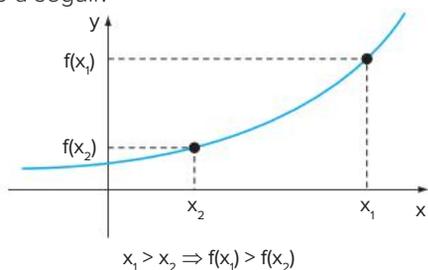



Fig. 21 Função crescente.

Função estritamente decrescente

Uma função é estritamente decrescente se, e somente se, para valores crescentes de $x(x_2 < x_1)$ tem-se valores decrescentes de $y(y_2 > y_1)$. Mais precisamente: $\forall x_2 < x_1 \in D_f \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, então a função *f* é decrescente. Observe o gráfico:

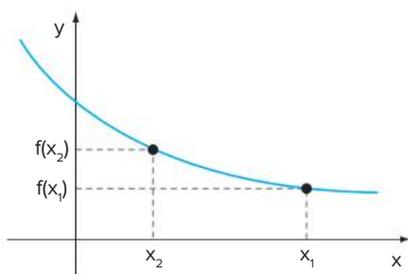



Fig. 22 Função decrescente.

Função do 1º grau (função afim)

Uma função é dita do primeiro grau se, e somente se, a sua lei é da forma: $f(x) = ax + b$; com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, $f(x) = 2x \quad 1$ é uma função do 1º grau e pela lei temos alguns de seus elementos:

Fig. 23 Função do 1º grau.

Observe alguns aspectos da expressão $f(x) = ax + b$

1º Se $a = 0$, tem se $f(x) = b$ (não é função do 1º grau), que é uma função que não depende de x, e a sua imagem é sempre b. Trata-se da função constante.

Observe o gráfico da função $f(x) = 3$:

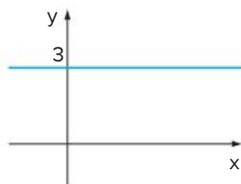
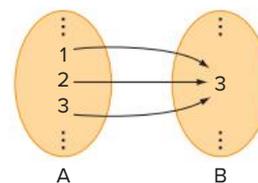



Fig 24 Função constante $f(x) = 3$

> **! Atenção**
>
> O diagrama de flechas da função constante $f(x) = 3$ seria:
>
>
>
>
> Observe que a função constante não é injetora e, se for de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, também é par

2º Se $a = 1$ e $b = 0$, tem-se $f(x) = x$, a chamada **função identidade**.

A função identidade é aquela cujos elementos do domínio são iguais aos respectivos elementos do conjunto imagem. O gráfico é uma reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares. Observe o gráfico a seguir:

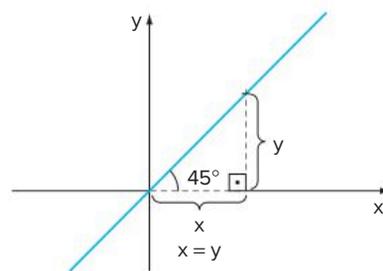



Fig. 25 Função identidade.

> **! Atenção**
>
> O gráfico da função do 1º grau
>
> $$f(x) = ax + b$$
>
> é sempre uma reta.

Agora, você verá que a função do 1º grau é representada sempre por uma reta.

Considere a função $f(x) = ax + b$ e que $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ e $C(x_3; y_3)$ são pontos da função. Considere a figura a seguir.

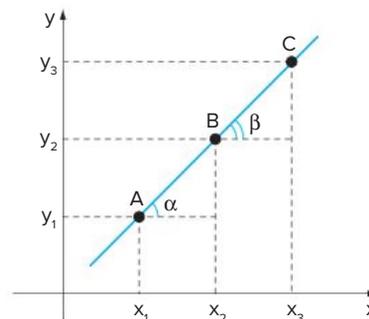



Fig. 26 Gráfico da demonstração.

Provando que $\Delta ABD \sim \Delta BCE$, tem-se $\alpha = \beta$ e assim os pontos A, B e C estarão alinhados.

$A \in f$; logo, $y_1 = ax_1 + b$ (I)

$B \in f$; logo, $y_2 = ax_2 + b$ (II)

$C \in f$; logo, $y_3 = ax_3 + b$ (III)

Fazendo (II) – (I)

$$y_2 \quad y_1 = ax_2 \quad ax_1 \therefore y_2 \quad y_1 = a(x_2 \quad x_1) \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 \quad x_1} = a$$

Repetindo o processo (III) – (II)

$$y_3 - y_2 = ax_3 - ax_2 \therefore y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2) \Rightarrow \frac{y_3 \quad y_2}{x_3 \quad x_2} = a$$

Assim: $\frac{y_2 \quad y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 \quad y_2}{x_3 - x_2} \therefore \frac{BD}{AD} = \frac{CE}{BE}$, que é a proporcionalidade dos lados dos triângulos ΔABD e ΔBCE; logo, $\alpha = \beta$ e o gráfico é uma reta

Propriedades do gráfico: $y = ax + b$

Raiz da função

A nossa expressão é $y = ax + b$. A raiz de uma função é o valor de *x*, tal que $y = 0$; logo, $0 = ax + b \therefore x = \frac{b}{a}$

Assim, determina se um ponto da reta $\left(\frac{b}{a}; 0\right)$.

Observe o gráfico a seguir.

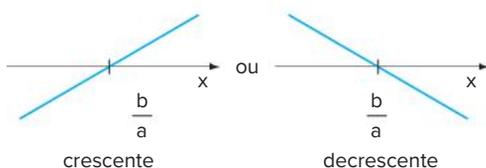



Fig. 27 Raiz da função.

Coeficiente linear

O coeficiente *b* da função $f(x) = ax + b$ é o chamado coeficiente linear Ele determina o ponto onde a reta corta o eixo *y* Observe a demonstração: $f(x) = ax + b$ Fazendo $x = 0$ $f(0) = a \cdot 0 + b \therefore f(0) = b$, que representa o ponto (0; b) Confira o resultado com o gráfico

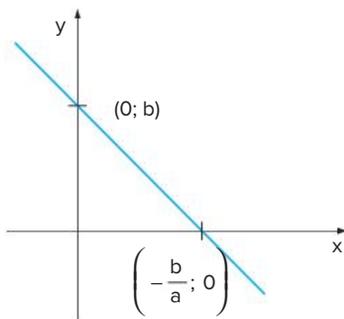



Fig 28 Coeficiente linear

Coeficiente angular (taxa de variação)

Considere dois pontos quaisquer da reta da função $y = ax + b$ e vamos calcular a seguinte razão: $\frac{\text{variação de } y}{\text{variação de } x}$

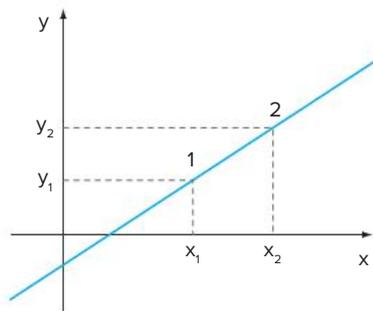



Fig. 29 Gráfico linear.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 \quad y_1}{x_2 \quad x_1} = \frac{ax_2 + b \quad ax_1 \quad b}{x_2 \quad x_1} = \frac{a(x_2 \quad x_1)}{x_2 \quad x_1} = a$$

O coeficiente a fornece a taxa de variação da grandeza *y* em relação à grandeza *x*.

! Atenção

$a > 0$, função estritamente crescente

$a < 0$, função estritamente decrescente

Construção de gráficos

Construção dos gráficos das funções apresentadas:

1. $y = 2x \quad 1$

raiz:

$2x \quad 1 = 0 \therefore x = \frac{1}{2}$

coeficiente linear: $b = -1$

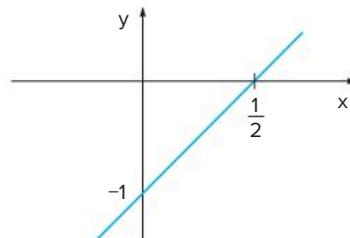



Fig 30 Gráfico de coeficiente linear –1

2. $y = 3x + 2$

raiz:

$3x + 2 = 0 \therefore x = -\frac{2}{3}$

coeficiente linear: $b = 2$

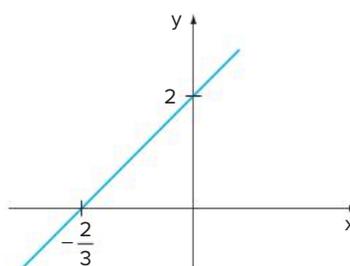



Fig. 31 Reta com raiz $-\frac{2}{3}$ e coeficiente linear 2.

3. $y = -x + 2$
raiz:
$-x + 2 = 0 \therefore x = 2$
coeficiente linear:
$b = 2$

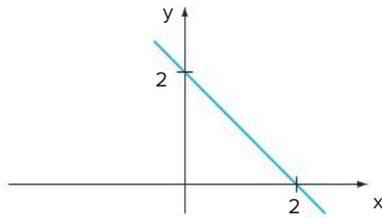



Fig. 32 Reta com raiz 2 e coeficiente linear 2.

> **! Atenção**
>
> Dois pontos distintos determinam uma única reta.
>
> Marcando a raiz e o coeficiente linear, a reta estará determinada
>
> Observando os exemplos (1), (2) e (3) percebemos que se $a > 0$, a função é crescente e, se $a < 0$, a função é decrescente
>
> A demonstração dessa propriedade está no texto complementar.

Função inversa

$f: A \to B$ está representada pelo diagrama a seguir.

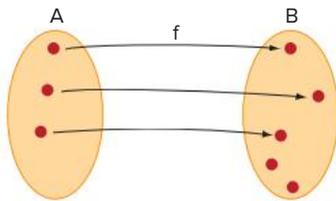



Fig 33 Função $f: A \to B$.

Vamos inverter a situação apresentada pela figura anterior. Observe:

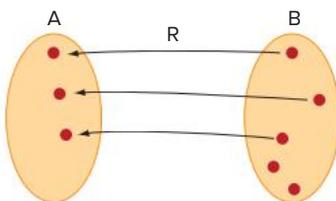



Fig. 34 Relação $R: B \to A$.

Obtém-se agora uma relação R aplicada de B em A. Essa relação não é uma função, pois não se relaciona a todos os valores de B em A

Se a função *f* fosse **sobrejetora**, a relação R **seria uma função**.

Fazendo as devidas alterações, observe a função representada pelo diagrama:

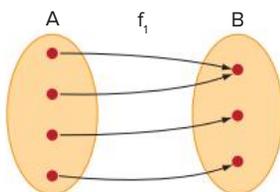



Fig. 35 Função $f_1: A \Rightarrow B$.

Agora $f_1 : A \to B$ é sobrejetora.

Invertendo a situação apresentada na figura 35, obtém-se a relação $R_1 : B \to A$, de acordo com o diagrama a seguir.

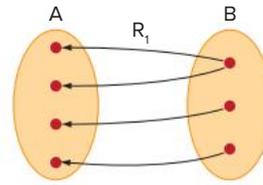



Fig. 36 Relação $R_1 : B \Rightarrow A$.

A relação R_1 não é uma função, pois, para um mesmo $x \in B$, existe mais de um $y \in A$.

Se a função f_1 fosse injetora, a relação R_1 seria uma função.

> **! Atenção**
>
> - Juntando as condições da função *f* e f_1, teremos uma função inversa se a função for sobrejetora e injetora, ou seja, bijetora
> - A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$; $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$ é bijetora, logo admite inversa
> - $f: A \to B$ é a função direta e $f^{-1}: B \to A$ é a função inversa.
> - Uma função é inversível se, e somente se, ela for bijetora.
> - $g \circ f(x)$ lê-se g "bola" f.

Exercícios resolvidos

5 Determine a função inversa de $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 3x \quad 2$.

Resolução:

$f^{\ 1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (troca do domínio e conjunto-imagem).

$y = 3x - 2 \Rightarrow x = 3y - 2 \therefore 3y = x + 2 \therefore y = \dfrac{x+2}{3}$

(ocorreu a troca do y pelo x e vice-versa).

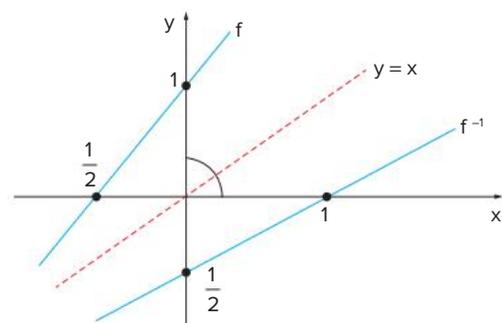
Logo: $f^{\ 1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$

6 Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) = 2x + 1$, obtenha f^{-1} e faça o esboço dos gráficos de *f* e f^{-1} visualizando a simetria em relação à reta $y = x$

Resolução:

Como *f* é bijetora, vamos obter a sua inversa.

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ e } x = 2y + 1 \therefore y = \frac{x \quad 1}{2}$$

Gráfico de *f* e $f^{\ 1}$

Vamos analisar um fato importante entre uma função e a sua inversa.

Se o par ordenado (a; b) $\in$ f, então (b; a) $\in f^{-1}$. Representando esses dois pontos no plano cartesiano, percebe-se que eles são simétricos em relação às bissetrizes dos quadrantes ímpares. Observe o desenho.

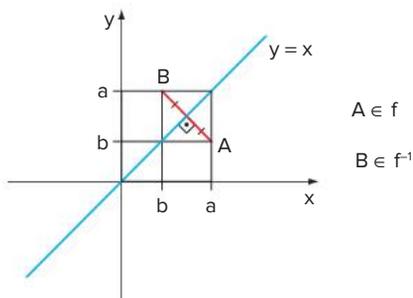



Fig 37 Gráfico representando os pontos B e A

> **! Atenção**
>
> Os gráficos de uma função *f* e a sua inversa f^{-1} são simétricos em relação às bissetrizes dos quadrantes ímpares

Composição de funções

Observe o diagrama a seguir.

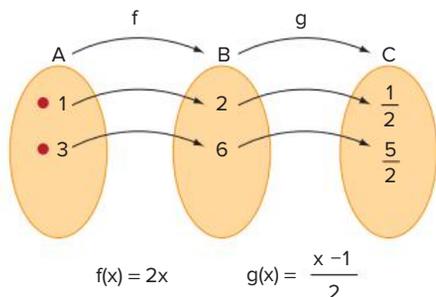



Fig. 38 Composição de funções.

Na figura 38, tem se as funções:
f : A $\rightarrow$ B tal que f(x) = 2x e g : B $\rightarrow$ C tal que $g(x) = \frac{x\ -\ 1}{2}$

e os caminhos percorridos por 1 e 3 até transformarem-se em $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{2}$.

A função composta seria uma função aplicada de A em C, sem caminhos intermediários.

Observando novamente o diagrama da figura 38, tem-se:

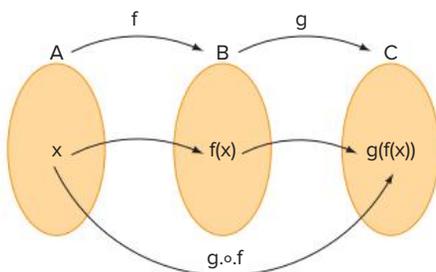



Fig 39 A função composta

g(f(x)) ou gof é a função composta que leva todo elemento do conjunto A para C.

Para obter a expressão da função composta, faça o cálculo de g(f(x)). Observe:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)\quad 1}{2} = \frac{2x\quad 1}{2}$$

$$\therefore\ g \circ f(x) = x \quad \frac{1}{2}$$

Conferindo os resultados, tem-se:

$$g \circ f(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$g \circ f(3) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Observe outra situação

Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(x) = 2x + 1$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2$ duas funções que podem se compor, pois o conjunto-imagem da *f* possui interseção não nula com o domínio da função *g*. Acompanhe os seguintes cálculos:

a) $g \circ f(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 = (2x+1)^2$

b) $f \circ g(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2x^2 + 1$

c) $f \circ f(x) = f(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(2x+1) + 1 = 4x + 3$

d) $f \circ (f \circ g)(x) = f(f \circ g(x)) = 2f \circ g(x) + 1 = 2(2x^2 + 1) + 1 =$
$= 4x^2 + 3$

e) $(f \circ f) \circ g(x) = f \circ f(g(x)) = 4g(x) + 3 = 4x^2 + 3$

f) $f \circ f\ ^{1}(x)$

Obtém-se inicialmente a inversa de f:

$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x = 2y + 1 \therefore y = \frac{x-1}{2}$ e $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Assim:

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = 2f^{-1}(x) + 1 = 2\left(\frac{x\quad 1}{2}\right) + 1 = x$$

g) $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{f(x)\quad 1}{2} = \frac{(2x+1)\quad 1}{2} = x$

Por esses exemplos, pode se tirar conclusões impor tantes a respeito da composição e inversão de funções.

> **! Atenção**
>
> Considere as funções *f*, *g* e *h* e algumas conclusões da operação composição:
>
> $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções distintas (operação não comutativa)
>
> $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (operação associativa)
>
> $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$ (função identidade)
>
> $f \circ g(x) = f(g(x))$

Estudo do sinal

Seja f(x) uma função qualquer. Fazer o estudo do sinal de f(x) é encontrar os valores de *x*, tal que:

$$f(x) > 0,\ f(x) < 0 \text{ ou } f(x) = 0$$

Observe o seguinte gráfico de uma função

$$f : A \to B:$$

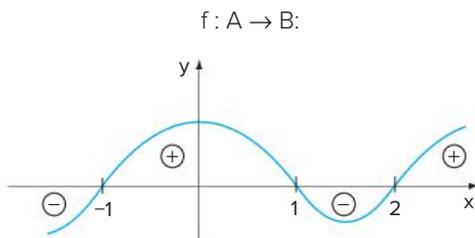



Fig. 40 Gráfico de f : A ⟹ B.

O estudo do sinal de f(x) será:

$$f(x) = 0 \text{ para } x = -1 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2$$

$$f(x) > 0 \text{ para } -1 < x < 1 \text{ ou } x > 2$$

$$f(x) < 0 \text{ para } x < -1 \text{ ou } 1 < x < 2$$

Estudo do sinal da função do 1º grau

Considere a seguinte função do 1º grau f(x) = x 2
Sua raiz vale 2, e o coeficiente angular vale 1 (positivo).
Observe o esboço do gráfico:

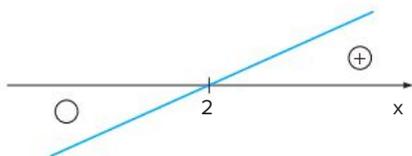



Fig 41 Quadro de sinais

Exercícios resolvidos

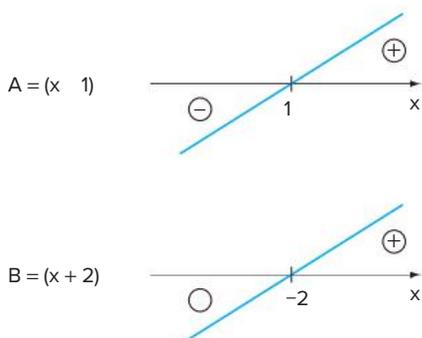
7 Resolva a inequação:

$$(x \quad 1) \cdot (x + 2) \geq 0$$

Resolução:

Analisando o sinal das funções componentes, temos:

A = (x 1)

B = (x + 2)

Queremos o sinal de A · B, para isso utilizamos o “varal”:

Nas linhas de A e B, figura o estudo dos sinais das funções componentes.
Na última linha, a expressão desejada de A e B é o produto A · B. Como queremos A·B ≥ 0, a solução é o intervalo real:

$$S =]-\infty\,;\,-2\,]\ \cup\ [1;\,+\infty[$$

8 Resolva a inequação:

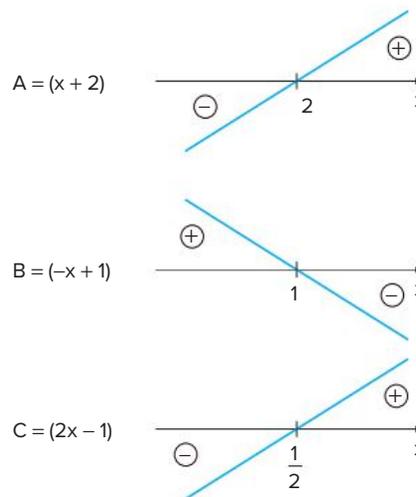
$$\frac{(x + 2)\cdot(\quad x + 1)}{(2x \quad 1)} \leq 0$$

Resolução:

Analisando o sinal das funções componentes separadamente, temos:

A = (x + 2)

B = (–x + 1)

C = (2x – 1)

Queremos o sinal de $\frac{A \cdot B}{C}$, para isso utilizaremos o varal a seguir:

Levando em consideração que o denominador não pode ser zero, ou seja, $2x \quad 1 \neq 0 \therefore x \neq \frac{1}{2}$ (intervalo aberto para $x = \frac{1}{2}$).

Como queremos $\frac{A \cdot B}{C} \leq 0$, temos:

$$S = \left[\ \ 2;\ \frac{1}{2}\right[\ \cup\ [1;\ +\infty[$$

FRENTE 1

9 Resolva a inequação em ℝ:

$$\frac{x^2+x+3}{x+1} > x$$

Resolução:

Vamos, inicialmente, preparar a inequação:

$$\frac{x^2+x+3}{x+1} > x \therefore \frac{x^2+x+3}{x+1} - x > 0 \therefore \frac{x^2+x+3-x(x+1)}{x+1} > 0 \therefore \frac{x^2+x+3-x^2-x}{x+1} > 0 \therefore \frac{3}{x+1} > 0 \Rightarrow x+1>0 \therefore x>-1$$

$$S =]-1;+\infty[$$

10 Resolva a inequação

$$\frac{(x-1)^3\cdot(x+2)^4\cdot(x+3)^5\cdot(x-6)}{x^2\cdot(x-7)^3} \leq 0$$

Resolução:

$$S = [-6;0[\cup]0;1] \cup [3;7[$$

Atenção

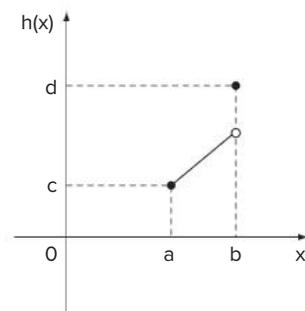
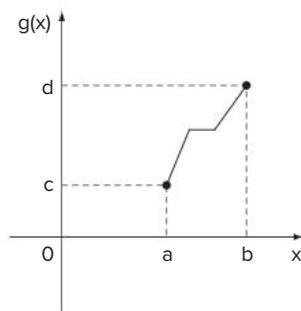
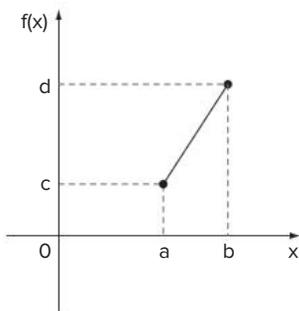
Para fazer o estudo do sinal de uma função, o cálculo da raiz é fundamental, pois a função pode mudar de sinal após a raiz.

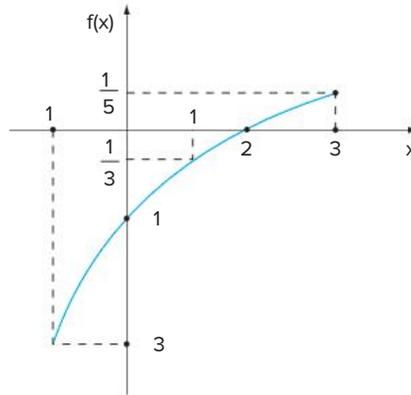
Para resolver inequações produtos ou inequações quocientes, utilizamos o quadro de sinais (ou o varal)

Revisando

1 Dada a função: $f: [-1; 1] \to [0; 6]$ e $f(x) = 3x + 3$, obtenha a sua inversa.

2 Sabemos que a composição de funções não é uma operação comutativa
Dadas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) = 2x + 1$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g(x) = ax + b$; $a \neq 0$, determine a relação entre *a* e *b* tal que $f \circ g = g \circ f$; $\forall x \in \mathbb{R}$ Dê um exemplo numérico.

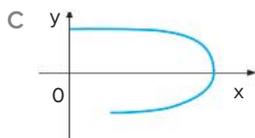
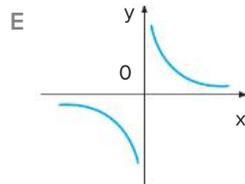
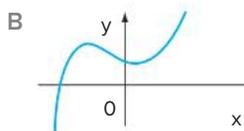
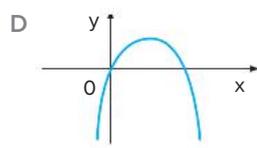
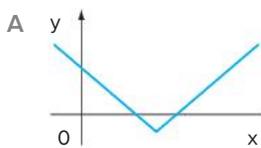
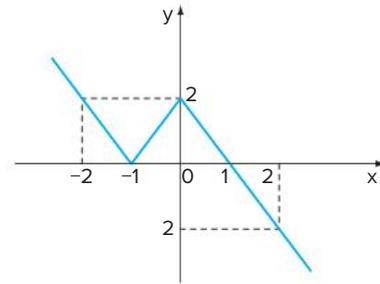
3 Considere as funções *f*, *g* e *h*, todas de domínio [a; b] e contradomínio [c; d], representadas nos gráficos a seguir

O que se pode afirmar sobre essas funções?

4 A figura a seguir representa o gráfico de uma função da forma $f(x) = \dfrac{x + a}{bx + c}$, para $1 \leq\ x \leq 3$.

Determine os valores de *a*, *b* e *c*

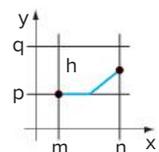
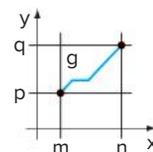
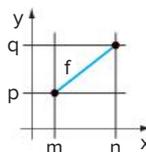
Exercícios propostos

1 Sendo A = {2; 3; 4} e B = {5; 6; 7; 9; 12}, qual o conjunto-imagem da função de A em B, tal que $f = \{(x; y) \in A \times B \mid y = 3x\}$?

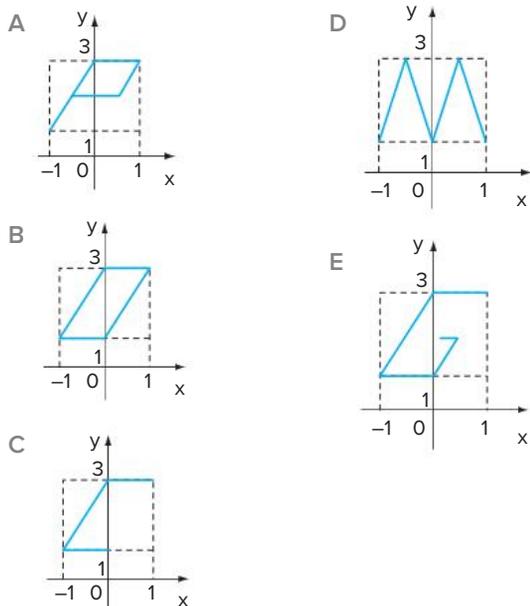
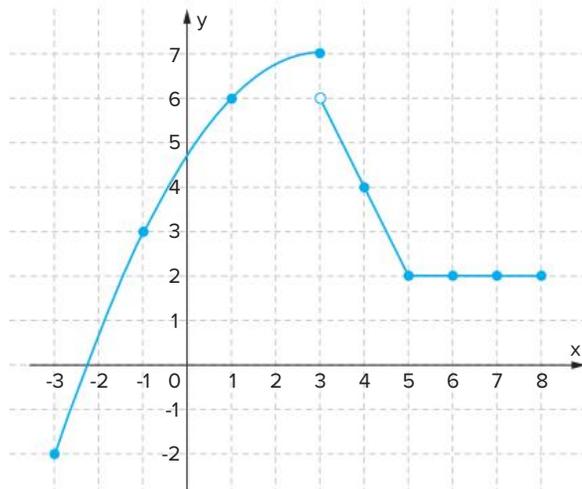
2 Qual o gráfico de flechas da função $f = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$, sendo A = {0; 3; 6} e B = {1; 2; 4; 5; 7}?

3 **UFPE** Dentre as curvas a seguir, qual pode ser o gráfico de uma função injetora y = f(x)?

A
D
B
E
C
4 **PUC** Seja *f* a função de ℝ em ℝ, dada pelo gráfico a seguir.

é correto afirmar que:

A *f* é sobrejetora e não injetora.
B *f* é bijetora.
C f(x) = f(x) para todo *x* real
D f(x) > 0 para todo *x* real
E o conjunto-imagem de *f* é]−∞; 2].

5 **UFF** Considere as funções *f*, *g* e *h*, todas definidas em [m, n] com imagens em [p, q] representadas pelos gráficos a seguir

Pode-se afirmar que:

A *f* é bijetiva, *g* é sobrejetiva e *h* não é injetiva.
B *f* é sobrejetiva, *g* é injetiva e *h* não é sobrejetiva.
C *f* não é injetiva, *g* é bijetiva e *h* é injetiva.
D *f* é injetiva, *g* não é sobrejetiva e *h* é bijetiva.
E *f* é sobrejetiva, *g* não é injetiva e *h* é sobrejetiva.

6 **PUC** Dos gráficos, o único que representa uma função de domínio $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\}$ e imagem $\{y \in \mathbb{R} \mid 1 \le y \le 3\}$ é:

A
D
B
E
C
7 **UFJF 2019** No plano cartesiano abaixo está representado o gráfico da função f: [3, 8] → [2, 7], no qual os pontos pretos destacados são os pontos em que o gráfico passa sobre os cruzamentos da malha.

Seja $k = f(-3) + f(-1) + f(3) - f(4) + f(5)$.

O valor de x para o qual $f(x) = k$ é

A 7
B 6
C 3
D 2
E 1

8 **FMP 2017** Considere as seguintes cinco retas do plano cartesiano, definidas pelas equações:

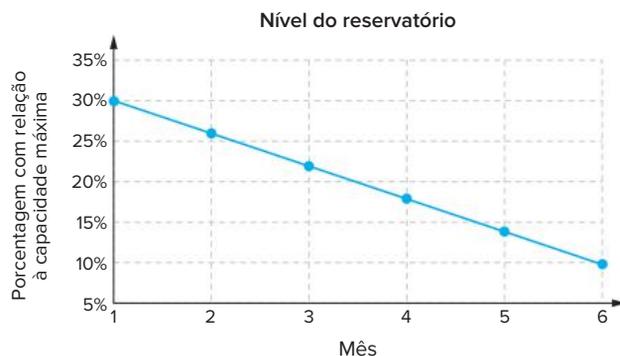
$$r_1 : 2x + 3y = 5;$$
$$r_2 : -x + \frac{1}{3}y = 2;$$
$$r_3 : y = x;$$
$$r_4 : 2x = 5;$$
$$r_5 : x - y = 0.$$

Apenas uma das retas definidas acima **NÃO** é gráfico de uma função polinomial de grau 1, y = f(x). Essa reta é a

A r_1
B r_2
C r_3
D r_4
E r_5

9 **PUC-Rio 2017** Considere a função real da forma f(x) = = ax + b. Sabendo que f(1) = 1 e f(0) = 2, qual é o valor do produto a · b?

A 1
B 6
C −3
D 4
E −6

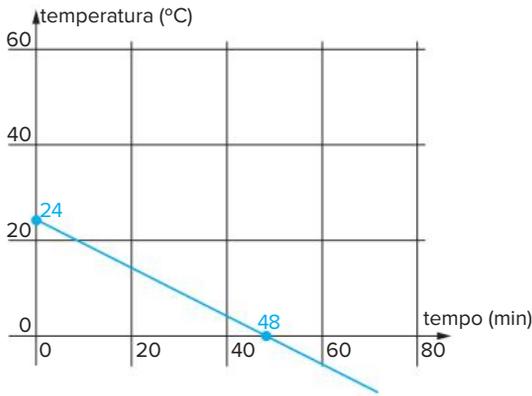
10 **Enem 2016** Um dos grandes desafios do Brasil é o ge renciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos Existe uma demanda crescen te por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mos trado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.

Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

A 2 meses e meio.
B 3 meses e meio
C 1 mês e meio.
D 4 meses.
E 1 mês.

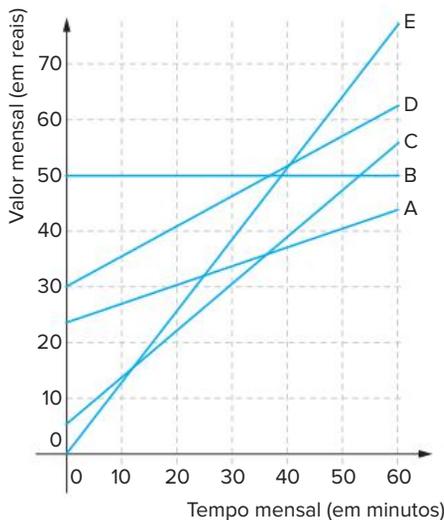
FRENTE 1

11 **EEAR 2016** Na função $f(x) = mx - 2(m - n)$, m e $n \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f(3) = 4$ e $f(2) = -2$, os valores de m e n são, respectivamente

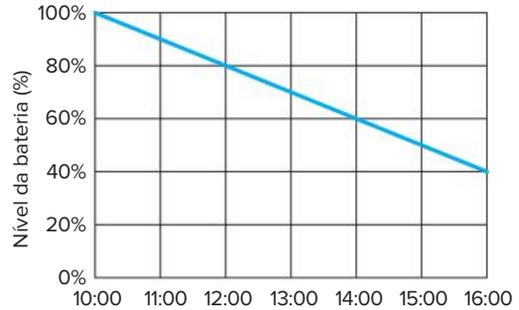
A 1 e −1
B −2 e 3
C 6 e −1
D 6 e 3

12 **ESPM 2017** O gráfico abaixo mostra a variação da temperatura no interior de uma câmara frigorífica desde o instante em que foi ligada. Considere que essa variação seja linear nas primeiras 2 horas.

O tempo necessário para que a temperatura atinja −18 °C é de:

A 90 min
B 84 min
C 78 min
D 88 min
E 92 min

13 **Enem 2014** No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular.
Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.

Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone
Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

A A
B B
C C
D D
E E

14 **UFPR 2017** O gráfico abaixo representa o consumo de bateria de um celular entre as 10h e as 16h de um determinado dia.

Supondo que o consumo manteve o mesmo padrão até a bateria se esgotar, a que horas o nível da bateria atingiu 10%?

A 18h.
B 19h
C 20h.
D 21h.
E 22h.

15 Resolver as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $(5 \quad 3x) \cdot (7 \quad 2x) \cdot (1 \quad 4x) \leq 0$

b) $(x + 6)^7 \cdot (6x \quad 2)^4 \cdot (4x + 5)^{10} \leq 0$

c) $\dfrac{2x+1}{x+2} > 0$

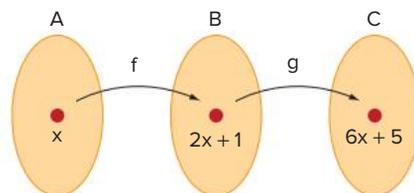
d) $\dfrac{3 \quad 4x}{5x+1} \geq 0$

e) $\dfrac{5x-2}{3x+4} < 2$

f) $\dfrac{(1 \quad 2x)}{(5 \quad x)\cdot(3 \quad x)} \leq 0$

g) $\dfrac{1}{x \quad 1} < \dfrac{2}{x \quad 2}$

h) $\dfrac{2}{3x \quad 1} \geq \dfrac{1}{x \quad 1} - \dfrac{1}{x+1}$

16 **Mackenzie** No esquema a seguir, f e g são funções, respectivamente, de A em B e de B em C. Então:

A $g(x) = 6x + 5$
B $f(x) = 6x + 5$
C $g(x) = 3x + 2$
D $f(x) = 8x + 6$
E $g(x) = \dfrac{(x \quad 1)}{2}$

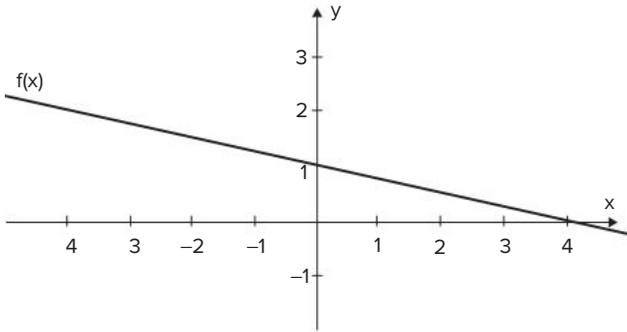
17 Uece Sejam f e g funções de ℝ em ℝ tais que: f(x) = 3x   2 e g(x) =   2x + 1, se f(g(m   1))   1 = = 3m   g(f(m + 1)), então f(m) + g(m) é igual a:

A $-\frac{2}{3}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{3}$

D $\frac{2}{3}$

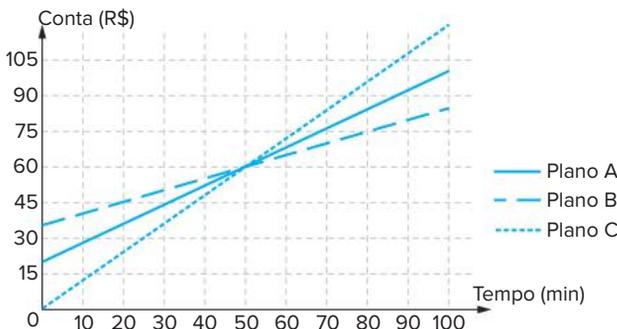
18 UEG 2015 Considere o gráfico a seguir de uma função real afim f(x)

A função afim f(x) é dada por

A f(x) =   4x + 1

B f(x) = −0,25x + 1

C f(x) = −4x + 4

D f(x) =   0,25x   3

19 Enem PPL 2018 Na intenção de ampliar suas fatias de mercado, as operadoras de telefonia apresentam diferentes planos e promoções Uma operadora oferece três diferentes planos baseados na quantidade de minutos utilizados mensalmente, apresentados no gráfico Um casal foi à loja dessa operadora para comprar dois celulares, um para a esposa e outro para o marido. Ela utiliza o telefone, em média, 30 minutos por mês, enquanto ele, em média, utiliza 90 minutos por mês.

Com base nas informações do gráfico, qual é o plano de menor custo mensal para cada um deles?

A O plano A para ambos.

B O plano B para ambos.

C O plano C para ambos.

D O plano B para a esposa e o plano C para o marido.

E O plano C para a esposa e o plano B para o marido.

20 UFMG Para um número real fixo a, a função f(x) = ax – 2 é tal que f(f(1)) = –3. O valor de a é:

A 1   B 2   C 3   D 4

21 UFMG Para a função f(x) = 5x + 3 e um número b, tem-se f(f(b)) = –2.
O valor de b é:

A –1

B $\frac{4}{5}$

C $\frac{17}{25}$

D $\frac{1}{5}$

22 PUC-PR 2015 Seja a uma função afim f(x), cuja forma é f(x) = ax + b, com a e b números reais. Se f(−3) = 3 e f(3) = −1, os valores de a e b, são respectivamente:

A 2 e 9

B 1 e −4

C $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{5}$

D 2 e −7

E $-\frac{2}{3}$ e 1

23 Famerp 2019 O gráfico de uma função polinomial do 1º grau f: ℝ → ℝ, dada por f(x) = ax + b, é uma reta de coeficiente angular positivo. Sabe-se ainda que f(f(x)) = 25x + 9. Assim, a intersecção do gráfico de f com o eixo y se dá em um ponto de ordenada

A $\frac{4}{3}$

B $\frac{5}{3}$

C $\frac{1}{2}$

D $-\frac{4}{3}$

E $\frac{3}{2}$

24 Unicamp 2020 Sabendo que a é um número real, considere a função f(x) = ax + 2, definida para todo número real x Se f(f(1)) = 1 então

A a =   1

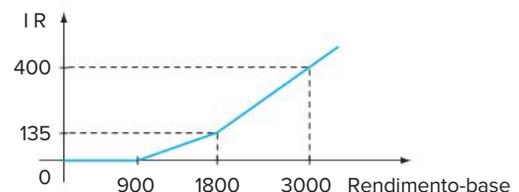
B a =   1/2

C a = 1/2

D a = 1

25 UFPR O imposto de renda (I.R.) a ser pago mensalmen te é calculado com base na tabela da Receita Federal da seguinte forma: sobre o rendimento-base aplica se a alíquota correspondente; do valor obtido, subtrai se a "parcela a deduzir"; o resultado é o valor do imposto a ser pago

Rendimento base R$	Alíquota	Parcela a deduzir (R$)
até 900,00	Isento	—
de 900,01 a 1800,00	15%	135,00
Acima de 1800,00	27,5%	360,00

Tabela da Receita Federal para agosto de 1999.

Em relação ao I.R. do mês de agosto de 1999, considerando apenas as informações da tabela, assinale V ou F.

- ☐ Sobre o rendimento-base de R\$ 1.000,00, o valor do imposto é R\$ 15,00.
- ☐ Para rendimentos-base maiores que R\$ 900,00, ao se triplicar o rendimento-base triplica-se também o valor do imposto.
- ☐ Sendo *x* o rendimento-base, com $x > 1.800$, uma fórmula para o cálculo do imposto y é: $y = 0{,}275x - 360$, considerando *x* e *y* em reais.
- ☐ O valor do imposto em função do rendimento-base pode ser representado, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, pelo gráfico mostrado na figura anterior.

26 **ESPM 2018** Nas alternativas abaixo há 2 pares de funções inversas entre si. Assinale aquela que não pertence a nenhum desses pares:

A $y = 2x - 1$

B $y = \frac{1-x}{2}$

C $y = \frac{x+1}{2}$

D $y = \frac{x \quad 1}{2}$

E $y = 1 - 2x$

27 **Unirio** Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $b \in \mathbb{R}$

$$x \Rightarrow y = \left(\frac{x}{2}\right) + b$$

e sabendo-se que $f \circ f\,(4) = 2$, a lei que define f^{-1} é:

A $y = \left(-\frac{x}{2}\right) + 2$

B $y = \left(-\frac{x}{2}\right) + 3$

C $y = \quad 2x + 4$

D $y = -2x + 6$

E $y = -2x + 8$

28 **ITA 2018** Considere as funções f,g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com a, b, c, d $\in$ R, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $f^{-1} \cdot g^{\ 1} = g^{\ 1} \cdot f^{-1}$, então uma relação entre as constantes a, b, c e d é dada por

A $b + ad = d + bc$.

B $d + ba = c + db$.

C $a + db = b + cd$.

D $b + ac = d + ba$.

E $c + da = b + cd$.

Texto complementar

Coeficiente angular da reta

As demonstrações das propriedades e teoremas famosos serão constantes em nosso material. Mas, em alguns momentos, temos o receio de que o aluno ignore algumas demonstrações e simplesmente decore o resultado e saia aplicando

Queremos incentivar o hábito de demonstrar os resultados que tanto aplicamos, muitas das vezes sem saber o porquê!

Um conceito simples de nosso capítulo é o coeficiente angular da reta, o coeficiente a da função $f(x) = ax + b$. Vamos associar o crescimento (ou decrescimento) de f(x) em função de a. Observe:

Uma função é crescente se:

$\forall x_1 > x_2 \in D_f \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, portanto,

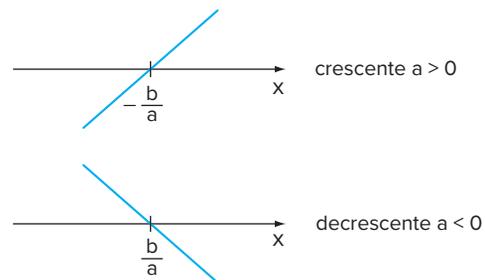
$f(x_1) \quad f(x_2) > 0$ e $x_1 \quad x_2 > 0$

Dividindo as inequações, temos: $\frac{f(x_1) \quad f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$,

mas $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, assim:

$f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2 = a\,(x_1 - x_2)$.

Substituindo na fração: $\frac{a(x_1 \quad x_2)}{(x_1 \quad x_2)} > 0 \therefore a > 0$.

Faça, você, a demonstração para a função decrescente.

Coeficiente angular da reta.

Injetividade da função $f(x) = ax + b$ para $a \neq 0$

O fato de a função ser estritamente crescente (ou decrescente) já confirma a sua injetividade Acompanhe outras demonstrações:

1 Seja $x_1 > x_2 \overset{a>0}{\Rightarrow} ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \therefore f(x_1) > f(x_2)$

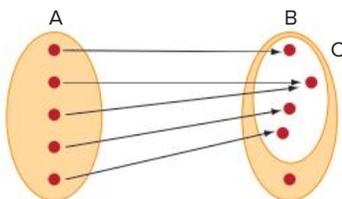
Conclusão: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (a demonstração é análoga para $a < 0$)

2. Considerando

$f(x_1) = f(x_2) \therefore ax_1 + b = ax_2 + b \therefore ax_1 = ax_2 \overset{(a \neq 0)}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

Conclusão: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

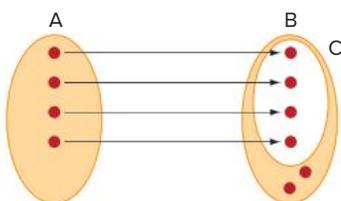
Resumindo

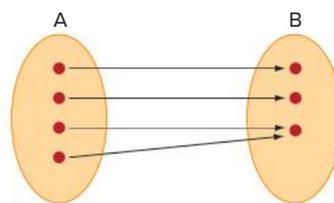
A relação *f* de A em B é chamada de função se todo elemento de A está relacionado com um único elemento de B

Domínio = A

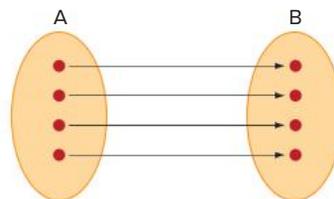
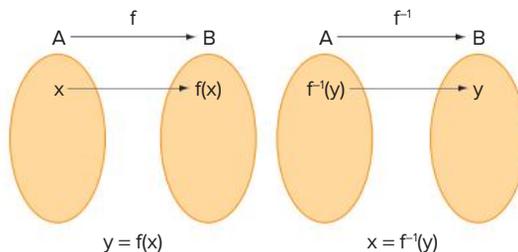
Contradomínio = B

Imagem = C

Classificação das funções

a) Injetora: A função *f* de A em B é uma função injetora se para todos elementos diferentes de A temos imagens diferentes em B

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

b) Sobrejetora: A função *f* de A em B é uma função sobrejetora quando o seu conjunto-imagem é o contradomínio B.

$Im_f = B$

c) Bijetora: A função *f* de A em B é uma função bijetora quando foi injetora e subjetora

Uma função *f* de A em B é inversível se, e somente se, *f* for bijetora.

Quer saber mais?

Site

- Vida e obra de Leibniz
  <www.leibnizbrasil.pro.br/>.

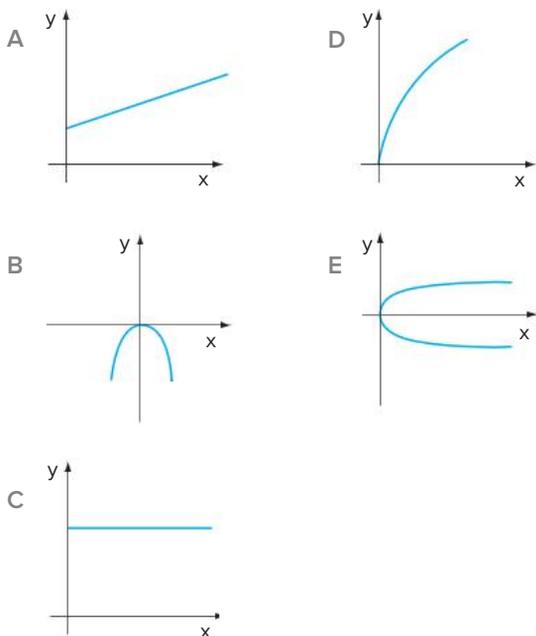
Exercícios complementares

1 Dizemos que uma relação entre dois conjuntos A e B é uma função ou aplicação de A em B quando todo elemento de:

A B é imagem de algum elemento em A.
B B é imagem de um único elemento de A.
C A possui somente uma imagem em B.
D A possui, no mínimo, uma imagem em B.
E A possui somente uma imagem em B e vice-versa.

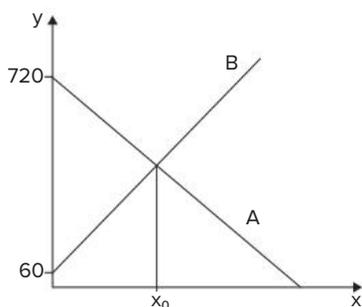
2 Sejam os conjuntos A = {1; 2} e B = {0; 1; 2}, qual das afirmativas a seguir é verdadeira?

A $f(x) = 2x$ é uma função de A em B.
B $f(x) = x + 1$ é uma função de A em B.
C $f(x) = x^2 - 3x + 2$ é uma função de A em B.
D $f(x) = x^2 - x$ é uma função de B em A.
E $f(x) = x - 1$ é uma função de B em A.

3 Qual dos gráficos não representa uma função?

4 **UFRGS** Considerando $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x \le 10\}$, e sendo R a relação em A formada pelos pares (x, y) tais que $y = 2x \quad 1$, o domínio e a imagem dessa relação correspondem, respectivamente, a:

A {0, 1, 2, 3} e {1, 3, 5, 7}
B {1, 2, 3, 4} e {3, 5, 7, 9}
C {0, 1, 2, 3, 4} e {0, 2, 4, 6, 8}
D {1, 2, 3, 4, 5} e {1, 3, 5, 7, 9}
E {1, 2, 3, 4, 5} e {0, 2, 4, 6, 8}

5 Considerando O a origem dos eixos e A e B os pontos onde o gráfico da função $y = \frac{4}{3}x + 4$ intercepta, respectivamente, os eixos das ordenadas e das abscissas, determine a área do triângulo AOB.

6 **Uerj 2014** O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo *y*, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo *x*.

Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico.

7 **Uema 2014** A fim de realizar o pagamento de uma festa de formatura, estabeleceu-se um valor de R$ 800,00 para cada aluno formando e mais um valor adicional por cada convidado.
Considerando que um formando convidou 8 pessoas, tendo despendido o total de R$ 1200,00, determine o valor pago por esse formando por cada convidado

8 **Enem PPL 2019** Em um município foi realizado um levantamento relativo ao número de médicos, obten do-se os dados:

Ano	Médicos
1980	137
1985	162
1995	212
2010	287

Tendo em vista a crescente demanda por atendimento médico na rede de saúde pública, pretende-se promover a expansão, a longo prazo, do número de médicos desse município, seguindo o comportamento de crescimento linear no período observado no quadro
Qual a previsão do número de médicos nesse munic í pio para o ano 2040?

A 387
B 424
C 437
D 574
E 711

9 **Uece 2019** Carlos é vendedor em uma pequena empresa comercial. Seu salário mensal é a soma de uma parte fixa com uma parte variável. A parte variável corresponde a 2% do valor alcançado pelas vendas no mês No mês de abril, as vendas de Carlos tota lizaram R$ 9.450,00, o que lhe rendeu um salário de R$ 1.179,00. Se o salário de Carlos em maio foi de R$ 1.215,00, então, o total de suas vendas neste mês ficou entre

A R$ 11 300,00 e R$ 11.340,00
B R$ 11 200,00 e R$ 11 260,00
C R$ 11.260,00 e R$ 11.300,00
D R$ 11.180,00 e R$ 11.220,00

10 **Enem 2019** Uma empresa tem diversos funcionários Um deles é o gerente, que recebe R$ 1000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.
Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

A $Y = 80X + 920$.
B $Y = 80X + 1000$.
C $Y = 80X + 1080$.
D $Y = 160X + 840$.
E $Y = 160X + 1000$

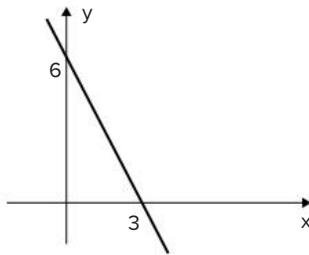
11 **Unicamp** Para transformar graus Fahrenheit em graus Celsius usa-se a fórmula:

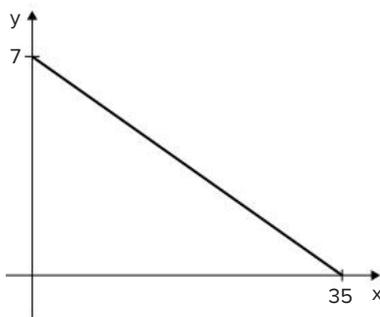
$$C = \frac{5}{9}(F \quad 32)$$

em que F é o número de graus Fahrenheit e C é o número de graus Celsius.

a) Transforme 35 °C em graus Fahrenheit.

b) Qual a temperatura (em graus centígrados) em que o número de graus Fahrenheit é o dobro do número de graus centígrados?

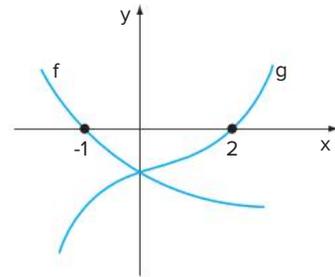
12 **EEAR 2019** A função que corresponde ao gráfico a seguir é $f(x) = ax + b$, em que o valor de *a* é

A 3
B 2
C 2
D 1

13 **UCS 2015** No gráfico abaixo, está representada a relação que estabelece qual deve ser o preço *y*, em reais, para que sejam vendidas *x* unidades de determinado produto por dia.

Qual deve ser o preço, em reais, para que sejam vendidas 28 unidades por dia?

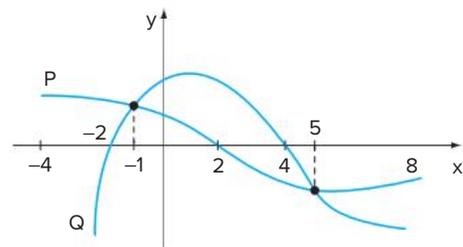
A 2,40
B 2,00
C 1,80
D 1,60
E 1,40

14 Sejam os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x \quad 3}{x+5} \geq 0\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (x \quad 3)\cdot(x+5) \geq 0\right\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 \geq 0$ e $x + 5 \geq 0\}$, pode-se afirmar que:

A $A = B = C$
B $A \subset B \subset C$
C $A \subset C \subset B$
D $C \subset A \subset B$
E $C \subset A = B$

15 Na figura a seguir, temos os esboços dos gráficos de duas funções *f* e *g*.

O conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \quad g(x) < 0\}$ é dado por:

A $x > 0$ ou $x < \quad 1$
B $-1 < x < 0$
C $0 < x < 2$
D $\quad 1 < x < 2$
E $x < -1$ ou $x > 2$

16 **Fuvest** Os gráficos de duas funções polinomiais P e Q estão representados na figura seguinte.

Então, no intervalo $[\quad 4; 8]$, $P(x) \quad Q(x) < 0$ para:

A $-2 < x < 4$
B $-2 < x < -1$ ou $5 < x < 8$
C $-4 \leq x < -2$ ou $2 < x < 4$
D $-4 \leq x < -2$ ou $5 < x \leq 8$
E $-1 < x < 5$

17 **Ulbra 2016** Uma empresa gasta R\$ 2,60 para produzir uma unidade de um produto. Além disso, possui uma despesa fixa de R\$ 8 000,00 independente do número de unidades produzidas. Sabendo que o preço de venda de cada unidade é R\$ 5,10, quantas unidades, no mínimo, a empresa deve vender para começar a obter lucro?

A 3 200
B 3 077
C 1 569
D 1 039
E 1 100

18 Determine a solução da inequação

$$-1 < \frac{2 - 3x}{x + 3} < 1$$

19 **UFPR 2017** Responda às seguintes perguntas a respeito da função $g(x) = \dfrac{3x \quad 4}{1 \quad 4x}$:

a) Qual é o domínio de *g*?

b) Qual é a inversa de *g*?

20 **ESPM 2018** Em linguagem de computação, a expressão $x = x + 2$ significa que o novo valor de *x* será igual ao valor anterior de *x*, acrescido de 2 unidades Por exemplo, se $x = 5$, a expressão $x = x + 2$ faz com que *x* passe a valer 7 Se repetirmos essa expressão, o valor de *x* passa a ser 9. Considere a sequência de operações:

$$x = x + 3 \Rightarrow y = 2x \quad 1 \Rightarrow x = x + y \Rightarrow y = x + 2y$$

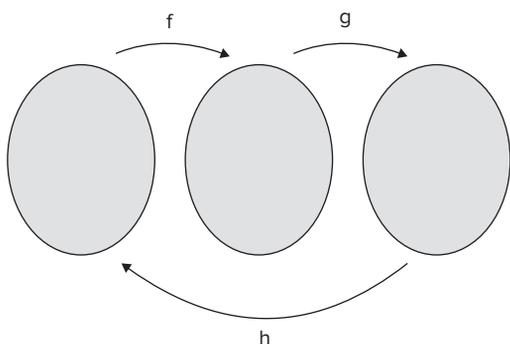
Se o valor final de *y* é igual a 53, podemos afirmar que o valor inicial de *x* era:

A par
B primo
C maior que 6.
D múltiplo de 3.
E divisor de 124.

21 Sejam as funções reais $f(x) = 1 \quad x$; $g(x) = 4x + 3$ e $h(x) = 2x \quad 5$, obtenha a lei que define $h \circ (g \circ f)$.

22 Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 7$ e $f \circ g(x) = x^2 - 2x + 2$, determine a lei da função *g*.

23 Sejam as funções reais $g(x) = 2x - 1$ e $f \circ g(x) = 2x^2 - 4x + 3$, determine a lei da função *f*.

24 **ESPM 2018** Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3 - x$, a função $h(x)$ representada no diagrama abaixo é:

A $h(x) = \dfrac{2 \quad x}{2}$

B $h(x) = \dfrac{2 - x}{x}$

C $h(x) = \dfrac{x}{2 \quad x}$

D $h(x) = \dfrac{x}{x \quad 2}$

E $h(x) = \dfrac{x - 2}{2x}$

25 Com relação à função $f(x) = \dfrac{x + 1}{x \quad 1}$, definida para $x \neq 1$, podemos afirmar que:

A $f(x) = 0$ não tem soluções reais.
B $f(x + 1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$
C $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$
D $\dfrac{1}{f(x)} = f(\quad x), \forall x \in \mathbb{R} - \{\quad 1; 1\}$
E $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

26 Sendo $x \geq 4$, o conjunto-imagem da função $y = \sqrt{x} + \sqrt{x - 4}$ é dado por:

A $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
B $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\}$
C $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$
D $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$
E n d.a.

27 **Unicamp** Um copo cheio de água pesa 385 g; com $\dfrac{2}{3}$ da água pesa 310 g. Pergunta-se:

a) Qual é o peso do copo vazio?

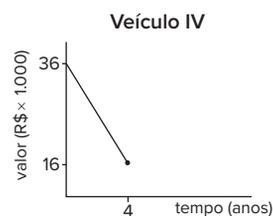
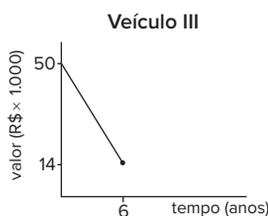
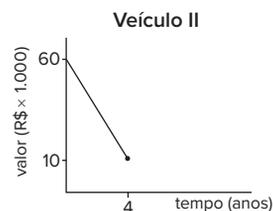
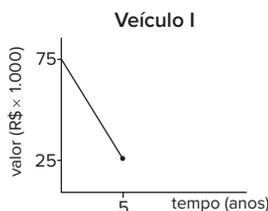
b) Qual é o peso do copo com $\dfrac{3}{5}$ da água?

28 **ETF-RJ** Para que as equações:

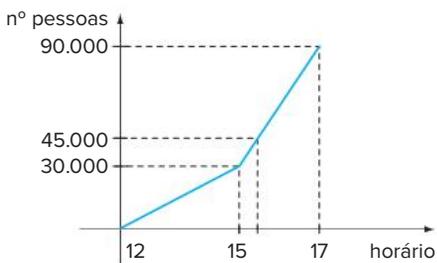
$$(m - 2)x - (m - 1) = 0 \text{ e } 2x - 4 = 0$$

sejam equivalentes, devemos ter *m* igual a:

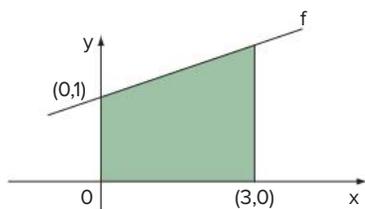
A 2
B 3
C 4
D 5
E $\dfrac{3}{2}$

29 **Uerj 2018** Os veículos para transporte de passageiros em determinado município têm vida útil que varia entre 4 e 6 anos, dependendo do tipo de veículo. Nos gráficos está representada a desvalorização de quatro desses veículos ao longo dos anos, a partir de sua compra na fábrica.

Com base nos gráficos, o veículo que mais desvalorizou por ano foi:

A I
B II
C III
D IV

30 **Uerj** Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90 000 torcedores. Três portões foram abertos às 12 horas e até as 15 horas entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir desse horário, abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou.
Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico a seguir.

Quando o número de torcedores atingiu 45 000, o relógio estava marcando 15 horas e:

A 20 min.
B 30 min.
C 40 min.
D 50 min.

31 **Unirio** Considere a figura a seguir, em que um dos lados do trapézio retângulo se encontra apoiado sobre o gráfico de uma função *f*. Sabendo-se que a área da região sombreada é 9 cm^2, a lei que define *f* é:

A $y = \left(\frac{7x}{6}\right) - 2$
B $y = \left(\frac{3x}{4}\right) - 1$
C $y = \left(\frac{2x}{5}\right) + 1$
D $y = \left(\frac{5x}{2}\right) - 1$
E $y = \left(\frac{4x}{3}\right) + 1$

32 **UEG 2018** No centro de uma cidade, há três estacionamentos que cobram da seguinte maneira:

Estacionamento A	Estacionamento B	Estacionamento C
R$ 5,00 pela primeira hora	R$ 4,00 por hora	R$ 6,00 pela primeira hora
R$ 3,00 por cada hora subsequente		R$ 2,00 por cada hora subsequente

Será mais vantajoso, financeiramente, parar

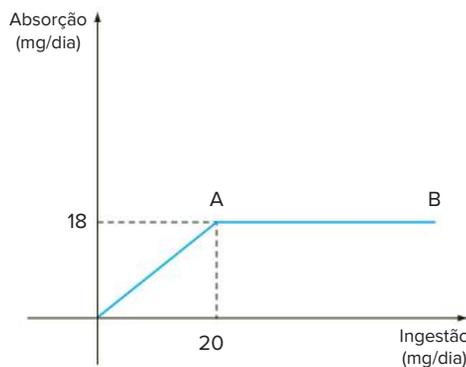
A no estacionamento A, desde que o automóvel fique estacionado por quatro horas.
B no estacionamento B, desde que o automóvel fique estacionado por três horas.
C em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.
D em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por duas horas.
E no estacionamento C, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.

33 **Uerj** Para calcular $\frac{3}{2}\quad\frac{12}{5}$, Paulo subtraiu os numerado res e dividiu o resultado por 10 obtendo:

$$\frac{3}{2} - \frac{12}{5} = \frac{(3\quad 12)}{10} = -0{,}9$$

a) Determine de forma correta o valor da expressão $\frac{3}{2}\quad\frac{12}{5}$.

b) Considerando que Paulo tenha calculado com base na fórmula $\left(\frac{x}{2}\right)\quad\left(\frac{y}{5}\right) = \frac{(x-y)}{10}$, em que *x* e *y* são reais, identifique o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano cartesiano que tornam essa igualdade verdadeira.
Esboce, também, o gráfico cartesiano.

34 **UFMG** Observe o gráfico, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas

Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia, e sua absorção pelo organismo, também em mg/dia.
A única afirmativa falsa relativa ao gráfico é:

A Para ingestões de até 20 mg/dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.
B A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.
C Para ingestões acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.
D A absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/dia é igual à absorção resultante da inges tão de 20 mg/dia

35 **UEL** Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, \text{ se } x \leq 0 \\ 1, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ x, \text{ se } x > 1 \end{cases},$$

O conjunto imagem de f é:

A]–∞, 0]

B [1, +∞[

C]0, 1[

D [0, +∞[

E $\mathbb{R}$

36 **Fuvest** O sistema $\begin{cases} x+(c+1)y=0 \\ cx+y=-1 \end{cases}$, em que $c \neq 0$, admite uma solução (x; y) com $x = 1$ Então, o valor de c é:

A 3

B 2

C –1

D 1

E 2

37 Se $a < -2$, os valores de x tais que $\frac{a}{2} \cdot (x - a) < -(x + 2)$ são aqueles que satisfazem:

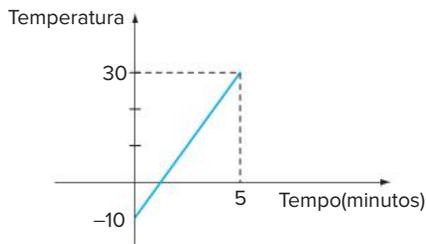
A $x < a - 2$

B $x < \quad 2a$

C $x > 2a$

D $x > a \quad 2$

E $a \quad 2 < x < 2 \quad a$

38 **Cesgranrio** Uma barra de ferro com temperatura inicial de –10 °C foi aquecida até 30 °C. O gráfico a seguir representa a variação da temperatura da barra em função do tempo gasto nessa experiência. Calcule em quanto tempo, após o início da experiência, a temperatura da barra atingiu 0 °C.

A 1 min.

B 1 min. e 5 s.

C 1 min. e 10 s.

D 1 min. e 15 s.

E 1 min e 20 s

39 **Fuvest** A função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mer cadoria é:

A $f(x) = x - 3$

B $f(x) = 0{,}97x$

C $f(x) = 1{,}3x$

D $f(x) = -3x$

E $f(x) = 1{,}03x$

40 **UEL** Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = (k^2 - 4)x + 3k$, na qual k é uma constante real, se f é decrescente e seu gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto (1; 0), então um outro ponto do gráfico de f é:

A (–3; 6)

B (–2; 9)

C (–1; 1)

D (2; 3)

E (0; 6)

41 **Fuvest** Determine todos os valores de m para os quais a equação: $\frac{mx}{4} \quad \frac{(x-2)}{m} = 1$

a) admite uma única solução.

b) não admite solução

c) admite infinitas soluções

42 **Fuvest** A moeda de um país é o "liberal", indicado por λ. O imposto de renda λ é uma função contínua da renda R, calculada da seguinte maneira:

I. Se R ≤ 24 000 λ, o contribuinte está isento do imposto.

II. Se R ≥ 24 000 λ, calcula-se 15% de R, e do valor obtido subtrai se um valor fixo P, obtendo-se o imposto a pagar I.

Determine o valor fixo P.

A 1200 λ

B 2400 λ

C 3600 λ

D 6000 λ

E 24000 λ

43 **UFPE** Seja A um conjunto com 3 elementos e B um conjunto com 5 elementos, quantas funções injetoras de A em B existem?

44 **Fuvest** Seja a função $f(x) = x^2 \cdot (x^2 - 1) \cdot (x - 2)$, fazer o esboço da função $f(x - 2)$.

45 Prove que a função $f(x) = \sqrt{2^{x^2} \quad 1}$ não é injetora.

46 Seja $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ uma função tal que $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, determine a expressão de f(x).

47 Determine a função inversa de $f(x) = \begin{cases} 2x+3; x \geq 2 \\ 3x+1; x < 2 \end{cases}$ e faça o esboço dos gráficos de f e $f^{\quad 1}$.

48 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) + 2 \cdot f(6 - x) = x$. Determine f(1).

49 Sejam f e g as funções reais definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x \geq 3;\ x \quad 2 \\ 2x-3;\ x<2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = 2x+3,$$

determine as regras das funções $f \circ g$ e $g \circ f$

FRENTE 1

CAPÍTULO

3

Função do 2º grau

Galileu Galilei, matemático, físico e astrônomo italiano da Renascença, é chamado de pai do método científico. A ciência deixou de ser uma discussão filosófica e passou a ser fundamentada em experimentos.

Galileu interessou-se pelos problemas de artilharia e demonstrou que a trajetória descrita pelos projéteis descrevia uma curva chamada parábola.

A função do 2º grau (função polinomial do 2º grau)

Uma função é do 2º grau quando for uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$.

A parábola é o gráfico referente a uma função polinomial do 2º grau, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$. A propriedade geométrica dos pontos da parábola é responsável por suas inúmeras aplicações práticas. Observe algumas delas:

PRATYA CHUTIPATTARASAKUL/123RF.COM

Fig 1 Antena parabólica com receptor no foco principal

REPRODUÇÃO

Fig. 2 Espelhos parabólicos em usinas solares

Raízes da função do 2º grau (zeros da função)

Dada uma função f(x) qualquer, denominam-se raízes dessa função todos os valores de *x*, tal que $f(x) = 0$.

O problema do cálculo das raízes de uma função do 2º grau remonta há mais de 4.000 anos. No texto complementar deste capítulo, há um pequeno histórico desse fascinante capítulo da Matemática.

Mas vamos resolver algumas equações do 2º grau aparentemente sem a utilização de fórmulas resolutivas.

O método consiste na reconstrução de um quadrado perfeito.

Exercícios resolvidos

1 Resolva:

$x^2 - 6x + 8 = 0$

Resolução:

Transformado 8 em 9 – 1, temos:

$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{\text{quadrado perfeito}} - 1 = 0 \therefore (x - 3)^2 - 1 = 0 \therefore (x - 3)^2 = 1$, logo:

$x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$ ou $x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$

As raízes reais são $S = \{2; 4\}$

2 Resolva:

$x^2 + 2x + 4 = 0$

Resolução:

Transformando 4 em 1 + 3, temos:

$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{\text{quadrado perfeito}} + 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = -3$

Não existem números reais que elevados ao quadrado resultam em –3. Logo: $S = \varnothing$.

3 Resolva:

$x^2 \quad 4x + 4 = 0$

Resolução:

A própria equação é um quadrado perfeito, logo

$(x \quad 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$; $S = \{2\}$.

Esses exemplos numéricos nos auxiliarão a compreender a construção da fórmula resolutiva chamada de **fórmula de Bhaskara**.

Considere $ax^2 + bx + c = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, multiplicando por 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

e forme um quadrado perfeito adicionando b^2 nos dois membros:

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{\text{quadrado perfeito}} + 4ac = b^2 \therefore$$

$$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2 \therefore (2ax + b)^2 = \boxed{b^2 - 4ac}$$

Como a expressão $(b^2 - 4ac)$ é o resultado de um quadrado perfeito, de acordo com os exemplos apresentados, ele vai **discriminar** a natureza das raízes Por isso, merece um nome especial, o **discriminante**, representado pela letra grega Δ (delta)

Vamos continuar os cálculos:

$$(2ax + b)^2 = \Delta \therefore 2ax + b = \sqrt{\Delta} \therefore$$

$$\therefore x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou}$$

$$2ax + b = -\sqrt{\Delta} \therefore x = \frac{-b \quad \sqrt{\Delta}}{2a} \therefore x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sendo: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Natureza das raízes

A fórmula de Bhaskara para o cálculo das raízes depende do valor do Δ; observe:

> **! Atenção**
>
> - $\Delta > 0$, teremos duas raízes reais e distintas:
>
> $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
>
> - $\Delta = 0$, teremos duas raízes reais e iguais:
>
> $$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$
>
> - $\Delta < 0$, teremos duas raízes não reais (imaginárias).

Relações entre coeficientes e raízes

Em uma equação do 2º grau, é possível obter a soma e o produto das raízes (de qualquer natureza) sem resolver a equação.

Dependendo dos valores da soma e produto, podemos avaliar as raízes mentalmente.

Observe os resultados:

1. Soma das raízes (s)

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b \quad \sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{\ b + \sqrt{\Delta} \quad b \quad \sqrt{\Delta}}{2a} \therefore$$

$$\therefore\ x_1 + x_2 = \frac{\ 2b}{2a} \quad \therefore\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. Produto das raízes (p)

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b \quad \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(b^2) \quad (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 \quad \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \therefore\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Exercícios resolvidos

4 Resolva a equação $x^2 - 15x + 44 = 0$ por soma e produto.

Resolução:

$$s = -\frac{b}{a} = -\frac{(\ \ 15)}{1} \therefore s = 15$$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{44}{1} = 44 \therefore p = 44$$

As raízes da equação são dois números tais que a soma é 15 e o produto 44. Mentalmente, 4 e 11

S = {4; 11}

5 Dada a equação $x^2 + 2x + 1 = 0$, calcule, sem resolver a equação de raízes x_1 e x_2, o valor de:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ b) $x_1^2 + x_2^2$ c) $x_1^3 + x_2^3$

Resolução:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{s}{p}$, da equação, tiramos:

$$s = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2 \text{ e } p = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

assim: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{s}{p} = \frac{\ 2}{1} = -2$

b) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 \quad 2x_1x_2 =$

$= s^2 \quad 2p = (\ 2)^2 \quad 2(1) \quad\ 4 \quad 2 \quad\ 2$

c) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 \quad 3x_1x_2(x_1 + x_2) =$

$= s^3 \quad 3ps = (\ \ 2)^3 \quad 3(1)(\ \ 2) = \quad 8 + 6 = \quad 2$

> **! Atenção**
>
> A fórmula de Bhaskara é um erro consagrado pelo uso aqui no Brasil O texto complementar vai elucidar esse fato.
>
> Uma equação do 2º grau possui raízes reais se, e somente se, $\Delta \geq 0$
>
> Uma função do 2º grau é quadrado perfeito se, e somente se, $\Delta = 0$.
>
> Lembre-se!
>
> Toda expressão algébrica que pode ser reduzida à forma $(x + y)^2$ é chamada de quadrado perfeito
>
> $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \therefore a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
>
> $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
>
> $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

Formação de uma equação

Vamos resolver agora o problema inverso, ou seja, dadas as raízes, monte a equação. Observe a demonstração da fórmula:

$ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$; dividir a equação por a, assim:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \therefore x^2 \quad \left(\quad \frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

Observe: $\frac{b}{a} = s$ e $\frac{c}{a} = p$

logo: $x^2 - sx + p = 0$

Exercício resolvido

6 Forme uma equação do 2º grau cujas raízes são –6 e 4.

Resolução:

soma: $s = \quad 6 + 4 = \quad 2$

produto: $p = (\ \ 6)\ (4) = \quad 24$; substituindo os valores na fórmula, temos:

$x^2 - (\ \ 2)x \quad 24 = 0 \therefore x^2 + 2x \quad 24 = 0$

> **! Atenção**
>
> Cuidado que $x^2 + 2x - 24 = 0$ não é a única equação que possui raízes –6 e 4 Por exemplo, $2x^2 + 4x \quad 48 = 0$ também possui raízes 6 e 4. Assim, se multiplicamos a equação por um número $K \in \mathbb{R}^*$, teremos infinitas equações com raízes –6 e 4, $K(x^2 + 2x \quad 24) = 0$

Fatoração do trinômio do 2º grau

Vamos transformar o trinômio do 2º grau em um produto de dois fatores do 1º grau

Observe:

$$ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0\ \therefore\ a\left[x^2 \quad \left(\ \frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] = 0$$

Como $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$ e $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$, assim:

$a[x^2 \quad (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = 0\ \therefore$

$\therefore\ a[x^2 \quad x_1x \quad x_2x + x_1x_2] = 0\ \therefore$

$\therefore\ a[x(x \quad x_1) \quad x_2(x \quad x_1)] = 0\ \therefore$

$\therefore\ a \quad (x \quad x_1)(x \quad x_2) = 0\ \therefore$

$\therefore\ ax^2 + bx + c = a \quad (x \quad x_1) \quad (x \quad x_2)$

Exercício resolvido

7 Fatore a expressão $2x^2 \quad 5x + 2 = 0$ em um produto de dois fatores do 1º grau

Resolução:

$$2x^2 \quad 5x + 2 = 0\ \therefore\ x = \frac{5 \pm \sqrt{(\ 5)^2 \cdot \quad 4\ 2\ 2}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}\ \therefore\ x_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \text{ ou } x_2 = \frac{5 \quad 3}{4} = \frac{1}{2}$$

Substituindo na expressão, temos:

$$2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Forma canônica do 2º grau

A forma canônica do 2º grau é uma outra expressão de representação da função do 2º grau que é muito conveniente para a demonstração de certas propriedades.

Observe a sequência das passagens até a forma canônica.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{quadrado perfeito}} \quad \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 \quad 4ac}{4a^2}\right)\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right] \quad \frac{\Delta}{4a}$$

Assim:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Gráfico da função do 2º grau

A função do 2º grau tem como gráfico a curva chamada **parábola**. Nos capítulos de geometria analítica, vamos demonstrar e explicar melhor essa curva. Para uma ideia inicial, leia mais tarde o texto complementar.

Propriedades da parábola

P1 A parábola corta o eixo *y* no ponto (0; c); pois:
$f(x) = ax^2 + bx + c$ e $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c\ \therefore\ f(0) = c$

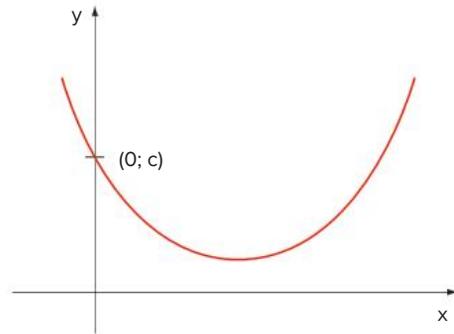



Fig 3 Termo independente (c)

P2 A parábola pode "cortar" o eixo das abscissas em 2 pontos, tangenciá lo em 1 ponto ou não cortar o eixo. Lembramos que raiz de uma função é o valor de *x* que anula o *y*; logo, todas as raízes reais de qualquer função estão nos pontos de cruzamento do gráfico com o eixo *x*.

De acordo com a **natureza das raízes**, podemos concluir:

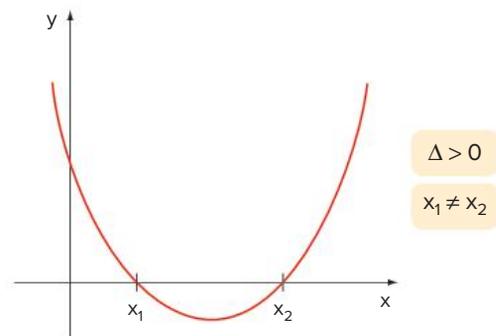



Fig. 4 Parábola cortando o eixo.

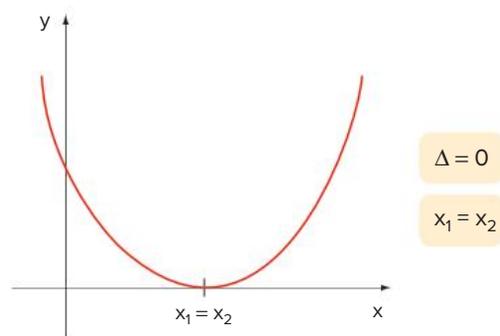



Fig. 5 Parábola tangenciando o eixo.

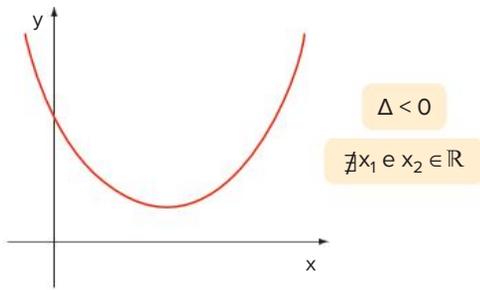



Fig. 6 Parábola com raízes imaginárias.

P3 A parábola é uma curva simétrica; observe o eixo de simetria e sua localização:

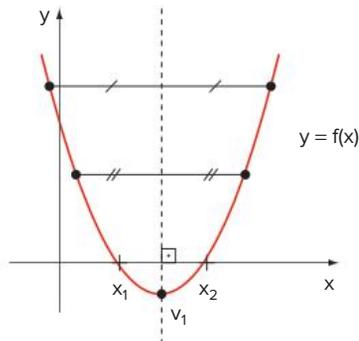



Fig 7 Eixo de simetria paralelo ao eixo *y*.

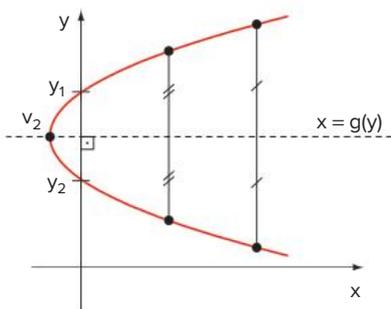



Fig. 8 Eixo de simetria paralelo ao eixo *x*.

Os pontos v_1 e v_2 são os únicos do gráfico que pertencem ao eixo de simetria Esses pontos são denominados **vértices da parábola**.

P4 Determinação das coordenadas do vértice da parábola $(x_v; y_v)$.

Para o cálculo do vértice da parábola, vamos utilizar a propriedade da simetria da parábola.

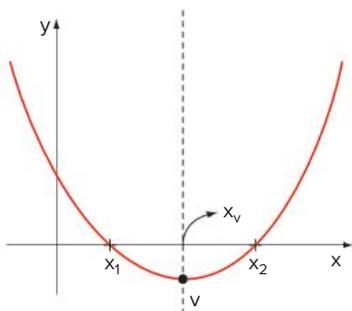



Fig. 9 x_v é o ponto médio do segmento x_1x_2.

A abscissa do vértice é o ponto médio do segmento que une as raízes. O segmento $x_vx_1 = x_2x_v$

$$\therefore x_v \quad x_1 = x_2 \quad x_v \therefore 2x_v = \underbrace{x_1 + x_2}_{\text{soma das raízes}} \therefore$$

$$\therefore 2x_v = \therefore \frac{b}{a} \qquad x_v = \quad \frac{b}{2a}$$

Para obter o y_v, substitua o x_v na função:

$$f(x_v) = y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$$

$$= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{(b^2 \quad 4ac)}{4a} = \quad \frac{\Delta}{4a}$$

Atenção

As coordenadas do vértice de uma função

$f(x) = ax^2 + bx + c;\ a \neq 0$ são $v = \left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$

P5 O coeficiente a determina a orientação da concavidade da parábola.

A demonstração da propriedade requer o uso da forma canônica do 2º grau.

1º caso: a > 0

Para ∀ x ∈ ℝ, podemos escrever, sem perda de generali dade, que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$; assim, $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, subtraindo os dois membros $\frac{\Delta}{4a}$, temos:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \frac{\Delta}{4a} \geq \quad \frac{\Delta}{4a}$$

Observe que o lado esquerdo é a forma canônica do 2º grau, portanto $y \geq \quad \frac{\Delta}{4a}$.

Como *x* é um real qualquer, sempre teremos o seu *y* maior ou igual à ordenada do vértice. Isso implica que a concavidade está para cima

2º caso: a < 0

Vamos seguir exatamente o procedimento do 1º caso; observe: ∀ x ∈ ℝ, e temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \therefore a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$$

(pois a é negativo), subtraindo dos dois membros $\frac{\Delta}{4a}$, construímos a forma canônica do 2º grau, que é o próprio *y*; observe:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \frac{\Delta}{4a} \leq \quad \frac{\Delta}{4a} \therefore \quad y \leq \quad \frac{\Delta}{4a}$$

Isso prova que todas as ordenadas são menores ou iguais a $\frac{\Delta}{4a}$. Isso implica que a concavidade está para baixo.

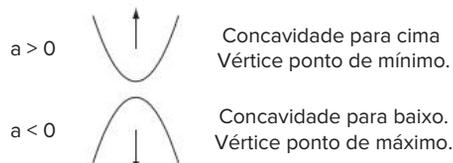



Fig. 10 Concavidade da parábola.

Esses resultados mostram que a ordenada do ponto de máximo ou de mínimo é $-\frac{\Delta}{4a}$. Assim, a abscissa do vértice pode ser determinada algebricamente. Pela forma canônica, temos:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}\ \therefore\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0\ \therefore\ x=\frac{-b}{2a}$$

Confirmamos assim as coordenadas do vértice da parábola:

$$v=\left(\frac{b}{2a};\ \frac{\Delta}{4a}\right)$$

Exercícios resolvidos

8 Considere a função *f*, de variável real, dada por $f(x) = \ x^2 + 12x \ \ 20$.

Determine o conjunto-imagem e seu valor máximo ou mínimo.

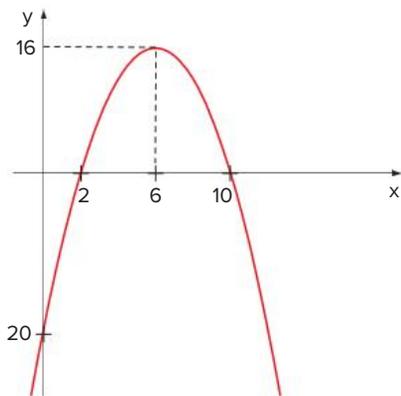
Resolução:

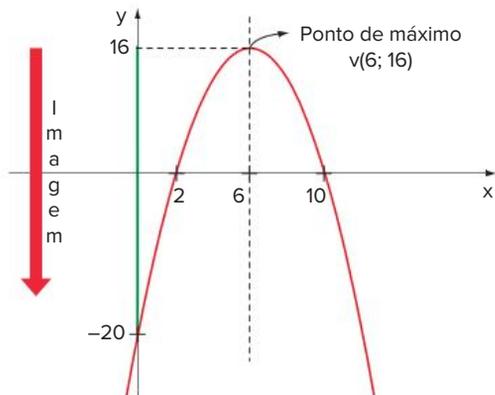
Vamos fazer uma solução completa.

Raízes da função:

$x^2 + 12x \ \ 20 = 0 \therefore x^2 \ \ 12x + 20 = 0$

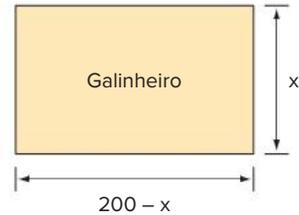
$\begin{cases} s = 12 \\ p = 20 \end{cases}$ raízes 10 e 2

a = 1, concavidade para baixo, vértice: ponto de máximo, observe:

$x_v = \ \frac{b}{2a} = 6;\ y_v = -(6)^2 + 12(6) - 20 = 16$

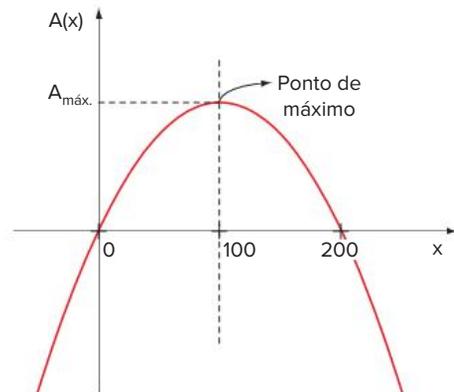
Conjunto-imagem:

$Im_f =]-\infty;16]$

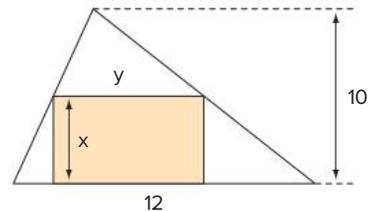
9 Um sitiante dispõe de 400 m de cerca de arame e gostaria de montar o maior galinheiro possível, de forma retangular. Como ele deve proceder?

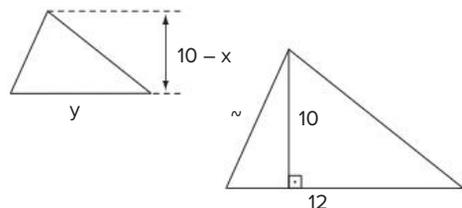
Resolução:

O perímetro do galinheiro retangular é de 400 m Chamando de *x* a largura, o comprimento deve ser de 200 x Observe:

Vamos analisar a função da área do galinheiro

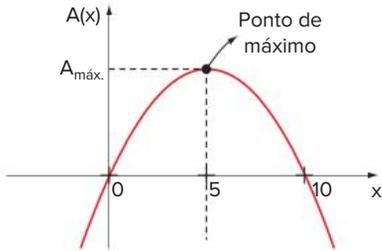
Área = (base) (altura) ∴ A(x) = (200 x) x

∴ $A(x) = \ x^2 + 200x$

A função admite ponto de máximo quando x = 100 m. O retângulo se transformará em um quadrado de área $(100\ m)^2 = 10\,000\ m^2$.

10 Considere um triângulo acutângulo de base 12 m e altura 10 m e um retângulo inscrito conforme a figura a seguir Determine o retângulo de área máxima

Resolução:

A expressão da área do retângulo é A = xy (temos uma função de duas variáveis) Vamos encontrar uma relação entre *x* e *y* para que possamos criar uma função da área com uma única variável

$$\frac{y}{12} = \frac{10 - x}{10} \therefore 10y = 120 - 12x \therefore$$

$$\therefore 5y = 60 \quad 6x \quad y = 12 \quad \frac{6}{5}x$$

Subtraindo na expressão da área, temos:

Analisando o gráfico dessa figura, a área máxima ocorre para $x = 5$ m e $y = 12 \quad 6 \cdot \frac{5}{5} = 6$ m

O retângulo tem dimensões de 5 m e 6 m e área máxima de 30 m^2

! Atenção

Você pode generalizar o exemplo 10 para um triângulo de base *b* e altura *h*.

Seguindo os mesmos passos, você encontrará as dimensões do retângulo de área máxima valendo $\frac{b}{2}$ e $\frac{h}{2}$

Compare com o resultado do exemplo.

11 Um ônibus de 40 lugares vai fazer uma viagem e, se viajar lotado, cada passagem custa R$ 20,00. Se o ônibus viajar com lugares vazios, cada passageiro paga R$ 1,00 para cada assento vazio Determine a função da receita da viagem em função do número de assentos vazios Determine a situação da receita máxima

Resolução:

O preço de cada passagem é: $p = 20 + x$, *x* é o número de assentos vazios.

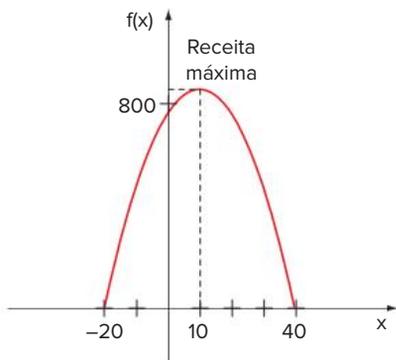
A receita será dada por $p(40 \quad x)$, assim

$f(x) = (x + 20) \cdot (40 - x) \therefore f(x) = 40x - x^2 + 800 - 20x \therefore$

$\therefore f(x) = \quad x^2 + 20x + 800.$

Esboço do gráfico:

Pelo gráfico, obtemos que a receita máxima ocorre quando existem 10 assentos vagos, assim

$$f(10) = \quad 100 + 200 + 800 = 900.$$

Análise do sinal

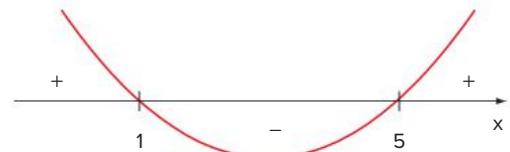
A análise do sinal de uma função do 2º grau é muito importante para resolver inequações em geral. Ao analisarmos o sinal de uma função, devemos saber os valores de *x* para os quais $y > 0$; $y = 0$ e $y < 0$.

Exercícios resolvidos

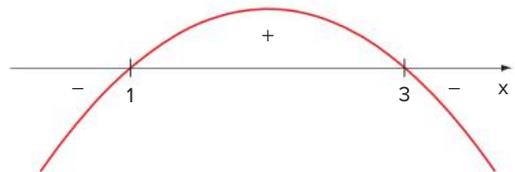
12 $y = x^2 \quad 6x + 5$

Resolução:

É conveniente fazer um esboço do gráfico.

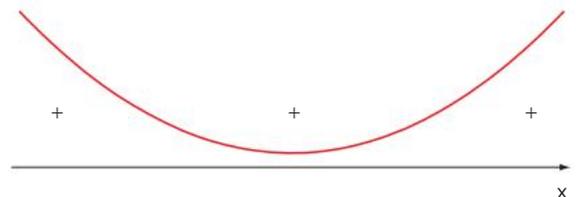
Raízes: 1 e 5 concavidade: $a = 1 > 0$ para cima, então:

13 $y = \quad x^2 + 2x + 3$

Resolução:

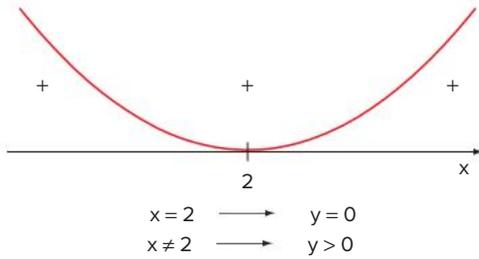
Raízes: 3 e 1 concavidade: $a = \quad 1 < 0$ para baixo, então:

14 $y = x^2 + 2x + 3$

Resolução:

Raízes: $\Delta = (2)^2 \quad 4 \quad 1 \quad 3 = \quad 8 < 0$, raízes imaginárias con cavidade: $a = 1 > 0$ para cima, então:

FRENTE 1

15 $y = x^2 - 4x + 4$

Resolução:

$\Delta = (\;\; 4)2 \;\;\; 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$; 2 raízes reais e iguais.
concavidade: $a = 1 > 0$, para cima, então:

16 Resolva as inequações:

a) $(x^2 - 5x + 6) \cdot (-x^2 + 2x + 3) \geq 0$

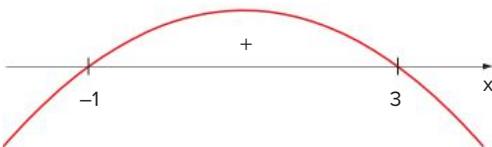
b) $\dfrac{(x^2 + 2x + 3) \cdot (x^2 \;\;\; 6x + 8)}{(x - 1) \cdot (x^2 - 4x + 4)} \leq 0$

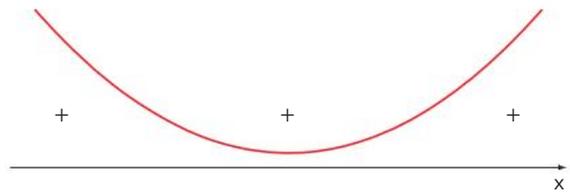
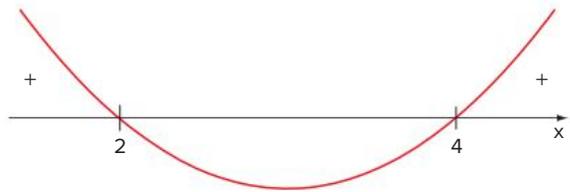
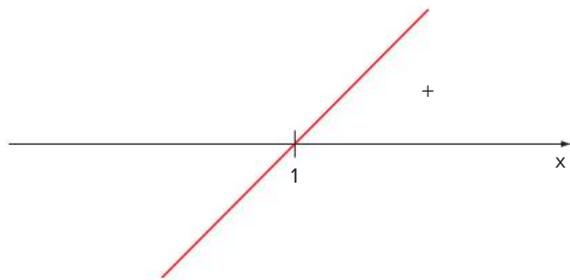
Resolução:

a) Trata-se de um problema de análise de sinal de uma função cujas funções componentes são conhecidas.
Para a sua solução, analise as funções separadamente e depois coloque-as no quadro de sinais ("varal")
$A = (x^2 - 5x + 6)$

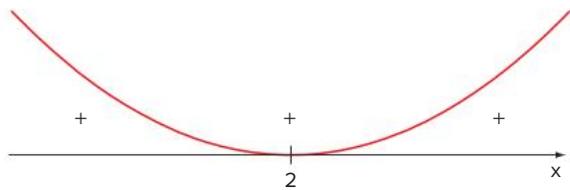
$B = (-x^2 + 2x + 3)$

No varal, temos:

		-1		2		3	
A	+		+	○		○	+
B	−	○	+		+	○	−
A · B	+	○		○		○	

Na última linha, pela regra de sinais do produto, temos a análise de sinal completa da função A B.
Queremos os valores de *x* que tornam $A \cdot B \geq 0$.
$S = [\;\; 1; 2]$

b) Analisando as funções separadamente, temos:
$A = x^2 + 2x + 3$
$\Delta < 0$; $a > 0$

$B = x^2 - 6x + 8$

$C = x \;\;\; 1$

$\Delta = x^2 \;\;\; 4x + 4$
$\Delta = 0$; $a > 0$

No varal, temos:

		1		2		4	
A	+		+		+		+
B	+		+	○		○	+
C	−	○	+		+		+
D	+		+	○	+		+
$\dfrac{A \cdot B}{C \cdot D}$	−	○	+	○	−	●	+

$S =]-\infty; 1[\cup]2; 4]$

Função inversa da função quadrática

A função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$, possui domínio real, e o conjunto-imagem depende do sinal de *a*.

Observe a figura:

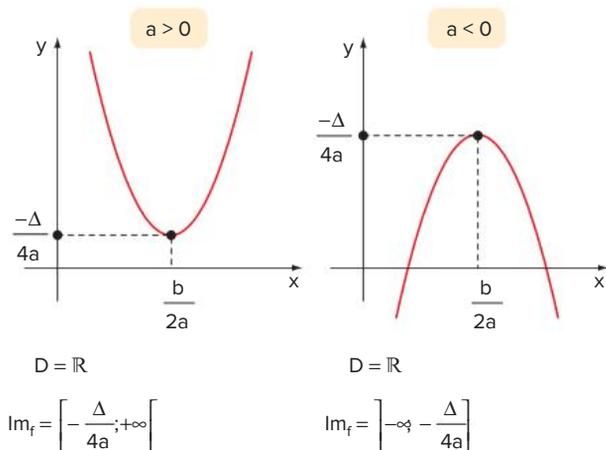



Fig 11 Conjunto-imagem da função quadrática em função da ordenada do vértice.

Estamos analisando o domínio e a imagem da função quadrática para transformá la em uma função inversível Para isso, basta a função ser bijetora.

Para transformá-la em bijetora, vamos dividir o problema em duas partes:

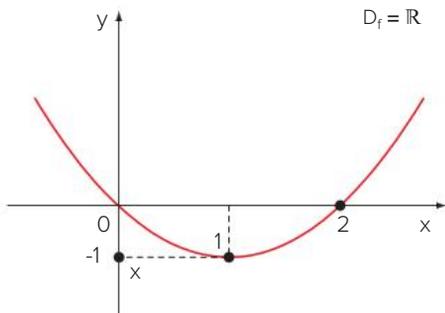
a) *subjetora*: devemos ter como contradomínio o conjunto-imagem, que depende diretamente do sinal de *a*, conforme a figura 10

b) *injetora*: devemos limitar o domínio de *a* da função para ele ser subconjunto de $]-\infty; x_v]$ ou $[x_v; +\infty[$

Vamos analisar os exemplos:

Exercícios resolvidos

17 Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2 \quad 2x$. Fazendo as modificações necessárias, transforme-a em uma função inversível e obtenha a sua inversa.

Resolução:

Assim, f: $[1; +\infty[\to [\ \ 1; +\infty[$ tal que $f(x) = x^2 \quad 2x$ é uma função bijetora, logo podemos obter sua inversa f^{-1}

Temos então: f^{-1}: $[\ \ 1; \infty[\to [1; +\infty[$ e $x = y^2 \quad 2y$, tal que *y* é a expressão algébrica em função de *x* de f^{-1}

$$x = y^2 \quad \therefore 2y = 0 \quad y^2 \therefore \quad 2y \quad x \quad y \quad \frac{2 \pm \sqrt{4+4x}}{2} \therefore$$

$$\therefore y = \frac{2 \pm 2\sqrt{x+1}}{2} \therefore y = 1 \pm \sqrt{x+1}$$

Como $y \geq 1$, escolhemos a expressão $y = 1 + \sqrt{x+1}$, ou seja, $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$.

18 Obter a função inversa da função:

f: $\mathbb{R}_- \to [-1, +\infty[$ tal que $f(x) = x^2 - 1$

Resolução:

Observe que o domínio e o contradomínio foram ajustados para *f* ser inversível. Assim, resta-nos a parte algébrica para obter a função inversa.

a) $f^{\ 1}$: $[-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ (inverter o domínio e o contradomínio)

b) Permutar o *x* pelo *y*

$$x = y^2 \therefore 1 \ = y^2 + x \therefore 1 = y \pm \quad +\sqrt{x \quad 1}$$

Observe que Imf $^{1} = \mathbb{R}$, logo $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$

Assim: f^{-1}: $[-1; +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = \ +\sqrt{x \quad 1}$

19 Dada a função f: $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to \left[\ \frac{1}{4}; +\infty\ \right[$ tal que $f(x) = x^2 - x$, obtenha a expressão e o gráfico de $f^{\ 1}$.

Resolução:

Temos, então:

$$f^{-1}: \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[\ \to \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ e } x = y^2 - y \therefore$$

$$\therefore y^2 \ = y \ \therefore x \ = 0 \quad y \quad \frac{1 \pm \sqrt{1+4x}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x}.$$

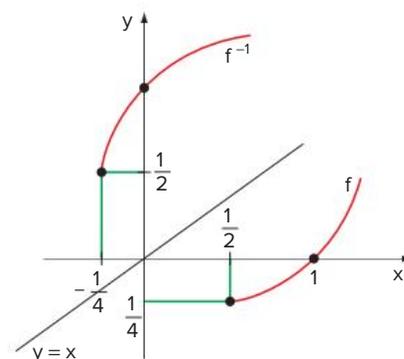
Pelo conjunto-imagem de f^{-1}, temos que

$$y = \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}.$$

Assim, $f^{-1} = \left[-\frac{1}{4};+\infty\right[\ \to \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ tal que

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

O gráfico de f^{-1} é simétrico de *f* em relação à reta $y = x$.

FRENTE 1

Revisando

1 Se r_1 e r_2 são as raízes da equação $2x^2 - 9x + 8 = 0$, determine uma equação cujas raízes são

$$\frac{1}{r_1 + r_2} \text{ e } \left(r_1 \quad r_2\right)^2.$$

2 Se *a* e *b* são raízes da equação $3x^2 - 17x - 14 = 0$, calcule o valor da expressão $\dfrac{2a^2 + 3ab + 2b^2}{4ab^2 + 4a^2b}$.

3 Simplificar a expressão $\dfrac{2x^2 \quad 8x \quad 90}{3x^2 + 36x + 105}$

4 O vértice da parábola $f(x) = ax^2 - 10x + c$ é o ponto de coordenadas $(5; -9)$. Determine o valor de $a + c$.

5 Determine as condições para que o trinômio $y = ax^2 + bx + c$ admita um valor máximo e tenha raízes de sinais contrários.

6 Considere a função $f: \mathbb{R}_ \rightarrow [\ \ 1; +\infty[$ e $f(x) = x^2 \quad 1$ Prove que *f* é bijetora e determine f^{-1}

Exercícios propostos

1 Dada a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 5x + 6$, determine o valor de *x* de modo que:

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 6$

2 Cesgranrio O ponto de maior ordenada, pertence ao gráfico da função real definida por
$f(x) = (2x \quad 1) \cdot (3 \quad x)$, é o par ordenado (a,b). Então, a b é igual a:

A $-\frac{39}{8}$ C $\frac{3}{8}$ E $\frac{39}{8}$

B $-\frac{11}{8}$ D $\frac{11}{8}$

3 UFRGS 2020 Se a equação $x^2 + 2x = 8 \quad 0$ tem as raízes *a* e *b*, então o valor de $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2$ é:

A $\frac{1}{16}$ C $\frac{1}{16}$ E 1

B $\frac{1}{4}$ D $\frac{1}{4}$

4 Udesc 2018 A função quadrática cujo gráfico contém os pontos (0,–9), (1,0) e (2,15) tem vértice em:

A (– 2,–13)
B (1,0)
C (0,–9)
D (2,15)
E (–1,–12)

5 A solução da equação: $x + x\sqrt{(2x + 2)} = 3$ é:

A 1 C 3 E 7
B 2 D 5

6 PUC O número de pontos de interseção das duas parábolas $y = x^2$ e $y = 2x^2 \quad 1$ é:

A 0 D 3
B 1 E 4
C 2

7 ESPM 2019 O conjunto solução da equação em *x*: $x(x \quad 2) + a(x \quad 2) = 0$, no campo dos reais é S = {b}. O valor de a b é igual a:

A 0 D 4
B 2 E 4
C 2

8 PUC-RS 2018 A função quadrática tem diversas aplicações no nosso dia a dia. Na construção de antenas parabólicas, superfícies de faróis de carros e outras aplicações, são exploradas propriedades da parábola, nome dado à curva que é o gráfico de uma função quadrática.

Seja $p(x) = mx^2 + nx + 1$ Se $p(2) = 0$ e $p(-1) = 0$, então os valores de *m* e *n* são, respectivamente, iguais a

A $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ C 1 e $\frac{1}{2}$

B -1 e 1 D -1 e $-\frac{1}{2}$

9 UFRGS A equação $2mx^2 + mx + \frac{1}{2} = 0$ possui 2 raízes reais distintas. Então:

A $m = 0$
B $m > 0$
C $m < 4$
D $m < 0$ ou $m > 4$
E $0 < m < 4$

10 Uece 2019 Seja f : R → R a função quadrática definida por $f(x) = x^2 + bx + c$ Se *f* assume o menor valor para $x = -1$ e se 2 é uma raiz da equação f(x) = 0, então, a soma b + c é igual a:

A 4. B 4. C 3. D 6.

11 Efomm 2019 Examine a função real $f(x) = 2x \quad 3x^2$ quanto à existência de valores e pontos de máximos e mínimos Analise o problema e assinale a alternativa CORRETA.

A A função atinge o valor máximo de $\frac{2}{3}$, no ponto $x = \frac{1}{3}$

B A função atinge o valor mínimo de $\frac{1}{3}$, no ponto $x = \frac{1}{3}$

C A função atinge o valor máximo de $\frac{1}{3}$, no ponto $x = \frac{2}{3}$.

D A função atinge o valor mínimo de $\frac{2}{3}$, no ponto $x = \frac{1}{3}$.

E A função atinge o valor máximo de $\frac{1}{3}$, no ponto $x = \frac{1}{3}$

12 UEG 2019 Em um jogo de futebol, um jogador chuta uma bola parada, que descreve uma parábola até cair novamente no gramado. Sabendo-se que a parábola é descrita pela função $y = 20x \quad x^2$, a altura máxima atingida pela bola é

A 100 m D 40 m
B 80 m E 20 m
C 60 m

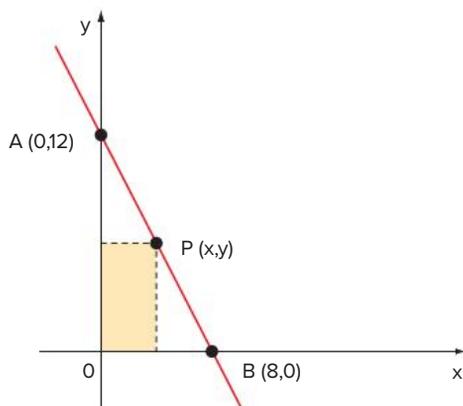
13 Fuvest 2020 A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um combo a R$ 10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$ 1,00 nesse preço, ela vende 100 combos a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse combo?

A R$ 2.000,00
B R$ 3.200,00
C R$ 3.600,00
D R$ 4.000,00
E R$ 4.800,00

14 Vunesp Suponha que um grilo, ao saltar do solo, tenha sua posição no espaço descrita em função do tempo (em segundos) pela expressão $h(t) = 3t - 3t^2$, em que *h* é a altura atingida em metros

a) Em que instante *t* o grilo retorna ao solo?

b) Qual a altura máxima em metros atingida pelo grilo?

15 UFSM A figura mostra um retângulo com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta que passa pelos pontos A(0,12) e B(8,0).

As dimensões *x* e *y* do retângulo para que sua área seja máxima devem ser, respectivamente, iguais a:

A 4 e 6

B 5 e $\frac{9}{2}$

C 5 e 7

D 4 e 7

E 6 e 3

16 UEPG 2019 O lucro da empresa BRITAS relativo aos seis primeiros meses de 2018 é dado, em milhares de reais, pela fórmula $L(x) = 75x \quad 3x^2$, com $x \in \{2, 6, 10, 14, 18, 22\}$.

Sabendo que os valores de *x* correspondem aos meses de janeiro a junho, assinale o que for correto

01 O maior lucro foi obtido no mês de abril.

02 O menor lucro foi obtido no mês de junho.

04 O lucro médio dos três últimos meses é maior do que dos três primeiros meses.

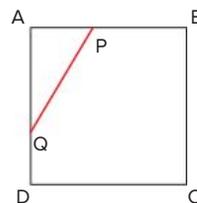
08 O lucro é crescente até o mês de abril.

Soma:

17 UFJF 2018 Uma empresa confecciona um certo produto A. O custo, em reais, para se produzir uma quantidade de *x* desse produto é dado pela seguinte função: $c(x) = \left(x^2 \quad +80x \quad 1000\right) \cdot 1000$, onde *x* é a quantidade produzida do produto A.

a) É possível produzir uma certa quantidade deste produto a um custo zero? Justifique.

b) Encontre a quantidade que deverá ser produzida para que o custo seja mínimo.

18 Udesc Seja ABCD um quadrado de área unitária, são tomados dois pontos $P \in AB$ e $Q \in AD$, tais que $|AP| + |AQ| = |AD|$ Calcule o maior valor para a área do triângulo APQ. Como seria tratado esse problema, se fosse pedido para calcular a menor área?

19 Fuvest O gráfico de $f(x) = x^2 + bx + c$, em que *b* e *c* são constantes, passa pelos pontos (0, 0) e (1, 2). Então, $f\left(\frac{2}{3}\right)$ vale:

A $-\frac{2}{9}$

B $\frac{2}{9}$

C $-\frac{1}{4}$

D $\frac{1}{4}$

E 4

20 Mackenzie 2018 Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é tal que $f(2) = 8$, $f(3) = 15$ e $f(4) = 26$, então $a + b + c$ é igual a

A 5

B 4

C 3

D 1

E 6

21 UEG 2019 Um lava-jato tem 50 clientes fixos por semana e cada lavagem custa R$ 20,00. Sabe-se que a cada um real que o dono desse lava-jato aumenta no preço da lavagem, ele perde 2 clientes. O valor do aumento que maximiza a arrecadação semanal desse lava-jato é de

A R$ 25,00

B R$ 20,00

C R$ 2,50

D R$ 10,00

E R$ 2,00

22 Faap Com relação ao gráfico da função $f(x) = 2(x \quad 1)^2 \quad 4$ são feitas as seguintes afirmações.

I. É uma parábola com concavidade voltada para cima.

II. É uma parábola cujo vértice é o ponto (–2; 4).

III. O ponto de interseção com o eixo *y* é (0; 2).

Nessas condições:

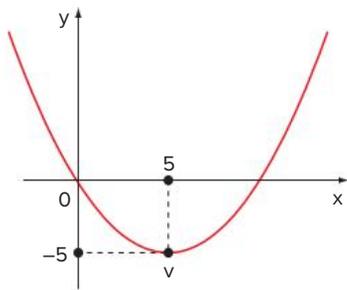
A somente a afirmação I é verdadeira.

B somente a afirmação III é verdadeira.

C as afirmações I, II e III são verdadeiras.

D as afirmações I e III são verdadeiras.

E as afirmações II e III são verdadeiras

23 **UFMG** Observe a figura.

Nessa figura, está representada a parábola de vértice V, gráfico da função de segundo grau cuja expressão é:

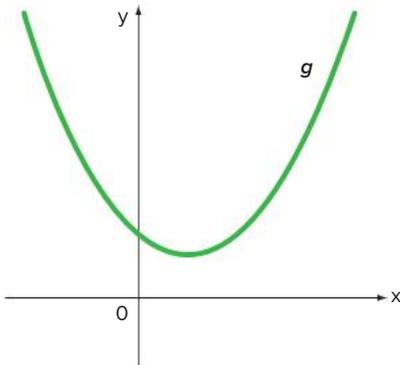
A $y = \left(\frac{x^2}{5}\right) \quad 2x$

B $y = x^2 \quad 10x$

C $y = x^2 + 10x$

D $y = \left(\frac{x^2}{5}\right) - 10x$

E $y = \left(\frac{x^2}{5}\right) + 10x$

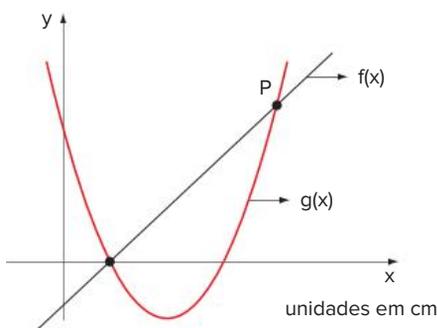
24 **UPF 2019** Na figura, está representado o gráfico de uma função quadrática ***g*** de domínio . Das expressões a seguir, aquela que pode definir a função ***g*** é:

A $g(x) = x^2 + 2x + 3$

B $g(x) = x^2 - x - 3$

C $g(x) = -x^2 + x + 3$

D $g(x) = -x^2 - 2x + 3$

E $g(x) = x^2 - 2x + 3$

25 **Uerj** No sistema de coordenadas cartesianas a seguir, estão representadas as funções $f(x) = 4x \quad 4$ e $g(x) = 2x^2 \quad 12x + 10$.

Com base nos dados anteriores, determine:

a) as coordenadas do ponto P.

b) o conjunto-solução da inequação:

$$\frac{g(x)}{f(x)} < 0,\ f(x) \neq 0.$$

26 **UFF** Resolva, em ℝ { 4, 2}, a inequação

$$\frac{(x \quad 4)}{(x+2)} < \frac{(x \quad 2)}{(x+4)}$$

27 **Vunesp** Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3 < 2x \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

28 **Mackenzie 2018** Se f: ℝ → ℝ é uma função definida por $f(x) = -2x^2 + x + 1$, então os valores de *x* para os quais *f* assume valores positivos são

A $-2 < x < 1$

B $1 < x < 2$

C $1 \leq x \leq \frac{1}{2}$

D $-1 < x < -\frac{1}{2}$

E $\frac{1}{2} < x < 1$

29 **Unesp 2017** Uma função quadrática *f* é dada por $f(x) = x^2 + bx + c$, com *b* e *c* reais.

Se f(1) = 1 e f(2) f(3) = 1, o menor valor que f(x) pode assumir, quando *x* varia no conjunto dos números reais, é igual a:

A –12

B –6.

C –10.

D 5.

E –9

30 **Cesgranrio** A menor solução inteira de: $x^2 - 2x - 35 < 0$ é:

A 5

B 4

C 3

D 2

E 1

31 **Cesgranrio** As soluções de $\frac{(x^2 \quad 2x)}{(x^2 + 1)} < 0$ são os valores de *x* que satisfazem:

A $x < 0$ ou $x > 2$

B $x < 2$

C $x < 0$

D $0 < x < 2$

E $x > 2$

32 **UEL** Determine o conjunto-solução da inequação

$$\left[(x+3)^4 \cdot \frac{(x^3 - 2x^2)}{(x^2 \quad 1)}\right] \geq 0, \text{ no universo } ℝ.$$

33 **PUC** No universo ℝ, o conjunto-solução da inequação $\frac{(x \quad 3)}{(3x - x^2)} < 0$ é:

A $\{x \in ℝ \mid x > 0\}$

B $\{x \in ℝ \mid x > 3\}$

C $\{x \in ℝ \mid x < 0 \text{ ou } x > 3\}$

D $\{x \in ℝ \mid 0 < x < 3\}$

E $\{x \in ℝ \mid x > 0 \text{ e } x \neq 3\}$

34 **UFSC** Considere as funções *f*, g: ℝ → ℝ tais que $g(x) = 2x + 1$ e $g(f(x)) = 2x^2 + 2x + 1$. Calcule f(7).

35 **UFBA** Na questão a seguir, escreva a soma dos itens corretos

Sobre funções reais, é verdade que:

01 o domínio de $f(x) = \frac{7x}{(x+2)}$ é ℝ.

02 $f(x) = 3x^2 + 4x$ é uma função par

04 $f(x) = \frac{(3x+2)}{2x}$ é a função inversa de $g(x) = \frac{2}{(2x \quad 3)}$.

08 sendo $f(x) = 2x + 4$, então $f(x) > 0$, para todo $x > 0$.

16 sendo $f(x) = 4x^2 \quad 7x$, então $f(-1) = 11$

Soma:

36 **Mackenzie** A equação:

$(3k - 1)x^2 - (2k + 3)x + (k - 4) = 0$, em *x*, com $k \neq \frac{1}{3}$, admite duas raízes reais *a* e *b* tais que $a < 1 < b$. O número de valores inteiros que *k* pode assumir é:

A 2
B 3
C 4
D 5
E 6

37 **UFSC** Considere as funções f: ℝ → ℝ e g: ℝ → ℝ dadas por: $f(x) = x^2 \quad x + 2$ e $g(x) = \quad 6x + \frac{3}{5}$

Calcule $f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{[5g(\quad 1)]}{4}$

Textos complementares

A fórmula é de Bhaskara?

As equações quadráticas completas foram resolvidas com muita eficiência pelos babilônios Um problema famoso era o de determinar o lado de um quadrado se a área menos o lado é igual a 14,30. (Não estranhe! O sistema de numeração dos babilônios é sexagesimal)

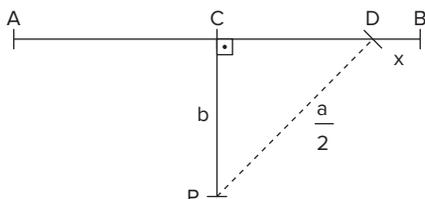
A solução do problema para a época (≈2000 a C.) é expressa assim:

"Tome a metade de 1, que é 0,30; e multiplique 0,30 por 0,30, o que dá 0,15; some a isso 14,30 o que dá 14,30;15. Isso é o quadrado de 29,30. Agora some 0,30 a 29,30 e o resultado é 30; o lado do quadrado "

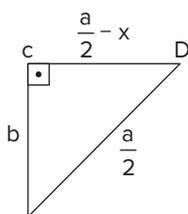
Observe que não existe fórmula nenhuma. É praticamente uma receita para resolver a equação!

Euclides resolvia equações, mas é claro que geometricamente Observe a solução da equação

$ax = x^2 + b^2$, na qual *a* e *b* são segmentos tais que $a > 2b$.

Construção geométrica

1. AB = a.
2 C ponto médio de $\overline{AB}$
3. $\overline{CP} \perp \overline{AB}$, tal que CP = b.
4. Com centro em P e raio $\frac{a}{2}$ marca-se D em AB.
5 O segmento $\overline{BD}$ é a solução da equação.

Justificativa:

No Δ retângulo PCD, temos:

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 \therefore \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + x^2 \therefore$$

$$\therefore \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} \quad ax + x^2 \therefore ax = x^2 + b^2$$

(equação apresentada)

Bhaskara foi um matemático indiano (1114 1185). Pelas datas, percebemos que a solução da equação quadrática não se deve a ele. Seus principais trabalhos foram *Lilavati* (homenagem à filha) e o *Vija-Ganita* ("extração de raízes"), em que realmente temos textos com problemas de equações lineares, quadráticas, progressões, tríades pitagóricas.

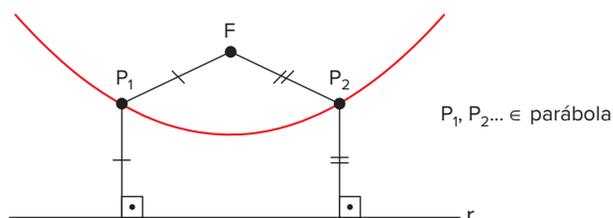
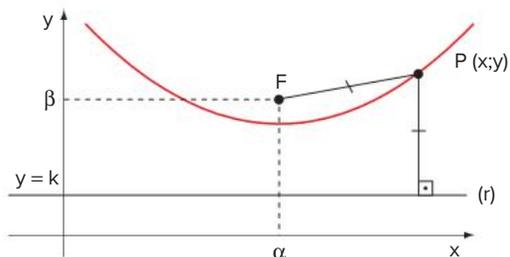
Pelo texto, percebemos que o grande Bhaskara não resolveu pela 1ª vez o problema das equações quadráticas, e muito menos sugeriu a fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, pois a notação moderna da matemática surgiu no final do século XVI com o francês François Viète.

Este texto simplesmente quer elucidar os fatos, e não desmerecer a grandiosa obra de Bhaskara

Carl Boyer. *História da Matemática*.
São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

O que realmente é a parábola?

Do ponto de vista geométrico, a parábola é o conjunto de pontos do plano equidistantes de um ponto F dado e uma reta r dada.

F é o foco e *r*, a reta diretriz, tal que $F \notin r$.

Vamos agora analisar a parábola em um sistema cartesiano.

$d_{P;F} = d_{P;r} \Leftrightarrow P \in \text{parábola}$

$\sqrt{(x \quad \alpha)^2 + (y \quad \beta)^2} = |y \quad k|$

$\therefore x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = y^2 - 2ky + k^2$

$x^2 \quad 2\alpha x + \alpha^2 = \beta^2 \quad k^2 \quad 2\beta y \quad 2ky$

$x^2 \quad 2\alpha x \quad (\alpha^2 \quad \beta^2 \quad k^2) = 2(\beta \quad k)y$

Como F $\notin$ r, temos b ≠ k. Assim:

$$\frac{1}{2(\beta-k)}x^2 - \frac{\alpha}{(\beta-k)}x + \frac{\alpha^2+\beta^2-k^2}{2(\beta-k)} = y$$

Trata-se de uma expressão da forma

$y = ax^2 = + bx + c;\ a \neq 0$

Assim, a função quadrática tem como gráfico uma parábola

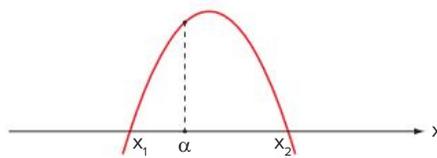
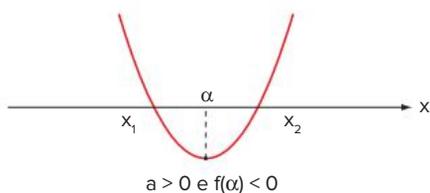
Posição de um número real α em relação às raízes do trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$

Esta teoria vai permitir posicionarmos o número $\alpha \in \mathbb{R}$ em relação às raízes $x_1 \leq x_2$. As possibilidades são:

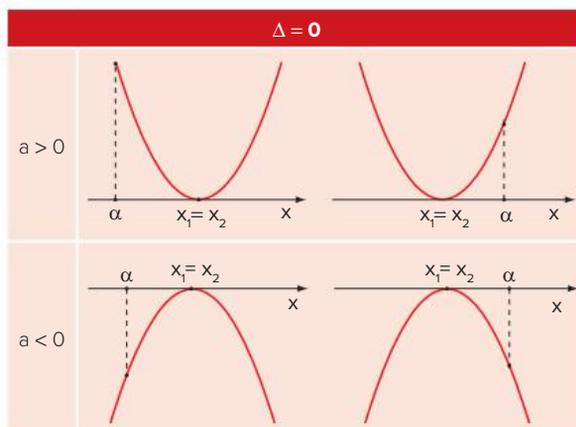
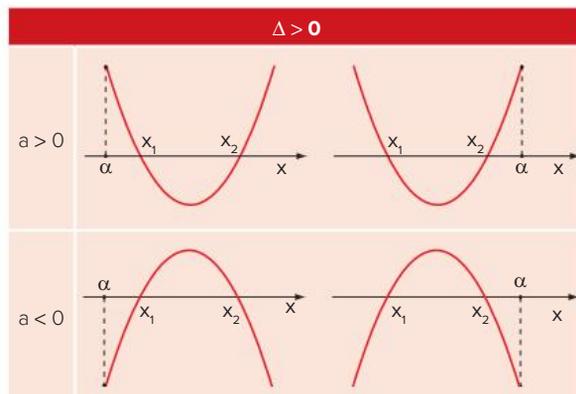
f $\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2$

O grande benefício é que não temos necessidade de encontrar os valores x_1 e x_2.

1. Vamos analisar quando α está entre as raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a > 0 e f(α) < 0

a < 0 e f(α) > 0

Conclusão: $af(\alpha) < 0 \Rightarrow x_1 < \alpha < x_2$ e $\Delta > 0$

2. Vamos analisar quando α está fora do intervalo das raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Em todos os casos, temos $af(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0$.

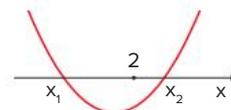
Conclusão: $af(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0 \Rightarrow \alpha$ está fora do intervalo das raízes.

Nos casos apresentados no item 2, o número α pode ser menor do que a menor das raízes ou maior do que a maior das raízes Para fixarmos α à esquerda de x_1, devemos impor $\alpha < \frac{b}{2a}$ e para α estar à direita de x_2, devemos impor também $\alpha > -\frac{b}{2a}$.

No exemplo a seguir, observe as condições para que $\alpha < x_1 < x_2$

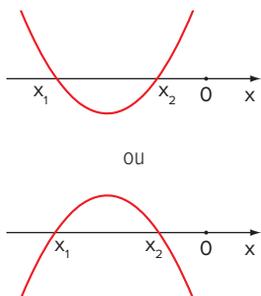
Devemos ter: $af(\alpha) > 0$ e $\Delta > 0$ e $\alpha < -\frac{b}{2a}$

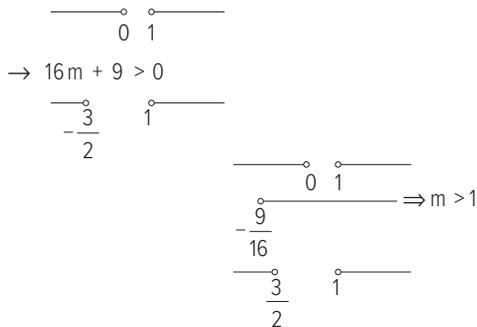
Exemplo 1: Determinar os valores de m na equação $x^2 + (m \quad 2)x + {} + 1 - m = 0$ de modo que o número real 2 esteja compreendido entre as raízes.

Resolução: A situação do problema é da forma:

$1 \cdot f(2) < 0 \Rightarrow 1 \cdot [2^2 + (m - 2) \cdot 2 + 1 - m] < 0 \therefore$
$\therefore (4 + 2m - 4 + 1 - m) < 0 \therefore (m + 1) < 0 \therefore m < -1$

Resposta: $m \in]-\infty; -1[$

Exemplo 2: Determinar m de modo que as raízes da equação do $2^{\underline{o}}$ grau $(m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m = 0$ sejam negativas e distintas

Resolução: A situação do problema é da forma

Assim, x_1 e x_2 serão ambas negativas.

$$\begin{cases} (m-1) \cdot f(0) > 0 \\ \Delta > 0 \\ 0 > \dfrac{-b}{2a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (m-1) \cdot m > 0 \\ (2m+3)^2 - 4(m-1) \cdot m > 0 \rightarrow \\ \dfrac{-(2m+3)}{2(m-1)} < 0 \end{cases}$$

Resposta: $m \in]1; +\infty[$

Resumindo

O trinômio do $2^{\underline{o}}$ grau $y = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ possui como gráfico uma parábola.

Raízes do trinômio: $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; $\Delta = b^2 - 4ac$

Natureza das raízes

$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

$\Delta < 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \notin \mathbb{R}$

Relação entre coeficientes e raízes

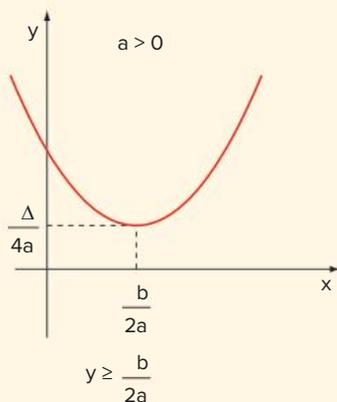
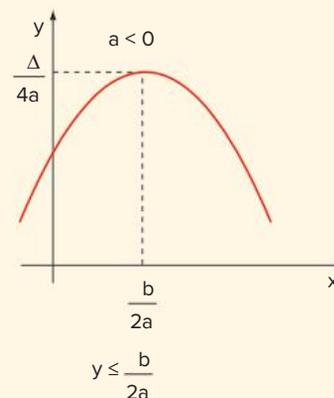
$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Fatoração do trinômio do $2^{\underline{o}}$ grau

$ax^2 + bx + c \equiv a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Resumo dos gráficos e dos sinais do trinômio

	a > 0	**a < 0**
$\Delta > 0$	+ + x	+ x
$\Delta = 0$	+ + + x $-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$ x − − −
$\Delta < 0$	+ + + x $y > 0: \forall x \in \mathbb{R}$	x − − − $y < 0: \forall x \in \mathbb{R}$

Vértice da parábola

A função admite valor mínimo.

A função admite valor máximo.

Quer saber mais?

Sites

- J. B. Pitombeira. Revisitando uma velha conhecida. <www bienasbm.ufba.br/C2 pdf>

Exercícios complementares

1 Resolva as equações no conjunto dos números reais:

a) $36y^2 \quad 13y + 1 = 0$

b) $6x = (x \quad 5)^2$

c) $(2x \quad 7)^2 = 15 \quad 3x$

d) $\frac{(x^2 \quad 3x)}{2} - 1 = \frac{(x^2 \quad 1)}{4}$

e) $2x^2 \quad 49 \; + x \quad \frac{(1 \quad x^2)}{2}$

2 Resolva:

a) a equação $x^2 \quad 3x \quad 4 = 0$

b) o sistema: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + xy = \quad 8 \end{cases}$

3 **UFV** As medidas da hipotenusa e de um dos catetos de um triângulo retângulo são dadas pelas raízes da equação $x^2 \quad 9x + 20 = 0$. A área desse triângulo é:

A 10
B 6
C 12
D 15
E 20

4 Resolver a equação $\sqrt{x} + \sqrt{(x + 12)} = 6$.

5 **UEG 2019** As raízes da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ são 1 e 3 Sabendo-se que o vértice é o ponto (1, 4), os valores de *a*, *b* e *c* são, respec tivamente:

A 1, 2 e 3
B 1, 2 e 3
C 1, 2 e 3
D 1, 2 e 3
E 1, 2 e 3

6 Calcule *t* na equação $x^2 \quad 4x + t = 0$, de modo que as raízes:

a) sejam reais e distintas.
b) sejam reais e iguais.
c) não sejam reais.

7 **Fatec** Se a equação $x^2 \quad 10x + k = 0$ tem uma raiz de multiplicidade 2, então o valor de *k* é:

A 100
B 25
C 5
D 1
E 0

8 **UFMG** Seja: $P(x) = x^3 + (k - 3)x^2 + (2 - k)x - \ (6 + 6k)$, em que *k* é um número real:

a) mostre que o número 3 é raiz de P(x) para todo número real *k*.

b) determine todos os valores de *k* para os quais as raízes de P(x) sejam todas reais.

9 **Unicamp** Determine o número m de modo que o gráfico da função $y = x^2 + mx + 8 - m$ seja tangente ao eixo do *x* Faça o gráfico da solução (ou das soluções) que você encontrar para o problema

10 Sendo x' e x" as raízes da equação $5x^2 \quad 7x \quad 11 = 0$, calcule o valor das expressões sem resolver a equação.

a) $x' + x''$

b) $x' \cdot x''$

c) $(x')^2 + (x'')^2$

d) $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$

11 **Cesgranrio** Se as raízes da equação $x^2 + bx + 27 = 0$ são múltiplos positivos de 3, então o coeficiente *b* vale:

A 12

B 12

C 9

D –9

E 6

12 Sobre a equação $2\,003x^2 \quad 2\,004x \quad 2\,005 = 0$, a afirmação correta é:

A tem duas raízes reais de sinais contrários, mas não simétricas.

B tem duas raízes simétricas

C não tem raízes reais.

D tem duas raízes positivas.

E tem duas raízes negativas.

13 **UFRGS 2018** As raízes da equação $2x^2 + bc + c = 0$ são 3 e − 4. Nesse caso, o valor de b c é:

A −26.

B −22.

C −1

D 22

E 26.

14 Se a e b são raízes da equação $x^2 - 92x + k = 0$ e $a^b \quad a^a \quad b^a \quad b^b = 16^{23}$ o valor de *k* é igual a:

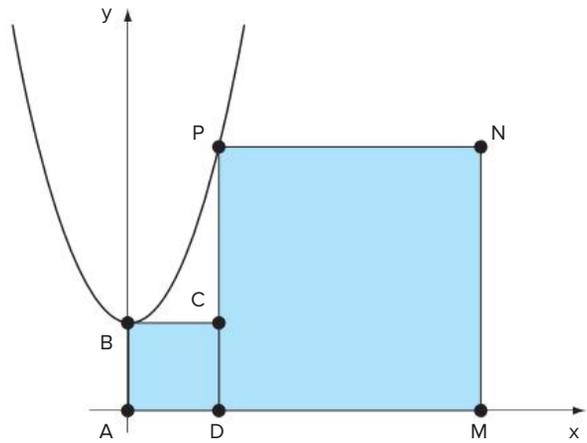
A 1

B 2

C 4

D 8

E 16

15 **Uerj 2017** No plano cartesiano a seguir, estão representados o gráfico da função definida $f(x) = x^2 + 2$, com $x \in \mathbb{R}$, e os vértices dos quadrados adjacentes ABCD e DMNP.

Observe que B e P são pontos do gráfico da função *f* e que A, B, D e M são pontos dos eixos coordenados. Desse modo, a área do polígono ABCPNM, formado pela união dos dois quadrados, é:

A 20

B 28

C 36

D 40

16 **UFMG** O ponto de coordenadas (3, 4) pertence à parábola de equação $y = ax^2 + bx + 4$. A abscissa do vértice dessa parábola é:

A $\frac{1}{2}$

B 1

C $\frac{3}{2}$

D 2

17 **Faap** A variação de temperatura y = f(x) num intervalo de tempo *x* é dada pela função $f(x) = (m^2 \quad 9)x^2 + (m + 3)x + m \quad 3$; calcule "m" de modo que o gráfico da função seja uma parábola com a con cavidade voltada para baixo.

A $3 \leq m \leq 3$

B $m > 3$ e $m < \quad 3$

C $3 \leq m < 3$

D $3 < m \leq 3$

E $3 < m < 3$

18 **PUC** A temperatura, em graus centígrados, no interior de uma câmara, é dada por $f(t) = t^2 \quad 7t + A$, em que *t* é medido em minutos e A é constante Se no instante t = 0 a temperatura é de 10 °C, o tempo gasto para que a temperatura seja mínima, em minutos, é:

A 3,5

B 4,0

C 4,5

D 6,5

E 7,5

19 ITA Sejam as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $f(x) = x^2 - 9$ e $(f \circ g)(x) = x - 6$, em seus respectivos domínios, então, o domínio A da função *g* é:

A $[-3, +\infty[$

B $\mathbb{R}$

C $[-5, +\infty[$

D $]-\infty, \quad 1[\cup [3, +\infty[$

E $]-\infty, \sqrt{6}[$

20 FGV 2018 A equação quadrática $x^2 - 2x + c = 0$, em que *c* é uma constante real, tem como raízes x_1 e x_2. Se $\frac{x_1}{x_2} = -2$, então $\sqrt[3]{c}$ será

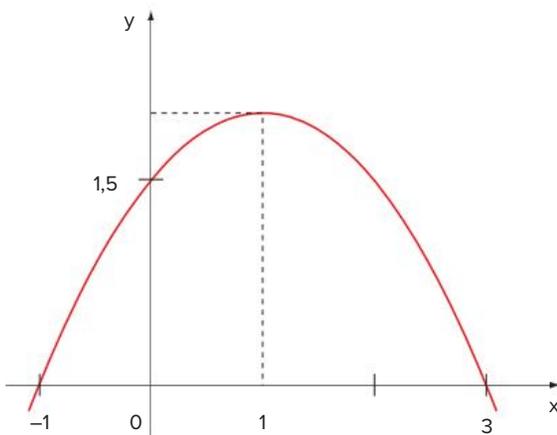
A um múltiplo de 3.

B racional não inteiro.

C irracional.

D –2.

E 2

21 UEL Seja a função *f*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pelo gráfico seguinte,

o conjunto-imagem de *f* é:

A $\mathbb{R}$

B $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \le y \le 1{,}5\}$

C $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \le y \le 1{,}8\}$

D $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le 2\}$

E $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le 1{,}8\}$

22 PUC-RS 2017 O morro onde estão situadas as emissoras de TV em Porto Alegre pode ser representado graficamente, com algum prejuízo, em um sistema cartesiano, através de uma função polinomial de grau 2 da forma $y = ax^2 + bx + c$, com a base da montanha no eixo das abscissas. Para que fique mais adequada essa representação, devemos ter

A $a > 0$ e $b^2 \quad 4ac > 0$

B $a > 0$ e $b^2 \quad 4ac < 0$

C $a < 0$ e $b^2 \quad 4ac < 0$

D $a < 0$ e $b^2 \quad 4ac > 0$

E $a < 0$ e $b^2 \quad 4ac = 0$

23 UFBA Escreva a soma dos itens corretos.
Considerando-se a função real $f(x) = x^2 \quad 3|x|$, é ver dade que

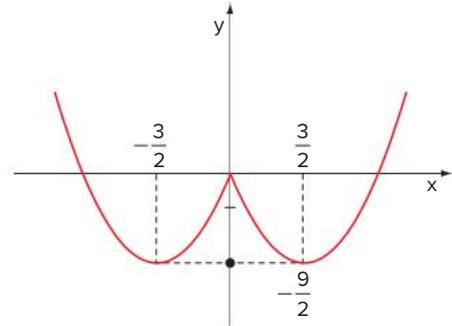
01 a imagem da função *f* é $[\ \ 3, +\infty[$

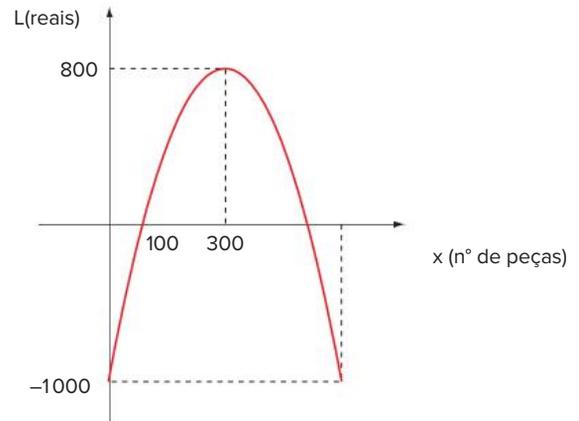
02 a função *f* é bijetora, se $x \in]-\infty, \quad 2]$ e $f(x) \in [\ \ 2, +\infty[$

04 a função *f* é crescente, para todo $x \ge 0$.

08 o gráfico da função *f* intercepta os eixos coorde nados em três pontos.

16 para todo $x \in \{\ \ 1, 4\}$, tem-se $f(x) = 4$.

32 o gráfico da função *f* é:

Soma:

24 UFF A parábola abaixo representa o lucro mensal L (em reais) obtido em função do número de peças vendidas de um certo produto.

Determine:

a) o número de peças que torna o lucro nulo.

b) o(s) valor(es) de *x* que torna(m) o lucro negativo.

c) o número de peças que devem ser vendidas para que o lucro seja de R$ 350,00.

25 UEL Seja *f* a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \quad 1 \text{ se } x < \quad 1 \\ -x^2 + 1 \text{ se } -1 < x < 1 \\ x \quad \geq 1 \text{ se } x \quad 1 \end{cases}$$

o conjunto-imagem de *f* é o intervalo:

A $]-\infty, -1]$

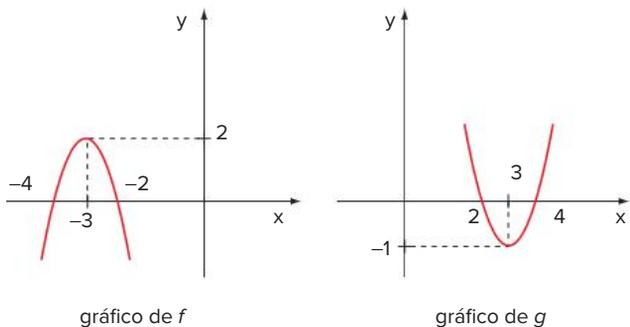
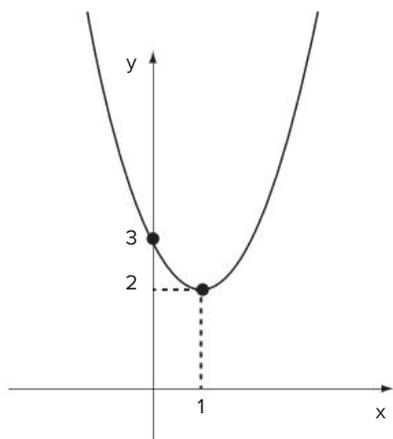
B $]-\infty, 1]$

C $[0, +\infty[$

D $[1, +\infty[$

E $[-1, 1]$

FRENTE 1

26 **UFU** Na figura a seguir, estão esboçadas duas parábolas, que são os gráficos das funções *f* e *g*. Considere a função h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (em que R representa o conjunto dos números reais), definida por $h(x) = |f(x) + g(x)|$ e determine em que ponto o gráfico de *h* intercepta o eixo das ordenadas *y*.

27 **ESPM 2018** O gráfico abaixo representa uma função quadrática $y = f(x)$. O valor de $f(-6)$ é:

A 74
B 63
C 42
D 51
E 37

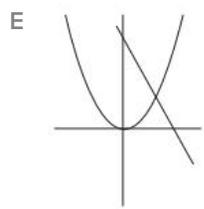
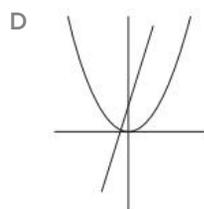
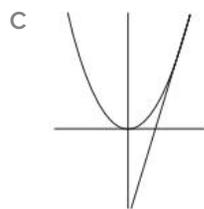
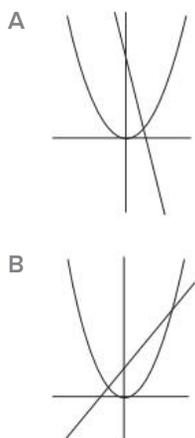
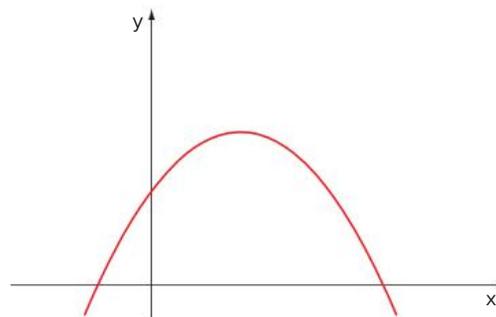
28 **UPE/SSA 2018** Qual das alternativas a seguir representa, conjuntamente, os esboços dos gráficos das funções reais $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4x - 4$?

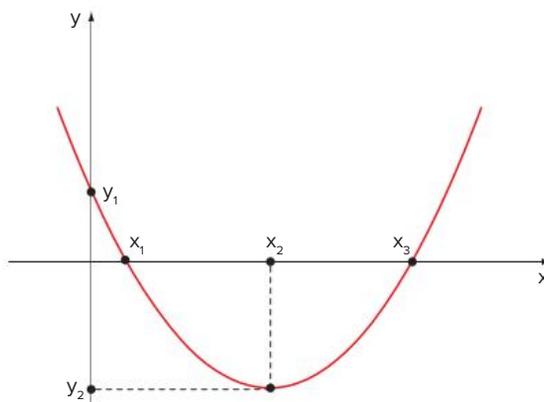
A

B

C

D

E

29 Considerando o gráfico a seguir referente à função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, pode-se afirmar que:

A $a > 0$; $b > 0$ e $c < 0$
B $a > 0$; $b < 0$ e $c > 0$
C $a < 0$; $b < 0$ e $c < 0$
D $a < 0$; $b > 0$; $c > 0$
E $a < 0$; $b > 0$; $c \in \mathbb{R}$

30 Dado o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$; em que $\Delta = b^2 \quad 4ac$ é o seu discriminante, considere as seguintes afirmativas.

1. $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_3 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

2. $x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

3. $y_2 = \dfrac{-\Delta}{4a}$

4. $y_1 = c$

Concluímos que:

A todas são verdadeiras.
B apenas uma é falsa.
C duas são falsas.
D apenas uma é verdadeira.
E todas são falsas.

31 Mackenzie O domínio da função real definida por

$f(x) = \sqrt[3]{[(x^2 \quad -2x \quad 6)/(x^2 \quad -5x \quad 6)]}$ é:

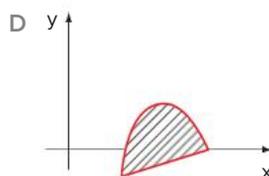
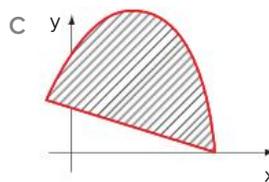
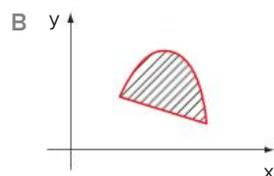
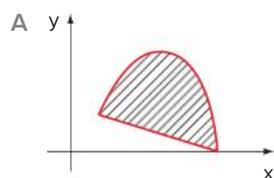
A $\mathbb{R} \quad \{2, 3\}$
B $\mathbb{R}^*$
C $\mathbb{R}$
D $\mathbb{R}^* \quad \{2, 3\}$
E $\mathbb{R} \quad \{ \; 2, \;\; 3\}$

32 PUC Usando uma unidade monetária conveniente, o lucro obtido com a venda de uma unidade de certo produto é $x \quad 10$, sendo x o preço de venda e 10 o preço de custo. A quantidade vendida, a cada mês, depende do preço de venda e é, aproximadamente, igual a $70 \quad x$

Nas condições dadas, o lucro mensal obtido com a venda do produto é, aproximadamente, uma função quadrática de x, cujo valor máximo, na unidade monetária usada, é:

A 1 200
B 1 000
C 900
D 800
E 600

33 UFMG Considere a região delimitada pela parábola da equação $y = -x^2 + 5x \quad 4$ e pela reta de equação $x + 4y \quad 4 = 0$.

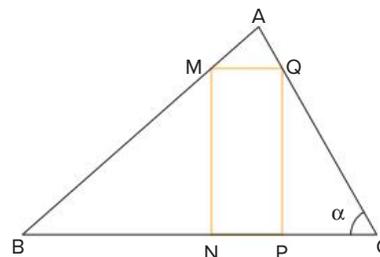
Assinale a alternativa cujo gráfico representa corretamente essa região.

A
B
C
D
34 UFSC Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = x^2 - 1$, determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) verdadeira(s).

01 f é uma função crescente.
02 A reta que representa a função f intercepta o eixo das ordenadas em (0, 3).
04 –1 e +1 são os zeros da função g.
08 $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$.
16 A função inversa da f é definida por $f^{-1}(x) = -x + 3$.
32 O valor de $g(f(1))$ é 3.
64 O vértice do gráfico de g é o ponto (0, 0).

Soma:

35 UFPR 2017 Um agricultor tem arame suficiente para construir 120 m de cerca, com os quais pretende montar uma horta retangular de tamanho a ser decidido.

a) Se o agricultor decidir fazer a horta com todos os lados de mesmo tamanho e utilizar todo o arame disponível cercando apenas três dos seus lados, qual será a área da horta?
b) Qual é a área máxima que a horta pode ter se apenas três dos seus lados forem cercados e todo o arame disponível for utilizado?

36 Fuvest No triângulo ABC, AC = 5 cm, BC = 20 cm e $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$.

O maior valor possível, em cm^2, para a área do retângulo MNPQ, construído conforme mostra a figura a seguir, é:

A 16
B 18
C 20
D 22
E 24

37 **Faap** Analistas de produção verificaram que numa determinada montadora o número de peças produzidas nas primeiras *t* horas diárias de trabalho é dado por:

$$f(t) = \begin{cases} 50\,(t^2 + t), \text{ para } 0 \le t \le 4 \\ 200\,(t+1), \text{ para } 4 \le t \le 8 \end{cases}$$

O número de peças produzidas na quarta hora de trabalho é:

A 1000
B 800
C 200
D 400
E 600

38 **Mackenzie** Na função real definida por $f(x) = x^2 + 2mx$ (m 2), sabe-se que: $f(a) = f(b) = 0$, em que $a < 1 < b$ Então, em U = { 4; 3; 2; 1; 0; 1; 2; 3; 4}, o número de valores que *m* pode assumir é:

A 1
B 2
C 3
D 4
E 9

39 **FGV 2017** Um fazendeiro dispõe de material para construir 60 metros de cerca em uma região retangular, com um lado adjacente a um rio. Sabendo que ele não pretende colocar cerca no lado do retângulo adjacente ao rio, a área máxima da superfície que conseguirá cercar é:

A 430 m^2
B 440 m^2
C 460 m^2
D 470 m^2
E 450 m^2

40 **Unicamp** O índice I de massa corporal de uma pessoa adulta é dado pela fórmula, $I = M/h^2$ em que M é a massa do corpo, dada em quilogramas, e *h* é a altura da pessoa, em metros. O índice I permite classificar uma pessoa adulta, de acordo com a seguinte tabela:

Homens	Mulheres	Classificação
$20 \le I \le 25$	$19 \le I \le 24$	Normal
$25 \le I \le 30$	$24 < I \le 29$	Levemente obeso
$I > 30$	$I > 29$	Obeso

a) Calcule o índice I para uma mulher cuja massa é de 64,0 kg e cuja altura 1,60 m Classifique-a segundo a tabela anterior

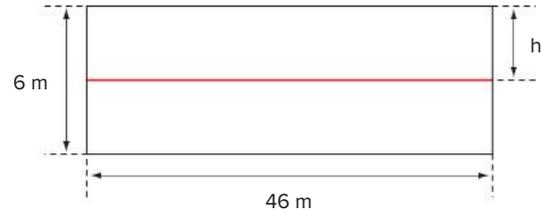
b) Qual é a altura mínima para que um homem cuja massa é de 97,2 kg não seja considerado obeso?

41 **PUC-Rio 2017** Dadas as funções *f*, g: R ⇒ R definidas por $f(x) = x^2$ 43x 36 e $g(x) =$ 2x 12.

a) Encontre os pontos de interseção dos gráficos das duas funções.

b) Encontre os valores reais de *x* para os quais $f(x) \ge g(x)$.

c) Encontre os valores reais de *x* que satisfazem $f(x+1) = g(x-2)$

42 **UnB** Em uma barragem de uma usina hidrelétrica, cujo reservatório se encontra cheio de água, considere que a vista frontal dessa barragem seja retangular, com 46 m de comprimento e 6 m de altura conforme representado na figura adiante. Sendo *h* a altura, em metros, medida da parte superior da barragem até o nível da água, tem-se h = 6 quando o reservatório está vazio e h = 0 no caso de o reservatório apresentar-se cheio.

Nessas condições, a força F, em newtons, que a água exerce sobre a barragem é uma função de *h*, isto é, F = F(h). Por exemplo, se h = 6, F(6) = 0. É conhecido que a função F é dada por um polinômio do segundo grau na variável *h*. Além disso, foram determinados os seguintes valores:

$F(5) = 25{,}3 \cdot 10^3$ N e $F(4) = 46 \cdot 10^3$ N.

Com essas informações, é possível determinar o valor de F para todo $h \in [0, 6]$.

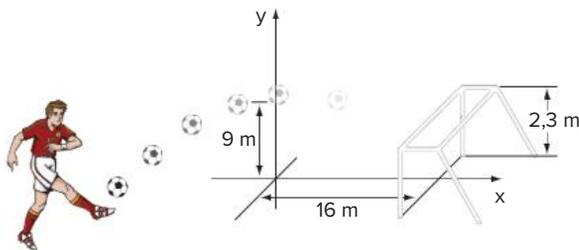
Calcule o valor $\frac{F(0)}{10^3}$, desconsiderando a parte fracionária de seu resultado, caso exista

43 **UnB** Uma microempresa, no seu segundo ano de funcionamento, registrou um lucro de R$ 28.000,00, o que representou um acréscimo de 40% sobre o lucro obtido no seu primeiro ano de existência No quarto ano, o lucro registrado foi 20% inferior ao do segundo ano. Considerando apenas esses três registros e representando por *x* o tempo de existência da empresa, em anos, pode-se modelar o lucro L(x), em múltiplos de R$ 1000,00, obtido nos 12 meses anteriores à data *x*, por meio de uma função polinomial do segundo grau da forma $L(x) = ax^2 + bx + c$. Os coeficientes *a*, *b* e *c* desse polinômio são unicamente determinados com base nas informações anteriores, em que L(1), L(2) = 28 e L(4) representam os lucros da empresa no primeiro, no segundo e no quarto anos, respectivamente. Uma vez encontrado esse polinômio, o modelo permite inferir se houve lucro (ou prejuízo) em datas diferentes daquelas registradas, desde que se considere $x \ne 1$

Com base nas informações e no modelo polinomial anterior, julgue os itens seguintes.

- O lucro da empresa no quarto ano foi de R$ 24.000,00.
- No plano de coordenadas xOy, o gráfico da função L é parte de uma parábola de concavidade voltada para baixo.
- O lucro obtido pela empresa no terceiro ano foi maior que o registrado no segundo ano

- [ ] O lucro máximo (anual) alcançado pela empresa foi registrado durante o primeiro trimestre do terceiro ano.
- [ ] A empresa não apresentou prejuízo durante os 5 primeiros anos.

44 **Uerj** Numa partida de futebol, no instante em que os raios solares incidiam perpendicularmente sobre o gramado, o jogador “Chorão” chutou a bola em direção ao gol, de 2,30 m de altura interna. A sombra da bola descreveu uma reta que cruzou a linha do gol.
A bola descreveu uma parábola e quando começou a cair da altura máxima de 9 metros, sua sombra se encontrava a 16 metros da linha do gol. Após o chute de “Chorão”, nenhum jogador conseguiu tocar na bola em movimento.
A representação gráfica do lance em um plano cartesiano está sugerida na figura a seguir.

A equação da parábola era do tipo: $y = \left(\frac{-x^2}{36}\right) + c$.

O ponto onde a bola tocou pela primeira vez foi:
A na baliza.
B atrás do gol.
C dentro do gol.
D antes da linha do gol.

45 **Unicamp**
a) Encontre as constantes *a*, *b* e *c* de modo que o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ passe pelos pontos (1, 10), (–2, –8) e (3, 12).
b) Faça o gráfico da função obtida no item a, destacando seus pontos principais.

46 **Cesgranrio** Determine o parâmetro m na equação $x^2 + mx + m^2 \quad m \quad 12 = 0$, de modo que ela tenha uma raiz nula e outra positiva

47 **IME** Dados dois trinômios do segundo grau:

$y = ax^2 + bx + c \quad$ (I)
$y = a'x^2 + b'x + c' \quad$ (II)'

considere, sobre o eixo Ox, os pontos A e B cujas abscissas são as raízes do trinômio (I) e A’B’ os pontos cujas abscissas são as raízes do trinômio (II).
Determine a relação que deve existir entre os coeficientes a, b, c, a’, b’, c’, de modo que A’B’ divida o segmento AB harmonicamente.

48 No plano cartesiano representa-se $y = ax^2 + bx + c$ (*a*, *b* e *c* $\in \mathbb{R}^*$) e a função que se obtém da anterior substituindo-se *x* por x. Os dois gráficos:
A coincidem.
B interceptam-se em 2 pontos.
C interceptam-se em Ox.
D interceptam-se um Oy.
E não se interceptam.

49 Qual a propriedade dos trinômios $y = ax^2 + bx + c$ quando $a + b + c = 0$?

50 Considere o trinômio $y = x^2 + (2a - 1)x + a^2$. Assinale dentre as condições a seguir a que torna o trinômio sempre positivo.
A $a > 0$
B $a < \frac{1}{2}$
C $a < -\frac{1}{4}$
D $a > \quad \frac{1}{2}$
E $a > \frac{1}{4}$

51 O trinômio $kx^2 + (k + 1)x - (k + 1)$
A é negativo para todo valor de *x* e todo $k \neq 0$.
B é negativo para todo valor de *x* se $k \leq \quad 2$.
C é positivo para todo valor *x* e todo $k \neq 0$.
D é negativo para todo valor de *x* se $k \in] \quad 1; \quad \frac{1}{5}[$.

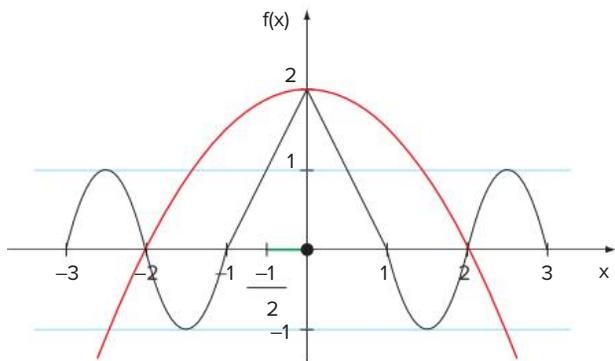
52 **ITA** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3x + 3, & x \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & x > 0 \end{cases}$, então:
A *f* é bijetora e $(f \circ f)\left(\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(21)$.
B *f* é bijetora e $(f \circ f)\left(\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(99)$.
C *f* é sobrejetora, mas não é injetora
D *f* é injetora, mas não é sobrejetora
E *f* é bijetora e $(f \circ f)\left(\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(3)$

53 **IME** Seja *f* uma função real tal que $\forall\, a \in \mathbb{R}$
$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$, *f* é periódica?
Justifique.

54 **Fuvest** Considere a função $f(x) = x\sqrt{(1 \quad 2x^2)}$.
a) Determine constantes reais *a*, *b* e *g* de modo que $(f(x))^2 = a[(x^2 + b)^2 + g]$.
b) Determine os comprimentos dos lados do retângulo de área máxima, com lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse de equação $2x^2 + y^2 = 1$.

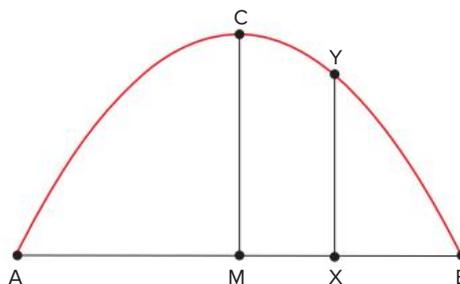
55 **ITA** Seja α um número real tal que $\alpha > 2\left(1+\sqrt{2}\right)$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes reais dessa equação são as cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:

A $30°$
B $45°$
C $60°$
D $135°$
E $120°$

56 **ITA** A função f(x), definida para $-3 \leq x \leq 3$, tem o seguinte gráfico.

As linhas ligando (–1; 0) a (0; 2) e (0; 2) a (1; 0) são segmentos de reta. Supondo $a \leq 0$, para que valores de a o gráfico do polinômio $p(x) = a(x^2 - 4)$ intercepta o gráfico de f(x) em exatamente 4 pontos distintos?

A $\frac{1}{2} < a < 0$
B $1 < a < \frac{1}{2}$
C $-\frac{3}{2} < a < -1$
D $2 < a < \frac{3}{2}$
E $a < 2$

57 Quais as condições a que deve satisfazer m para que o número 1 esteja entre as raízes do trinômio $mx^2 - 2(m+1)x + m^2$?

58 Um arco parabólico de extremidades A e B possui altura MC = 16 e amplitude AB = 40. Sabendo que C é o ponto médio do arco AB e M é o ponto médio do segmento AB, a altura XY do arco, em um ponto situado a 5 unidades do centro M deste, é igual a:

A 1 B 15 C $15\frac{1}{3}$ D $15\frac{1}{2}$ E $15\frac{3}{4}$

59 Determine os valores de a para os quais a expressão $\frac{a+3x}{(x \quad 1)\cdot(x+1)}$ assume todos os valores reais.

60 Considere $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $3x - y = 20$. O menor valor de $\sqrt{x^2+y^2}$ é:

A $2\sqrt{5}$
B $2\sqrt{10}$
C $2\sqrt{15}$
D $4\sqrt{5}$
E $4\sqrt{10}$

FRENTE 1

CAPÍTULO

4

Função exponencial

Thomas Malthus foi um demógrafo e economista britânico Formulou um modelo para descrever a população presente em um ambiente em função do tempo

$N(t) = N_0 \cdot e^{r \cdot t}$

N_0: população presente no instante inicial $t = 0$

r: constante que depende da espécie da população

e: constante de Euler, igual a 2,71828

Em 1798, Malthus publicou *Ensaio sobre a população*, no qual afirma que a população cresce exponencialmente enquanto a produção de alimentos aumenta linearmente.

Função exponencial

Define-se função exponencial toda função da forma $f(x) = a^x$; com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Antes de exemplificarmos e construirmos os gráficos, memorize as propriedades:

P1 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

P2 $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

P3 $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

P4 $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

P5 $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

P6 $\sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}$

P7 $\frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}} = \sqrt[p]{\frac{a}{b}}$; $b \neq 0$

P8 $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a}$

P9 $(\sqrt[p]{a})^q = \sqrt[p]{a^q}$

P10 $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Com a definição e as propriedades em mãos, podemos justificar a razão de que a base da função exponencial é maior do que 0 e diferente de 1.

1. Se $a = 1$, tem-se $f(x) = 1^x = 1$, que é a função constante.
2. Se $a < 0$, por exemplo, $a = -2$, tem-se $f(x) = (-2)^x$. Esse gráfico não será contínuo, ou seja, para determinados valores de *x*, não teremos o *y*.

   Para $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)^{\frac{1}{2}}$, pela propriedade ($P_{10}$)

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\not{2}}\ \ \mathbb{R}$

Comportamento da função

A função exponencial apresenta dois comportamentos distintos dependendo do valor da base *a*. Observe:

1. $f(x) = 2^x$; analisando alguns pontos, construímos a tabela e o gráfico a seguir.

x	f(x)
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

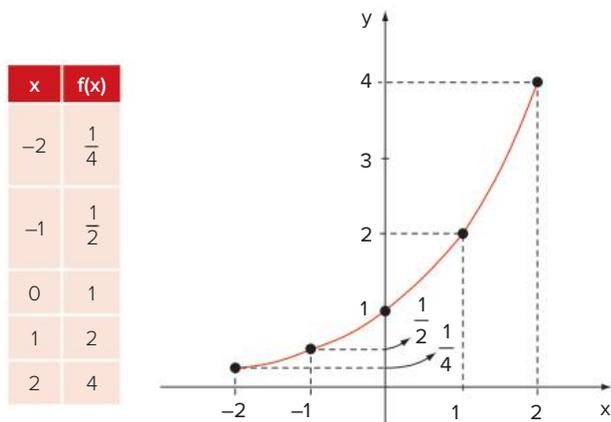



Fig. 1 Esboço do gráfico da função $f(x) = 2^x$

2. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; analisando novamente a função em alguns pontos particulares, obtemos a tabela e o gráfico a seguir.

x	f(x)
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

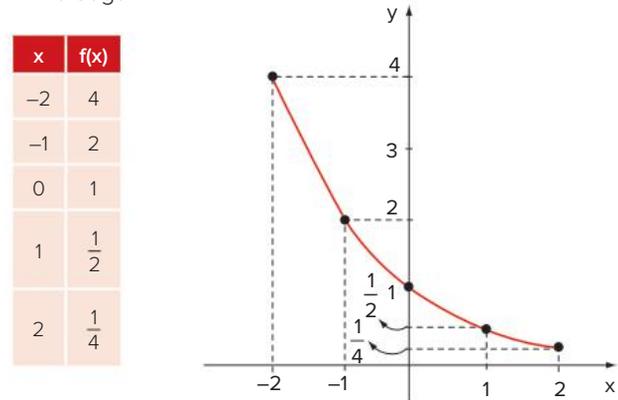



Fig 2 Esboço do gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

! Atenção

Em uma função exponencial $f(x) = a^x$; $a > 0$ e $a \neq 1$ se:

- $a > 1$, a função *f* é crescente.
- $0 < a < 1$, a função *f* é decrescente

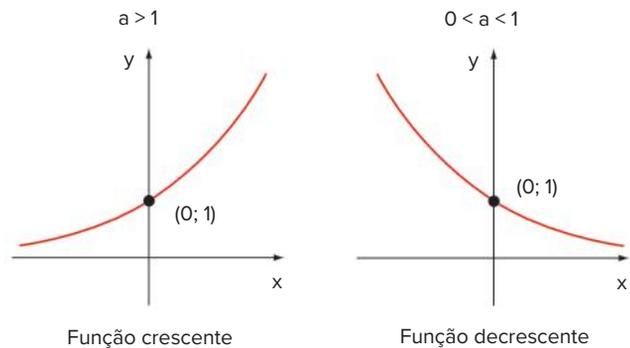



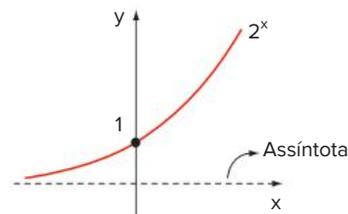
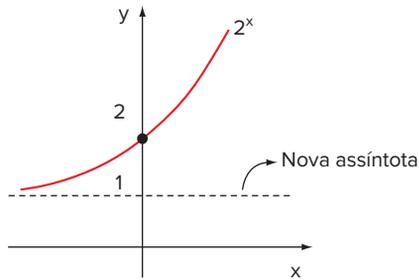
Fig 3 Esboço geral do gráfico da função $f(x) = a^x$

Observe que os gráficos a^x sempre passam pelo ponto (0; 1) e não "encostam" no eixo *x* Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = 0$; teremos valores de *x* em que a tende a zero. O eixo *x* representa um limite nunca alcançado para a^x, o eixo recebe o nome de **assíntota**.

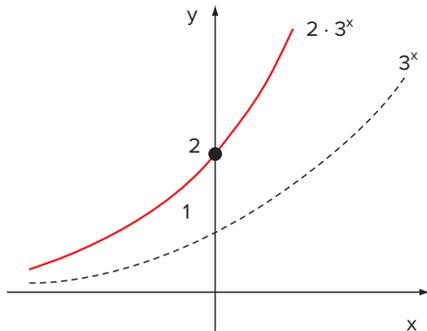
Vamos seguir a mesma ideia de construção de gráficos do capítulo 3, privilegiando as propriedades geométricas.

Exercícios resolvidos

1 Construa o gráfico da função: $f(x) = 2^x + 1$

Resolução:

Adicionando uma constante a 2^x, o gráfico sofrerá um deslocamento na direção do eixo *y* com a sua assíntota.

2 Construa o gráfico da função: $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

Resolução:

Com base no gráfico básico 3^x, multiplicaremos as ordenadas de todos os pontos por 2 Observe a figura a seguir.

A função cortará o eixo *y* no ponto (0; 2) e terá um crescimento mais acentuado e um decrescimento mais suave que o do 3^x

3 **ITA** Seja f: $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -3 \cdot a^x$, em que $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ Analise as afirmações:

I. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y); \forall x; y \in \mathbb{R}$.
II. *f* é bijetora.
III. *f* é crescente e $f(]0; +\infty[) =]-3; 0[$.

Resolução:

Vamos aproveitar essa questão do vestibular do ITA como exemplo das propriedades gráficas da função exponencial. Na afirmação (I), vamos calcular:

$$f(x + y) = \cdot\ 3\ a^{x+y} = \underbrace{3\ a^x}\cdot a^y = \underbrace{f(x)} \cdot a^y$$

[afirmação falsa]

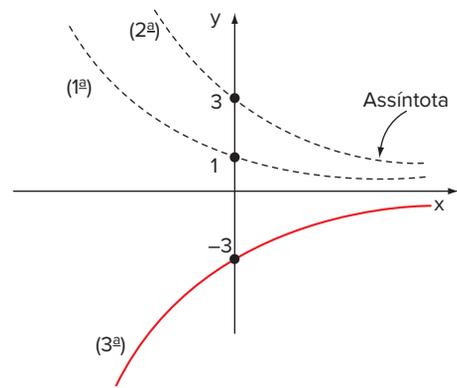
Para analisarmos as afirmações (II) e (III), vamos construir o gráfico da função $f(x) = \ 3 \cdot a^x$

A construção do gráfico será em 3 partes:

1ª parte: gráfico básico a^x com $0 < a < 1$.

2ª parte: multiplicar por 3.

3ª parte: o simétrico em relação ao eixo *x*, após a multiplicação por 1

Observe as três etapas na figura a seguir.

O conjunto-imagem da função *f* (projeção do gráfico no eixo *y*) é:

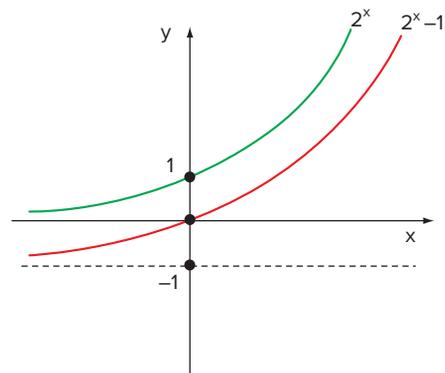
$$Im_f =]\ \ \infty; 0[= \mathbb{R}^*_-$$

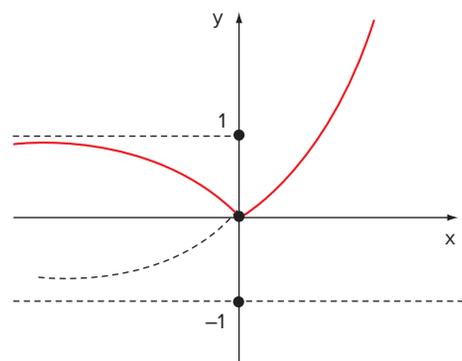
que é diferente do contradomínio $\mathbb{R}$. A função não é sobrejetora, portanto também não pode ser bijetora (afirmação (II) falsa).

Apesar de a base ser $0 < a < 1$, a função é crescente por causa do –3, e a imagem do conjunto $]0; +\infty[$ é $]-3; 0[$ (afirmação (III) verdadeira).

4 $f(x) = |2^x - 1|$

Resolução:

Construa o gráfico básico 2^x e desça 1 unidade todos os seus pontos, inclusive a assíntota.

Após construir $2^x - 1$, vamos "rebater" a parte que apresenta imagem negativa. Teremos, assim, $f(x) = |2^x - 1|$.

FRENTE 1

Aplicação da função exponencial nos juros compostos

A cobrança de juros ou o ganho de juros é uma prática utilizada há séculos nas relações comerciais.

- **Juros**: valor (constante ou variável) que vai aumentando o capital inicial ou a dívida.
- **Taxa de juros**: índice apresentado na forma de porcentagem (i%). Seu valor é constante e é uma porcentagem a ser aplicada no capital.

A cobrança de juros compostos é a mais utilizada no cotidiano. Ela consiste no aumento dos juros após cada período. Observe a sequência e a fórmula induzida no final.

Seja $\mathbf{C_0}$ o capital inicial, **i%** a taxa aplicada a cada período, e **n** o número de períodos:

C_0

$C_1 = C_0 + i\% \cdot C_0 = C_0(1 + i\%)$

$C_2 = C_1 + i\% \cdot C_1 = C_1(1 + i\%) = C_0 \cdot (1 + i\%)^2$

$C_3 = C_2 + i\% \cdot C_2 = C_2(1 + i\%) = C_0 \cdot (1 + i\%)^3$

$\vdots$

generalizando, temos:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i\%)^n \begin{cases} C_0\text{: capital inicial} \\ i\%\text{: taxa aplicada} \\ n\text{: número de períodos} \\ C_n\text{: capital gerado após n períodos} \end{cases}$$

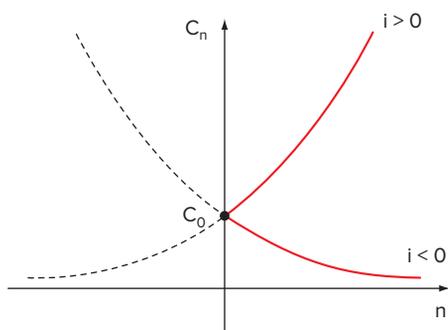



Fig. 4 Gráfico indicando o acréscimo ou o decréscimo do capital C_0

Exercícios resolvidos

5 Certo país da América Latina pediu um empréstimo de 1 milhão de dólares em 1840 para pagar em 100 anos à taxa de juros de 9% ao ano. Por problemas políticos e de corrupção, nada foi pago até hoje, e a dívida foi sendo "rolada" com a taxação anual de juros. Determine o valor da dívida em 2000. Para os cálculos adote $(1{,}09)^8 \approx 2$.

Resolução:

Considere $C_0 = 10^6$ e $i\% = 9\%$ ao ano

De 1840 até 2000, temos 160 anos

Sabendo que $C_n = C_0(1 + i\%)^n$, vamos calcular $C_{160} = 10^6 \cdot (1 + 9\%)^{160} = 10^6 \cdot (1{,}09)^{160} = 10^6 \cdot [(1{,}09)^8]^{20} = 10^6 \cdot (2)^{20} = 10^6 \cdot (2^{10})^2 = 10^6 \cdot (1024)^2 \approx 10^6 \cdot (10^3)^2 \approx 10^{12}$

Temos, então, uma dívida atualmente da ordem de 1 trilhão de dólares

6 Os institutos de pesquisa indicam uma inflação mensal de 2,5%. Por meio dos juros compostos, determine a inflação anual.

Resolução:

Não caia no erro de pensar que a inflação anual é $12 \cdot (2{,}5\%) = 30\%$ ao ano.

Para resolver o problema, considere um produto que custa *x* no início do ano. Após 12 meses, o produto custará:

$C_{12} = x \cdot (1 + 2{,}5\%)^{12} = x \cdot (1{,}025)^{12} = 1{,}345x$, o que equivale a $x + 0{,}345x$. Os juros acumulados no período de 1 ano foram $0{,}345x$, que equivale a 34,5%, ou seja, a inflação foi de 34,5% ao ano.

7 Um país europeu teve uma "deflação" de 1% ao mês durante 1 ano. Um produto que custava 100 dólares no começo do ano vai custar quanto ao término desse ano?

Resolução:

Trata-se da aplicação dos juros compostos com um decréscimo de 1% ao mês. Assim, $C_{12} = 100 \cdot (1 - 1\%)^{12} = 100 \cdot (0{,}99)^{12} = 100 \cdot (0{,}89) \approx 89$ dólares

Equação exponencial

São equações cuja variável está no expoente.

O procedimento básico para resolvê-las é transformar as funções na mesma base para igualar os expoentes.

! Atenção

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$, pois a função exponencial é injetora.

Observe os exercícios resolvidos a seguir

Exercícios resolvidos

Resolva as equações a seguir:

8 $4^x = 1024$

Resolução:

$4^x = 1024 \therefore (2^2)^x = 2^{10} \therefore 2^{2x} = 2^{10} \Rightarrow$

$2x = 10 \therefore x = 5 \therefore S = \{5\}$

9 $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

Resolução:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64} \therefore \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Rightarrow x = 3 \therefore S = \{3\}$$

10 $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$

Resolução:

$$4^{\sqrt{x+1}} = 2^{\sqrt{x+1}+2} \therefore (2^2)^{\sqrt{x+1}} = 2^{\sqrt{x+1}+2}$$
$$\therefore 2^{2\sqrt{x+1}} = 2^{\sqrt{x+1}+2}$$
$$\therefore 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+1} + 2$$
$$\therefore \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x+1 = (2)^2$$

Equação irracional

$\therefore x + 1 = 4 \therefore x = 3$
$S = \{3\}$

11 $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

Resolução:

Nesse tipo de equação exponencial, temos 3 bases diferentes Para reduzir essa quantidade de bases, divida, por exemplo, a equação toda por 9^x. Observe:
$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

$$\therefore \frac{4^x + 6^x}{9^x} = \frac{2 \cdot 9^x}{9^x} \therefore \frac{4^x}{9^x} + \frac{6^x}{9^x} = 2$$

$$\therefore \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x = 2 \therefore \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad 2 = 0$$

Essa equação é redutível a uma equação do 2º grau.

Fazendo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, temos:

$y^2 + y - 2 = 0$, raízes -2 e 1.

Para $y = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \therefore x = 0$

Para $y = -2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2 \therefore \nexists x$

Solução final $S = \{0\}$

! Atenção

As funções exponenciais $f(x) = a^x$; $a > 0$ e $a \neq 1$ apresentam o con junto-imagem R_+^*, ou seja, $\nexists x \in \mathbb{R}$, tal que $a^x \leq 0$.

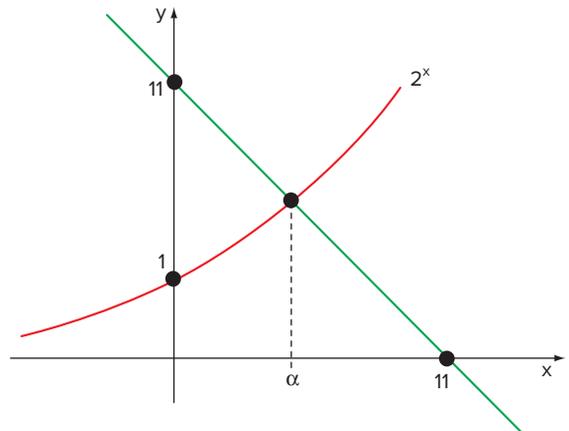
Exercícios resolvidos

Resolva as equações a seguir:

12 $2^x = 11 \quad x.$

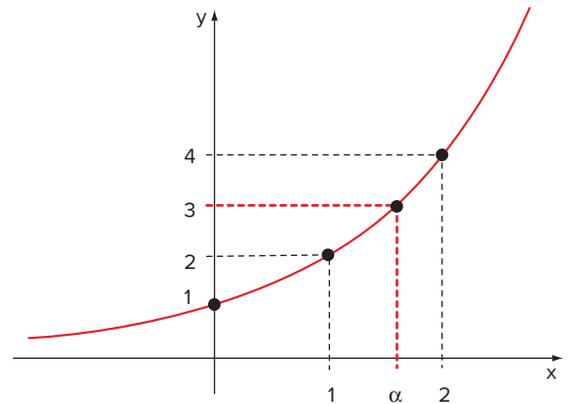
Resolução:

Nesse tipo de equação, temos a "mistura" de funções diferentes. Devemos avaliar a solução graficamente, plotando os dois gráficos no mesmo plano cartesiano.

Os pontos de corte são as raízes da equação:

α é o valor de *x*, tal que f(α) = g(α) em que $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 11 - x$; então:
$f(\alpha) \quad g(\alpha) = 0 \therefore 2^\alpha \quad [11 \quad \alpha] = 0$; α é raiz Por "verifica ção", α = 3, pois $2^3 = 11 - 3 \therefore 8 = 8$.

13 $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$

Resolução:

$4^x \quad 2^2 \cdot 2^x + 3 = 0 \therefore (2^x)^2 \quad 2^2 \cdot (2^x) + 3 = 0$
Fazendo $2^x = y$, teremos uma equação do 2º grau, assim: $y^2 - 4y + 3 = 0$, raízes 1 e 3.
Para $y = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \therefore 2^x = 2^0 \therefore x = 0$
Para $y = 3 \Rightarrow 2^x = 3 \therefore x = ?$
No momento, não temos condições de calcular o *x*. Podemos avaliar graficamente a solução

$1 < \alpha < 2$ tal que $2^\alpha = 3$
Solução final $S = \{0; \alpha\}$

Inequação exponencial

A resolução das inequações seguem os mesmos princípios das equações. Vamos igualar as bases e trabalhar com os expoentes e também reduzindo as expressões em funções do 2º grau.

As soluções das inequações dependem da base e da monotonicidade (crescente ou decrescente) da função exponencial Observe:

1º caso: $a > 1$

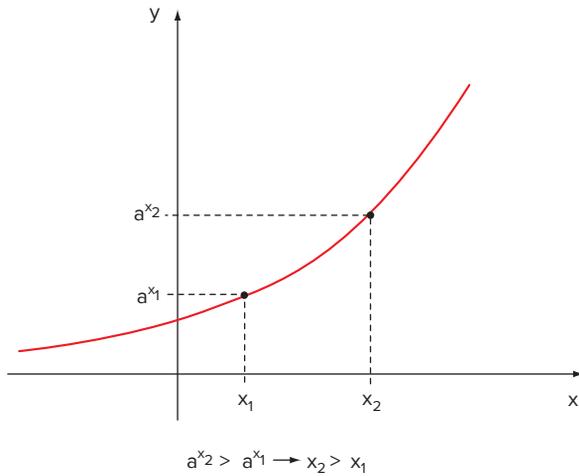



Fig 5 Função crescente

2º caso: $0 < a < 1$

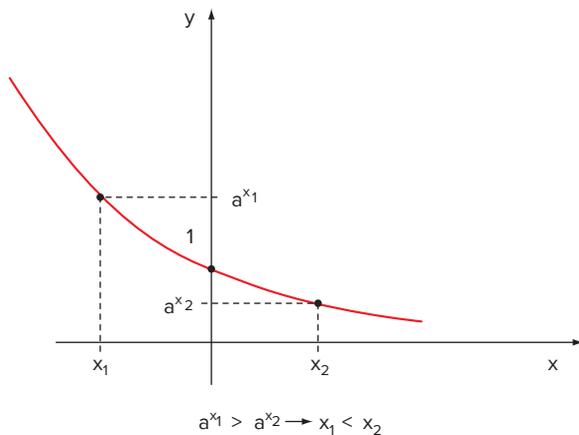



Fig. 6 Função decrescente.

Tendo em vista os dois casos apresentados, analise os exemplos de soluções de inequações a seguir.

Exercícios resolvidos

Resolva as equações a seguir:

14 $6^{3 \quad x} < 216$

Resolução:

$6^{3 \quad x} < 216 \therefore 6^{3 \quad x} < 6^3$

$\Rightarrow 3 \quad x < 3 \therefore \quad x < 0 \therefore x > 0$

$S =]0; +\infty[$

15 $2^x \cdot 5^x > (0, 1) \cdot (10^{x \quad 1})^5$

Resolução:

$2^x \cdot 5^x > (0,1) \cdot (10^{x-1})^5$

$\therefore (2 \cdot 5)^x > 10^{-1} \cdot 10^{5x-5}$

$\therefore 10^x > 10^{-1+5x-5}$

$\therefore 10^x > 10^{5x-6} \Rightarrow x > 5x - 6 \therefore -4x > -6$

$S = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$

16 $(0,04)^{-x^2+5x-8} < (0,04)^{-2}$

Resolução:

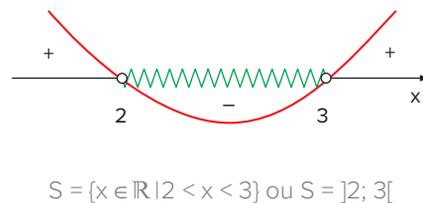
$(0,04)^{-x^2+5x-8} < (0,04)^{-2}$ (base menor do que 1)

$\not{x}^2 \quad 5x \quad \not{>}8 \quad 2$

$\therefore \quad x^2 + 5x > 6 \quad 0$

$\therefore \quad x^2 + 5x > 6 \therefore 0 \quad \not{x}^2 \quad \not{<}5x \quad 6 \quad 0$

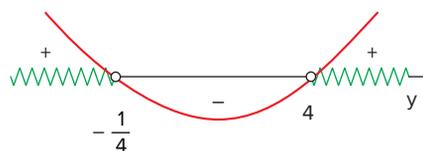
Fazendo a análise de sinais:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$ ou $S =]2; 3[$

17 $2^{2+x} - 2^{2 \quad x} > 15$

Resolução:

$2^{2+x} \quad 2^{2-x} > 15 \quad 2^2 \quad 2^x \quad \frac{2^2}{2^x} > 15$

Fazendo $2^x = y$, recaímos em uma inequação do 2º grau.

$4y \quad \frac{4}{y} \quad 15 \quad 4y \quad \frac{4}{y} \quad 15 > 0 \quad \frac{4y^2 - 15y - 4}{y} > 0$

Para $y > 4$, temos: $2^x > 4 \therefore 2^x > 2^2 \Rightarrow x > 2$.

Para $y < -\frac{1}{4}$: impossível.

$S =]2; +\infty[$

Revisando

1 Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{2^{n+4} \quad \cdot 2 \;\; 2^{n}}{2 \cdot 2^{n+3}}$

b) $(2^{n} + 2^{n \quad 1})\,(3^{n} - 3^{n \quad 1})$

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\right)^{8}$

2 Se $A = \dfrac{3^{x} + 3^{-x}}{2}$ e $B = \dfrac{3^{x} - 3^{-x}}{2}$, calcule $A^{2} - B^{2}$.

3 Construa o gráfico da função $f(x) = 2^{-2x+1}$

4 Resolva a equação exponencial $4^x - 2^x - 2 = 0$.

5 Resolva a inequação $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0$.

Exercícios propostos

1 Resolva a equação $(0,1)^{x \quad 5} = 10$.

2 Sabendo que $4^x \quad 4^{x \quad 1} = 24$, então $x^{\frac{1}{2}}$ vale:

A $\frac{\sqrt{2}}{5}$

B $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C $\sqrt{2}$

D $\frac{\sqrt{10}}{5}$

E $\frac{\sqrt{10}}{2}$

3 **UEMG 2017** Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3^y \quad \not\geq^x \quad 1 \\ 3 \cdot 2^{x-1} + 6 = 2 \cdot 3^y \end{cases}$$

Na solução desse sistema, tem-se $x = a$ e $y = b$

Assim, o valor da expressão $\frac{(a - 3b)\ (b - a)}{3(b + a)}$ é:

A 1

B $\frac{1}{2}$.

C $\frac{1}{5}$.

D $\frac{1}{3}$.

4 **UFRGS 2019** Considere a função real de variável real $f(x) = 2^{x-1}$. Com relação à $f(x)$, é correto afirmar que

A se $x < 1$, então $f(x) < 0$.

B se $x \geq 1$, então $f(x) \leq 1$.

C a função $f(x)$ é decrescente para $x < 0$ e crescente para $x \geq 0$.

D os valores das imagens de $f(x): A \Rightarrow \mathbb{R}$, em que $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0\}$, formam uma progressão aritmética.

E os valores das imagens de $f(x): A \Rightarrow \mathbb{R}$, em que $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0\}$, formam uma progressão geométrica.

5 **Enem 2019** O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida usada para classificar os países pelo seu grau de desenvolvimento. Para seu cálculo, são levados em consideração a expectativa de vida ao nascer, tempo de escolaridade e renda per capita, entre outros. O menor valor deste índice é zero e o maior é um Cinco países foram avaliados e obtiveram os seguintes índices de desenvolvimento humano: o primeiro país recebeu um valor X, o segundo $\sqrt{X}$, o terceiro $X^{\frac{1}{3}}$, o quarto X^2 e o último X^3 Nenhum des ses países zerou ou atingiu o índice máximo

Qual desses países obteve o maior IDH?

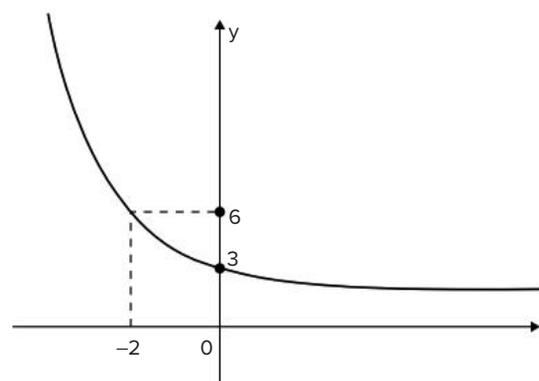
A O primeiro.

B O segundo

C O terceiro

D O quarto.

E O quinto

6 **EsPCEx 2019** A figura mostra um esboço do gráfico da função $f(x) = a^x + b$, com *a* e *b* reais, $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$. Então, o valor de $f(2) \quad f(\ \ 2)$ é igual a

Desenho ilustrativo fora de escala.

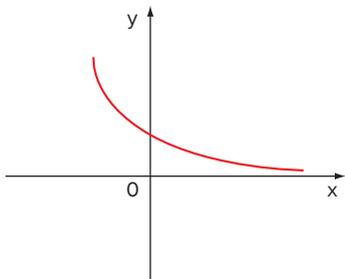
A $\frac{3}{4}$

B $\frac{15}{4}$.

C $\frac{1}{4}$

D $\frac{7}{6}$.

E $\frac{35}{6}$

7 **UFMG** Observe a figura a seguir. Nessa figura, está representado o gráfico da função $f(x) = b^x$, $b > 0$.

Se $f(1) + f(-1) = \frac{10}{3}$, a única afirmativa verdadeira sobre o valor de *b* é:

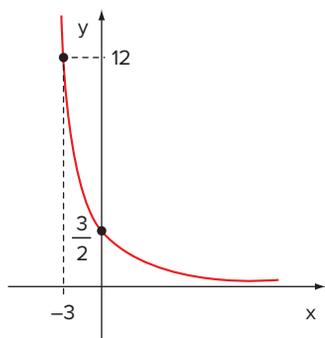
A $0 < b < \frac{1}{9}$

B $\frac{2}{9} < b < \frac{4}{9}$

C $\frac{8}{9} < b < 1$

D $1 < b < 4$

E $4 < b < 9$

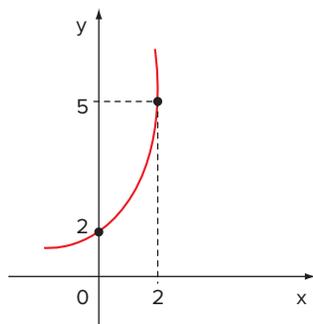
8 **UFMG** Observe a figura

Nessa figura, está representado o gráfico de $f(x) = ka^x$, sendo *k* e a constantes positivas. O valor de f(2) é:

A $\frac{3}{8}$

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{3}{4}$

D 1

9 **UFSM** A figura mostra um esboço do gráfico da função $y = a^x + b$, com *a* e *b* $\in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$

Então, o valor de $a^2 - b^2$ é:

A 3

B 1

C 0

D 1

E 3

10 **Unirio** Assinale o conjunto-solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \leq \frac{1}{4}$

A $]-\infty, 5]$

B $[4, +\infty[$

C $[5, +\infty[$

D $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$

E $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$

11 **UFRGS 2020** A concentração de alguns medicamen tos no organismo está relacionada com a meia-vida, ou seja, o tempo necessário para que a quantidade inicial do medicamento no organismo seja reduzida pela metade.

Considere que a meia-vida de determinado medica mento é de 6 horas. Sabendo que um paciente ingeriu 120 mg desse medicamento às 10 horas, assinale a alternativa que representa a melhor aproximação para a concentração desse medicamento, no organismo desse paciente, às 16 horas do dia seguinte

A 2,75 mg

B 3 mg.

C 3,75 mg

D 4 mg.

E 4,25 mg.

12 A equação $3^x - 4 = a$, com *a* real, só terá solução real para:

A $a > -4$

B $a < 4$

C $a > 3$

D $a < 3$

E $a > \frac{3}{4}$

13 **FGV** Seja a função *f*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5^{3x}$, se $f(a) = 8$, então $f\left(\frac{a}{3}\right)$ é:

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{4}$

C $\frac{1}{8}$

D 4

E 2

14 **UEL** Considere a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5^x + 3$. Seu conjunto-imagem é:

A $]-\infty; 3[$

B $]-\infty; 5[$

C $[3; 5]$

D $]3; +\infty[$

E $]5; +\infty[$

15 Unicamp 2017 Considere as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real *x*. O número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$ é igual a:

A 1.
B 2.
C 3.
D 4.

16 Enem PPL 2019 Em um laboratório, cientistas observaram o crescimento de uma população de bactérias submetida a uma dieta magra em fósforo, com generosas porções de arsênico Descobriu-se que o número de bactérias dessa população, após *t* horas de observação, poderia ser modelado pela função exponencial $N(t) = N_0e^{kt}$, em que N_0 é o número de bactérias no instante do início da observação (t = 0) e representa uma constante real maior que 1, e *k* é uma constante real positiva

Sabe se que, após uma hora de observação, o número de bactérias foi triplicado

Cinco horas após o início da observação, o número de bactérias, em relação ao número inicial dessa cultura, foi

A $3\ N_0$
B $15\ N_0$
C $3243\ N_0$
D $360\ N_0$
E $729\ N_0$

17 UFMG O produto das raízes da equação $3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ é:

A 3
B $\frac{1}{4}$
C $\frac{-1}{3}$
D 1
E $\frac{(4\sqrt{3})}{3}$

18 USF 2018 Em um experimento, o número de bactérias presentes nas culturas A e B, no instante *t*, em horas, é dado, respectivamente, por: $A(t) = 10 \cdot 2^{t-1} + 238$ e $B(t) = 2^{t+2} + 750$. De acordo com essas informações, o tempo decorrido, desde o início desse experimento, necessário para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B é

A 5 horas.
B 6 horas.
C 7 horas.
D 9 horas.
E 12 horas.

19 Uerj Pelos programas de controle de tuberculose, sabe-se que o risco de infecção R depende do tempo *t*, em anos, do seguinte modo $R = R_0\ e^{-yt}$, em que R_0 é o risco de infecção no início da contagem do tempo *t* e *y* é o coeficiente de declínio.

O risco de infecção atual em Salvador foi estimado em 2%. Suponha que, com a implantação de um programa nessa cidade, fosse obtida uma redução no risco de 10% ao ano, isto é, y = 10%.

Use a tabela a seguir para os cálculos necessários:

e^x	8,2	9,0	10,0	11,0	12,2
x	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

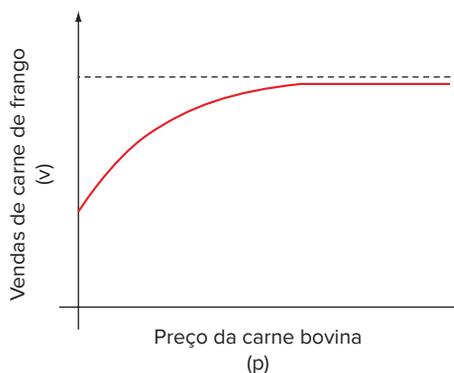
O tempo, em anos, para que o risco de infecção se torne igual a 0,2%, é de:

A 21
B 22
C 23
D 24

20 Fuvest Leia e responda:

a) Esboce, em um mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2x$
b) Baseado nos gráficos da parte a), resolva a inequação $2^x \le 2x$.
c) Qual é o maior: 2 elevado a $\sqrt{2}$ ou 2 multiplicado por $\sqrt{2}$? Justifique brevemente sua resposta.

21 Unicamp Esboce os gráficos das funções $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e $y = e^x + e^{\ x} - 3$ em um mesmo sistema de eixos ortogonais. Mostre que a equação $e^x + e^{-x} - 3 = 0$ tem duas raízes reais simétricas x = a e x = –a. Mostre, ainda, que $e^{3a} + e^{\ 3a} = 18$.

22 UEL Um economista, estudando a relação entre o preço da carne bovina (que aumenta na entressafra) e as vendas de carne de frango, encontrou uma função cujo gráfico é esboçado a seguir.

De acordo com esse gráfico, é verdade que:

A *v* é diretamente proporcional a *p*.
B *v* é inversamente proporcional a *p*.
C se *p* cresce, então *v* também cresce.
D *v* é sempre maior que *p*.
E o preço da carne de frango é inferior ao da carne bovina

Texto complementar

A história do número e

Os números irracionais sempre foram muito intrigantes na história da matemática Eles aparecem com frequência na geometria como razão entre a diagonal e o lado de um quadrado ($\sqrt{2}$), a razão do compri mento de uma circunferência e seu diâmetro (π), a razão áurea presente na natureza $\left(\frac{\sqrt{5} \quad 1}{2}\right)$, entre muitos outros

Vamos apresentar, neste texto, um número irracional muito importante, mas pouco conhecido pelos alunos do Ensino Médio, o número irracional $e = 2{,}71828$

O homem, desde os seus primórdios, teve como preocupação o acúmulo de riquezas

Um dos conceitos fundamentais quando se trata de dinheiro é a noção de juros.

Juros seriam os ganhos obtidos por quem empresta o dinheiro. Tenha certeza de que essa prática é muito antiga. Encontra-se no Museu do Louvre, em Paris, um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C., que propõe o seguinte problema: quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20% de juros compostos anualmente?

Vamos retomar a fórmula dos juros compostos:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i\%)^n$$

Com a noção de juros, as interpretações e especulações a esse respeito foram evoluindo com o tempo. Observe o exemplo a seguir.

Considere um empréstimo de R$ 100,00 com uma taxa de juros de 100% ao ano. No final de um ano, a dívida seria de $100 \cdot (1 + 100\%)^1 = 200$ reais.

Mas um ano possui dois semestres, e podemos cobrar 50% por semestre; assim, no final de um ano, a dívida seria de $100 \cdot (1 + 50\%)^2 = 225$ reais.

Prosseguindo com esse raciocínio, temos quatro trimestres com 25% por trimestre; assim, no final de um ano, a dívida seria de $100 \cdot (1 + 25\%)^4 = 244{,}14$ reais.

Esses resultados devem assustar qualquer pessoa que queira fazer um empréstimo A dúvida que paira no ar é se esse valor aumenta de forma indeterminada.

A comunidade bancária explora esse conceito de cálculo de juros ao extremo. Vamos analisar os cálculos: $C_n = 100 \cdot \left(1 + \frac{100\%}{n}\right)^n$ é o valor da dívida de 100 reais, se aplicarmos juros compostos divididos igualmente em n períodos. Assim, $C_n = 100 + \left(1 \quad \frac{1}{n}\right)^n$.

O mistério do problema resume-se em entender o número $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Observe a tabela

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10 000	2,71815
100 000	2,71827
1 000 000	2,71828
10 000 000	2,71828

Podemos observar o comportamento peculiar do número $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

À medida que *n* vai aumentando, vamos "estacionando" no número 2,71828.

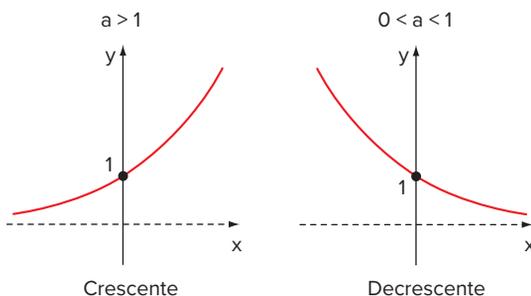
É claro que precisamos de mais fatos teóricos para concluir que o limite da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é o número 2,71828......, batizado de número *e*.

Simbolicamente, temos: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Por causa da crescente importância do comércio internacional, as transações financeiras também se intensificaram É possível que o número *e* tenha sido reconhecido nesse contexto.

Resumindo

- $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e $f(x) = a^x$; $a > 0$ e $a \neq 1$ é definida como função exponencial.
- *f* é injetora e sobrejetora.

Quer saber mais?

Site

- Leis exponenciais de ecologia populacional
  <www.ecologia info/leis ecologia-populacional htm>

Exercícios complementares

1 Quanto é o expoente em $2^x = 128$?

2 Calcule *x* de modo que se obtenha $10^{2x \quad 4} = 1$.

3 Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

b) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = (0{,}001) \cdot \left(10^{3 - x}\right)^2$

c) $10^x \quad 5^{x \quad 1} \cdot 2^{x \quad 2} = 950$

d) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

e) $\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-1}$

4 **Mackenzie** Se $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$, então *x* e *y* são os possíveis valores reais de *t*, tais que:

A $t^2 \quad 27t + 126 = 0$
B $t^2 + 27t + 126 = 0$
C $t^2 \quad 21t \quad 126 = 0$
D $t^2 + 21t - 126 = 0$
E $t^2 \quad 26t \quad 27 = 0$

5 Se $2^x + 2^{-x} = 3$, o valor de $8^x + 8^{-x}$ é:

A 12
B 18
C 21
D 24
E 27

6 A solução da equação $\left(\frac{9}{16}\right)^{x-3} = \left(\frac{12}{9}\right)^x$ é um número racional *x* tal que:

A $-1 \leq x < 0$
B $0 \leq x < 1$
C $1{,}5 < x < 2{,}5$
D $2{,}5 < x < 3{,}5$
E $2{,}5 \leq x < 3{,}5$

7 **FMP 2019** Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 27^x$.
Quanto vale $f(0{,}666\ldots)$?

A 9
B 16
C 6
D 18
E 3

8 Se $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases}$, então o valor de x y é:

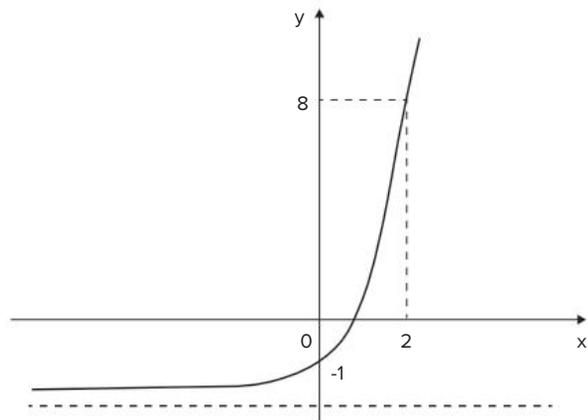
A 2
B –1
C 0
D 1
E 2

9 Determine os valores de *x* que satisfazem a equação $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1\,000^5}$

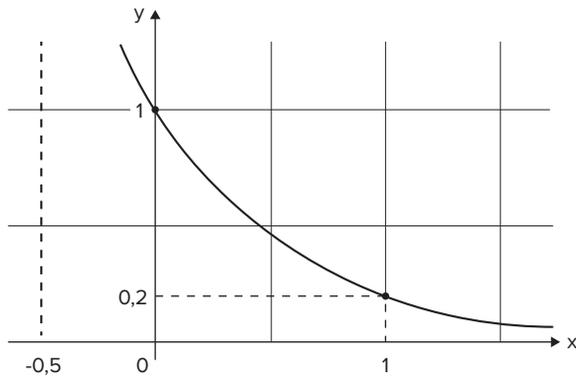
10 **FGV** Determine o conjunto-solução da equação $x^{x^3 \; - \; 8} = 1$

11 Resolva a equação exponencial $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$.

12 Determine a metade do número $2^{11} + 4^8$.

13 **EPCar 2017** A função real *f* definida por $f(x) = a \cdot 3^x + b$, sendo *a* e *b* constantes reais, está graficamente representada abaixo.

Pode se afirmar que o produto $(a \cdot b)$ pertence ao in tervalo real

A [–4, – 1[
B [1, 2[
C [2, 5[
D [5, 8]

14 **Unesp 2016** A figura descreve o gráfico de uma função exponencial do tipo $y = a^x$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Nessa função, o valor de *y* para $x = -0{,}5$ é igual a:

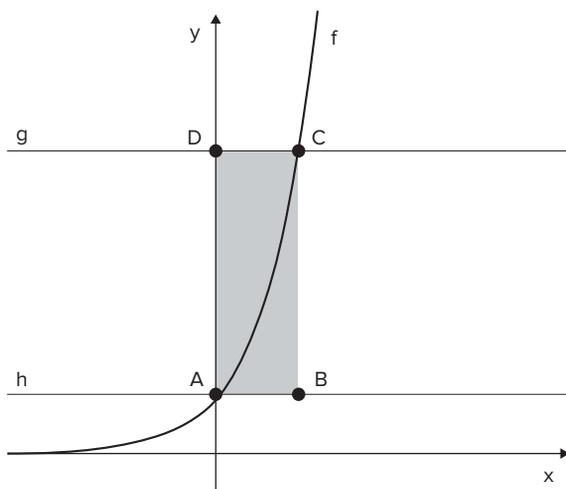
A $\log 5$

B $\log_5 2$

C $\sqrt{5}$

D $\log_2 5$

E 2,5

15 **Uerj 2017** Observe o plano cartesiano a seguir, no qual estão representados os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = 8$e $h(x) = k$, sendo $x \in \mathbb{R}$ e *k* uma constante real

No retângulo ABCD, destacado no plano, os vértices A e C são as interseções dos gráficos $f \cap h$ e $f \cap g$, respectivamente

Determine a área desse retângulo

16 **UFRGS 2016** Considere a função *f* definida por $f(x) = 1 \quad 5 \cdot 0{,}7^x$ e representada em um sistema de coordenadas cartesianas.

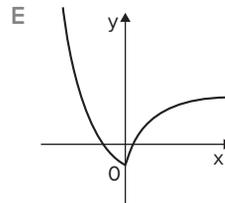
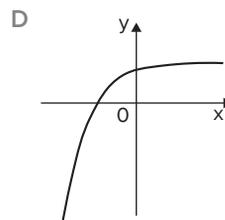
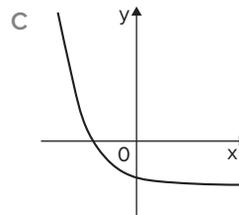
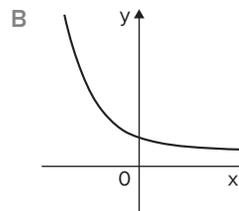
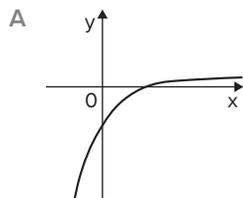
Entre os gráficos abaixo, o que pode representar a função *f* é:

A

B

C

D

E

17 Assinale a única afirmação correta.

A $(0{,}21)^2 > (0{,}21)^3$

B $(0{,}21)^4 > (0{,}21)^3$

C $(0{,}21)^{-2} < 1$

D $(0{,}21)^7 < (0{,}21)^8$

E $(0{,}21)^{0{,}21} > (0{,}21)^{0{,}20}$

18 **ITA 2016** Se *x* é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ é igual a:

A 285

B 286

C 287.

D 288.

E 289.

19 **EEAR 2019** Considere que o número de células de um embrião, contadas diariamente desde o dia da fecun dação do óvulo até o 30º dia de gestação, forma a sequência: 1, 2, 4, 8, 16, ...

A função que mostra o número de células, conforme o número de dias x, é $f: \{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 30\} \Rightarrow \mathbb{N}$; f(x) =

A 2^{x-1}

B $2x - 1$

C $2^x \quad 1$

D $x^2 - 1$

FRENTE 1

20 Uefs 2017 Considerando-se que, sob certas condições, o número de colônias de bactérias, *t* horas após ser preparada a cultura, pode ser dado pela função $N(t) = 9^t \quad 2 \cdot 3^t + 3$, $t \geq 0$, pode-se estimar que o tempo mínimo necessário para esse número ultrapassar 678 colônias é de:

A 2 horas
B 3 horas.
C 4 horas.
D 5 horas
E 6 horas

21 Unesp 2017 Admita que o número de visitas diárias a um site seja expresso pela potência 4^n, com *n* sendo o índice de visitas ao site. Se o site S possui o dobro do número de visitas diárias do que um site que tem índice de visitas igual a 6, o índice de visitas ao site S é igual a:

A 12
B 9.
C 8,5.
D 8
E 6,5.

22 Mackenzie Se $4^x = 3$ e $4^y = 9$, então $(0{,}125)^{-4x+2y}$ vale:

A 1
B 2
C 4
D $\log_4 3$
E $\log_4 9$

23 PUC Sendo $f(x) = 2^x$, a expressão $\dfrac{[f(x+y) - f(x)]}{y}$ é igual a:

A $\dfrac{[(2^y \quad 1) \cdot 2^x]}{y}$

B $\dfrac{[(2^x - 1) \cdot 2^y]}{y}$

C $\dfrac{(2^x - 2^y)}{y}$

D $\dfrac{(2^x + y)}{y}$

E 1

24 Mackenzie 2018 Se $3^m = a$ e $3^n = b$, $a > 0$ e $b > 0$, então o valor de $3^{\frac{m-2n}{2}}$ é igual a:

A $\sqrt{a} \quad b$

B $\dfrac{a}{2} + b$

C $\dfrac{a}{2} - b$

D $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$

E $\dfrac{a \quad b}{2}$

25 UFSC O valor de *x* que satisfaz a equação: $2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{2x+2} = 28$ é?

26 PUC-Campinas Seja *f* a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$. O valor de $\dfrac{[f(x+1) + f(x+2) + f(x+3)]}{[f(x+4) + f(x+5)]}$ é:

A $\dfrac{39}{16}$

B $\dfrac{21}{16}$

C $\dfrac{5}{12}$

D $\dfrac{7}{24}$

E $\dfrac{1}{8}$

27 Mackenzie 2019 A soma das raízes da equação $(4^x)^{2x-1} = 64$ é igual a:

A $\dfrac{1}{2}$

B -1

C $\dfrac{1}{2}$

D 1

E $\dfrac{5}{2}$

28 Mackenzie Analisando os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $g(x) = \quad x^2 + x$ e $f(x) = 2^x$, considere as afirmações a seguir

I. $f(x) > g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
II. Não existe $x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)$.
III $f(x)$ e $g(x)$ são inversíveis.

Então:

A somente a (I) é verdadeira.
B somente a (II) é verdadeira.
C somente (I) e (II) são verdadeiras.
D somente (I) e (III) são verdadeiras.
E somente (II) e (III) são verdadeiras.

29 **Mackenzie** Analise graficamente as funções (I), (II), (III) e (IV) a seguir.

I $f(x) = x + (2|x|)/x$ de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$

II. $g(x) = 3x - x^3$ de [$\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$], em [–2, 2]

Obs : g (–1) é mínimo

III. $h(x) = (1/3)x$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$

IV $t(x) = 3$, de $\mathbb{R}$ em {3}

O número de funções sobrejetoras é:

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

30 **UFJF 2018** Durante o início de um experimento um pesquisador analisou uma população com 101 indivíduos. Após *t* anos a população passou a ser de 181 indivíduos, e depois de t^2 anos da análise inicial a população passou para 6661 indivíduos. A função $y = b^x + c$, com $b > 1$, determina o crescimento da população após *x* anos.
Marque a alternativa contendo o valor da soma b + c.

A 103
B 104
C 109
D 110
E 111

31 **FGV** Se $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$ e $h(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$, então f(g(x))   f(h(x)) é igual a:

A $3^{\ x}$
B $3^{\ 2x}$
C 3^{2x}
D 0
E 1

32 **Unicamp** O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha 3\beta^t$, onde T(t) é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante *t*, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de –18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a –16 °C após 270 minutos

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.
b) Determine o valor de *t* para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\dfrac{2}{3}\right)$°C superior à temperatura ambiente.

33 **Unicamp** A função $L(x) = a \cdot e^{bx}$ fornece o nível de iluminação, em luxes, de um objeto situado a *x* metros de uma lâmpada.

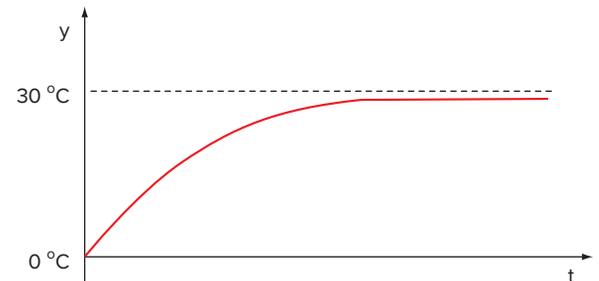
a) Calcule os valores numéricos das constantes a e b, sabendo que um objeto a 1 metro de distância da lâmpada recebe 60 luxes e que um objeto a 2 metros de distância recebe 30 luxes.
b) Considerando que um objeto recebe 15 luxes, cal cule a distância entre a lâmpada e esse objeto.

34 Supondo uma taxa de inflação de 20% ao ano, os preços deverão dobrar em, aproximadamente:

A 1 ano.
B 2 anos.
C 3 anos.
D 4 anos.
E 5 anos.

35 **ITA** A lei de decomposição do radium, no tempo $t \geq 0$, é dada por $M(t) = C \cdot e^{-kt}$, onde M(t) é a quantidade de radium no tempo *t*; C e *k* são constantes positivas ("e" é o número neperiano, e = 2,71828.) Se a metade da quantidade primitiva M(0) desaparece em 1600 anos, qual a quantidade perdida em 100 anos?

36 **UnB** Considere um objeto a uma temperatura inicial y_0, colocado em um meio com temperatura constante T. A taxa de transferência de calor do objeto para o am biente, ou vice-versa, é proporcional à diferença entre as temperaturas do objeto e do ambiente. Assim, é possível concluir que a temperatura y(t) do objeto, no instante $t \geq 0$, é dada por $y(t) = (y_0 - T)\, e^{-tb} + T$, em que $b > 0$ é a constante de proporcionalidade.
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir

- Se a temperatura inicial do objeto é superior à do ambiente, então a função y(t) é decrescente.
- Se a temperatura inicial do objeto é diferente da do ambiente, então, para algum instante $t_1 > 0$, a constante b é dada por $1/t_1 \ln(y_0 \ \ T/y(t_1) \ \ T)$.
- Se a temperatura inicial do objeto é diferente da do ambiente, então, para todo t > 0, tem-se $|y_0 \ \ T| > |y(t) \ \ T|$
- Se um objeto com uma temperatura inicial de 0 °C for colocado em um ambiente à temperatu ra de 30 °C, então o gráfico a seguir representa a função y(t)

37 **UFV** Seja a função real $f(x) = a^x$, $a > 1$, o conjunto dos valores de x para os quais $f(x^2 \ \ 3) > f(6)$ é:

A $\{x \in \mathbb{R} \mid \ \ 3 \leq x \leq 3\}$
B $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
C $\{x \in \mathbb{R} \mid \ \ x \leq 3\}$
D $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \ \ 3 \text{ ou } x > 3\}$
E $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \ \ 3 \text{ ou } x \geq 3\}$

38 **UEL** A relação a seguir descreve o crescimento de uma população de microrganismos, sendo P o número de microrganismos e *t* os dias após o instante 0. O valor de P é superior a 63000 se, e somente se, *t* satisfizer à condição:

$P = 64000 \cdot (1 - 2^{-0,1t})$.

A $2 < t < 16$
B $t > 16$
C $t < 30$
D $t > 60$
E $32 < t < 64$

39 **ITA** Uma vez que para todo $x \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade $x^n > n(x \quad 1)$, temos como consequência que, para $0 < x < 1$ e $n \in \mathbb{N}$ se tem:

A $x^{n-1} < [n(1 + x)]^{-1}$
B $x^{n-1} < [(n + 1)(1 + x)]^{\ 1}$
C $x^{n-1} < [n^2(1 - x)]^{-1}$
D $x^{n-1} < [(n + 1)(1 - x)]^{-1}$
E $x^{n-1} < [n(1 \quad x)]^{-1}$

40 Em um período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada pela função $q(t) = q_0 \cdot 2^{\ \ 0,1t}$, sendo q_0 a quantidade inicial de água no reservatório e q(t) a quantidade de água após *t* meses. Em quantos meses a quantidade de água no reservatório se reduzirá à metade do que era no início?

A 5
B 7
C 8
D 9
E 10

41 Considere a função dada por

$f(x) = 3^{2x+1} + m \cdot 3^x + 1$.

a) Quando $m = -4$, determine os valores de *x* para os quais $f(x) = 0$.
b) Determine todos os valores reais de *m* para os quais a equação $f(x) = m + 1$ não tem solução real

42 O número de soluções distintas da equação $2^x \quad 2^{-x} = K$, $K \in \mathbb{R}$ é:

A 2, $\forall$ K $\in \mathbb{R}$.
B 2, somente se $K > 0$.
C 1, $\forall$ K $\in \mathbb{R}$.
D 1, somente se $K \neq 0$.
E 1, somente se $K < 0$.

43 Represente no sistema cartesiano o gráfico da função real definida por:

$$f(x) = \frac{2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 3}{2^x \quad 1}$$

44 **ITA** Resolva a equação $3e^{x^2} - 2e^{-x^2} = -1$.

45 **ITA** Sendo $a \in \mathbb{R}$, com $a > 1$, resolva a inequação $a^{2x(1 \quad x)} > a^{x \quad 1}$.

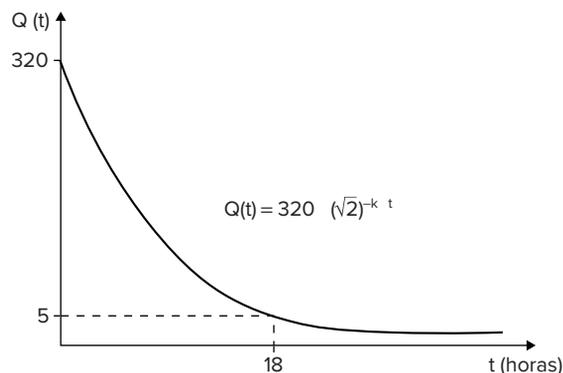
46 **ITA** Considere a equação $\dfrac{a^x \quad a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = m$, $x \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. Determine todos os valores de *m* para os quais a equação admite solução real.

47 Prove que, se *a* e *b* $\in \mathbb{R}_+^*$, então $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

48 **FICSAE 2019** Determinar a massa dos animais é extremamente importante para a administração de medicamentos Há circunstâncias em que é possí vel estimar a massa de alguns animais sem o uso de balanças. Por exemplo, é possível determinar a massa aproximada (m) de um potro, em kg, em função de seu perímetro torácico (s), em cm, por meio da fórmula

$$m = \frac{s - 25}{0,7}$$

Para tratamentos anti-inflamatórios com Meloxican, a dosagem indicada para equinos é de 0,6 mg desse princípio ativo por kg de massa corporal Esse medicamento é comercializado em frascos de 100 ml contendo 2 g de Meloxican.

a) Considere um potro, de perímetro torácico igual a 1,16 m que será tratado com esse anti-inflamatório. Determine a massa aproximada desse potro, em kg, segundo a fórmula, e a dosagem de Meloxi can, em mL, a ser administrada ao animal.
b) Em um outro potro, a quantidade Q(t), em mg, de Meloxican presente no organismo do animal, *t* horas após a aplicação, é descrita pelo gráfico e modelada pela função:

Determine o valor da constante *k* e a quantidade de Meloxican, em mg, presente no organismo desse animal 24 horas após a aplicação.

FRENTE 2

CAPÍTULO

1

Conjuntos numéricos

A princípio a Matemática surge como a ciência que observa números nos mais diversos padrões da realidade. As técnicas de contagem, ordenação e mensuração, há tanto tempo estudadas na Matemática, mostraram-se tão úteis à humanidade que hoje, centenas de anos depois, seus estudos continuam a proporcionar o surgimento de novas tecnologias.

A profundidade dos conceitos de número e numeral foi discutida por grandes filósofos como Giuseppe Peano, Gottlob Frege, Bertrand Russell, George Boole, Georg Cantor, entre outros. Este capítulo pretende explorar os aspectos práticos e a variedade de interpretações de cada tipo de número.

Introdução

A teoria dos números estabelece alguns critérios para a construção dos significados do número. Dois desses critérios merecem destaque Um deles é a relação de inclusão entre os conjuntos numéricos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, em que:

- $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais;
- $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{C}$ representa o conjunto dos números complexos.

O símbolo $\subset$ indica a relação de inclusão e pode ser lido como "está contido em".

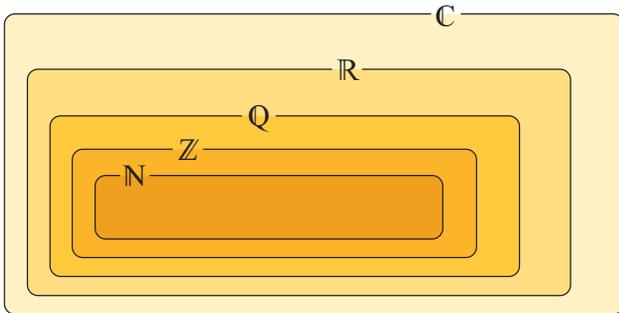



Fig. 1 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

O outro critério é uma propriedade específica dessas relações de inclusão. Sendo X e Y dois desses conjuntos, se X está contido em Y então todas as propriedades aritméticas válidas no conjunto X também são válidas no conjunto Y. Isso funciona como uma espécie de "herança genética", pois o conjunto Y deve ser construído a partir dos elementos do conjunto X

Por outro lado, o conjunto Y deve possuir outras propriedades aritméticas que são impossíveis de serem enunciadas no conjunto X, de modo que o conjunto Y herda todas as propriedades de seu subconjunto X, mas também introduz novas propriedades e novas interpretações para os números que são seus elementos, sempre estendendo o significado do número

Tipos de números

Da relação de ordem entre os conjuntos numéricos pode-se entender que, se um número é natural, então ele também é inteiro, racional, real e complexo. Veja o número 10 (dez), por exemplo:

$$10 \in \mathbb{N} \Rightarrow 10 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 10 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 10 \in \mathbb{R} \Rightarrow 10 \in \mathbb{C}$$

Em contrapartida, números que não são inteiros não podem ser naturais. Veja o exemplo do número 0,2 (dois décimos):

$$0{,}2 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 0{,}2 \notin \mathbb{N}$$

Mas o fato de 0,2 ser um número racional implica ele também ser número real e complexo:

$$0{,}2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 0{,}2 \in \mathbb{R} \Rightarrow 0{,}2 \in \mathbb{C}$$

Além de pertencerem a pelo menos um dos cinco conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$), números podem ser classificados de muitas outras formas. Por exemplo, todo número inteiro pode ser classificado como número par ou ímpar.

Entre os números naturais há os que são primos, compostos, quadrados perfeitos, cubos perfeitos, triangulares, etc

Os números não inteiros podem ter quantidade finita ou infinita de casas decimais. Os números que admitem infi nitas casas decimais em sua representação são separados em dízimas periódicas e números irracionais.

Pelo sinal, um número pode ser classificado como positivo ou negativo, havendo um único número que não é positivo nem negativo: o zero. Dizemos que zero é o número nulo.

Operações com números

Os números são entidades matemáticas que intera gem por meio de operações aritméticas como a adição, por exemplo, produzindo um novo resultado numérico. Veja alguns exemplos:

$$3 + 7 = 10$$

$$10 + 10 = 0 \qquad \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$$

$$0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75 \qquad \log(2) + \log(5) = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \qquad 0 + \pi = \pi$$

Algumas operações são representadas por símbolos que se chamam operadores:

- O operador de adição é principalmente representado pelo símbolo (+)

$$1 + 2 = 3$$

- O operador de subtração é principalmente representado pelo símbolo (–).

$$3 \quad 2 = 1$$

- O operador de multiplicação é tanto representado por (×) quanto por (·), podendo ser omitido em alguns casos.

$$2 \cdot 3 = 6$$
$$4 \times 5 = 20$$

- O operador de divisão pode ser representado por (÷), por (/) e ainda pela barra de fração.

$$6 \div 3 = 2$$
$$20/5 = 4$$

- O operador de potenciação é representado por (^) e pode ser omitido se escrevermos o segundo número mais alto que o primeiro (sobrescrito).

$$2\hat{}3 = 8$$
$$2^3 = 8$$

- O operador de radiciação ou de extração de raízes é representado pelo símbolo (√).

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Outras operações aritméticas podem ser representadas por siglas:

- A extração de logaritmos é representada pela sigla **log**

$$\log_2(8) = 3$$

- O mínimo múltiplo comum, pela sigla **mmc**.

$$\text{mmc}(4, 6) = 12$$

- O máximo divisor comum, pela sigla **mdc**.

$$\text{mdc}(4, 6) = 2$$

Entre essas operações, muitas são bem definidas em todos os conjuntos numéricos, desde os naturais até os complexos. Algumas não exatamente da mesma maneira, como a divisão, que nos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ produz quociente e resto, mas produz apenas quociente nos demais conjuntos numéricos.

Fechamento de um conjunto em relação a uma operação

Considera-se um conjunto numérico K fechado em relação a uma operação aritmética, se essa operação gera apenas resultados pertencentes a K, quando aplicada a seus elementos.

Representando por * uma operação aritmética genérica, um conjunto K é fechado em relação a * se, e somente se:

$$\left.\begin{matrix} a \in K \\ b \in K \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a * b) \in K$$

Nessa implicação lógica, *a* e *b* representam números do conjunto K e $(a*b)$ representa o resultado produzido pela operação * aplicada aos números *a* e *b*.

O conjunto $\mathbb{N}$, por exemplo, é fechado em relação à adição, à multiplicação, à potenciação, ao mmc e ao mdc, mas não é fechado em relação à operação de subtração

Quando um conjunto K não é fechado em relação a alguma operação*, a concepção de número pode ser ampliada para abranger o significado dos resultados que escapam de K. E assim, a partir dos elementos de $\mathbb{N}$, podem ser construídos os demais conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Operações comutativas e associativas

As propriedades comutativa e associativa de uma operação aritmética dizem respeito à ordem ou posição dos números que participam da operação: o primeiro, o segundo, o terceiro, etc

A comutatividade de uma operação pode ser observada nos resultados de sua aplicação aos pares de números. Uma operação * é comutativa quando a * b e b * a produzem o mesmo resultado, quaisquer que sejam os números *a* e *b*

Já a associatividade de uma operação precisa ser observada nos resultados de sua aplicação a uma sucessão de pelo menos três números Uma operação * é associativa quando $(a*b)*c$ e $a*(b*c)$ produzem o mesmo resultado, quaisquer que sejam os números *a*, *b* e *c* De modo que, se uma operação é associativa, não há necessidade de indicar por parênteses em qual ordem ela deve ocorrer, pois a * b * c pode ser calculado tanto da direita para a esquerda quanto da esquerda para a direita sem modificação no resultado

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Fig. 2 Operação associativa

! Atenção

Entre as operações aritméticas mencionadas neste capítulo apenas quatro são comutativas e associativas: a adição, a multiplicação, o mmc e o mdc.

Comutativas	Associativas				
a + b = b + a	a + b + c	=	(a + b) + c	=	a + (b + c)
a · b = b · a	a · b · c	=	(a · b) · c	=	a · (b · c)
mmc(a, b) = mmc(b, a)	mmc(a, b, c)	=	mmc(mmc (a, b), c)	=	mmc(a, mmc(b, c))
mdc(a, b) = mdc(b, a)	mdc(a, b, c)	=	mdc(mdc (a, b), c)	=	mdc(a, mdc(b, c))

A atribuição indevida dessas propriedades a outras operações aritméticas como a divisão e a potenciação, por exemplo, é responsável por boa parte dos erros cometidos em resoluções de questões.

Os números como soluções de equações

Na tecnologia, os números se prestam, em grande parte, a responder perguntas de forma precisa Na linguagem matemática muitas dessas perguntas são expressas por sentenças algébricas em que um valor desconhecido *x* deve ser encontrado Essas sentenças são chamadas de equações. Veja alguns exemplos na tabela a seguir:

Pergunta	Equação
Qual número deve ser somado ao número 3 para se obter o número 9?	$x + 3 = 9$
Qual número deve ser multiplicado por 3 para se obter o número 15?	$3 \cdot x = 15$
Qual número deve ser elevado ao expoente 3 para se obter o número 64?	$x^3 = 64$

Todas as equações do quadro foram enunciadas usando apenas números naturais: 3, 9, 15 e 64, e possuem soluções que também são números naturais. Essas soluções resultam das aplicações das operações contrárias, respectivamente, à adição, multiplicação e potenciação, que são, nessa ordem, as operações de subtração, divisão e radiciação:

- $x + 3 = 9 \iff x = 9 - 3 = 6$
- $3 \cdot x = 15 \iff x = 15 \div 3 = 5$
- $x^3 = 64 \iff x = \sqrt[3]{64} = 4$

Mas nem toda equação enunciada com números naturais admite solução natural. Veja alguns exemplos na tabela a seguir.

Pergunta	Equação
Qual número deve ser somado ao número 9 para se obter o número 4?	$x + 9 = 4$
Qual número deve ser multiplicado por 4 para se obter o número 9?	$4 \quad x = 9$
Qual número deve ser multiplicado por 9 para se obter o número 4?	$9 \cdot x = 4$
Qual número deve ser elevado ao expoente 4 para se obter o número 9?	$x^4 = 9$

Observe que os resultados destas equações não per tencem ao conjunto dos números naturais:

- A solução da equação $x + 9 = 4$ é um número negativo.

$$x + 9 = 4 \iff x = 4 - 9 = -5$$

- A solução da equação $4 \cdot x = 9$ é um número que se escreve com apenas duas casas decimais.

$$4 \cdot x = 9 \iff x = 9 \div 4 = 2{,}25$$

- A solução da equação $9 \cdot x = 4$ tem como solução um número que, para ser escrito na forma decimal, precisa de uma quantidade infinita de casas decimais repetidas. Representações numéricas desse tipo são chamadas de dízimas periódicas.

$$9 \cdot x = 4 \iff x = 4 \div 9 = 0{,}4444444444444444444...$$

- A equação $x^4 = 9$ tem como solução um número que, para ser escrito na forma decimal, precisa de uma quantidade infinita de casas decimais em que não se observa padrão de repetição algum. Números desse tipo são chamados de irracionais.

$$x^4 = 9 \iff x = \sqrt[4]{9} = 1{,}7320508075688772935274 5$$

De tais resultados derivam-se novas interpretações e as novas formas de representações numéricas, que estudaremos no decorrer do capítulo

Os números naturais

O conjunto dos números naturais pode ser definido através de duas teorias diferentes: a ordinal e a cardinal. As diferenças de interpretação desses tipos de números naturais são tão profundas, que as palavras usadas na língua portuguesa para designar os numerais de cada tipo pertencem a classes gramaticais diferentes.

Numeral ordinal
Primeiro ($1^{\underline{o}}$)
Segundo ($2^{\underline{o}}$)
Terceiro ($3^{\underline{o}}$)
⋮

Numeral cardinal
Zero (0)
Um (1)
Dois (2)
Três (3)
⋮

Os números cardinais

A cardinalidade de um conjunto finito é a quantidade de elementos distintos que ele possui. Indica-se por n(K) a cardinalidade de um conjunto K.

Como exemplos, considere os conjuntos A dos meses do ano e J dos dias do mês de janeiro. Repare que, mesmo não sendo numéricos, esses conjuntos definem números:

- $n(A) = 12$
- $n(J) = 31$

Natural cardinal é todo número capaz de indicar a quantidade de elementos de um conjunto finito. Esse tipo de interpretação do número natural é o que há de comum entre dois conjuntos de elementos completamente diferentes como, por exemplo, o conjunto dos gases nobres da tabela periódica e o conjunto das bandas do espectro luminoso estudado por Newton.

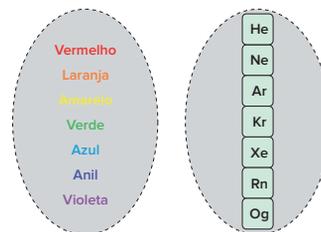



Fig 3 Conjuntos de mesma cardinalidade.

A construção formal do conjunto desses números naturais está fundamentada sobre dois conceitos da teoria dos conjuntos, que são o número zero e a relação de sucessão.

- O número zero indica a quantidade de elementos do conjunto vazio: $0 = n(\varnothing)$.
- A relação de sucessão é a que existe entre as cardinalidades de um conjunto K e do conjunto que se obtém acrescentando-se um único elemento ao conjunto K.

A partir desses conceitos enunciam-se os seguintes postulados:

I. Zero é um número natural.
II. Todo número natural possui sucessor.
III. Zero não é sucessor de nenhum número natural.
IV. Não há dois números naturais diferentes que possuam o mesmo sucessor.
V. Se um conjunto numérico possui o número zero e o sucessor de qualquer um de seus elementos, então esse é exatamente o conjunto dos números naturais.

Este último postulado é conhecido como o Princípio da Indução Matemática.

Postulado: princípio ou fato não demonstrado que se admite como verdadeiro.

Os números ordinais

Estes numerais servem como ferramenta de localização espacial, como na frase “Vire na 3ª rua à esquerda” ou temporal, como em “Março é o 3º mês do ano”.

Antonio Guillem/Shutterstock.com

Ederella/Shutterstock.com

Observe que tanto a 3ª rua quanto o 3º mês são únicos em suas existências e que, nesses casos, o número 3 foi utilizado para indicar apenas uma unidade Essa é a característica principal de um número natural ordinal.

Atenção

Zero não é número natural ordinal.

Independentemente da interpretação, cardinal ou ordinal, dois números naturais são denominados consecutivos se diferem em apenas uma unidade

Além disso, ℕ é um conjunto numérico discreto. Isso significa que, entre dois números naturais consecutivos, não há nenhum outro número natural. Considere a ordem de chegada dos atletas que participam de uma corrida e observe, por exemplo, que não existe colocação intermediária entre o 3º e o 4º lugar.

Em linguagem matemática:

$$\left.\begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n < m < n+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \notin \mathbb{N}$$

Defasagem cardinal ordinal

Usamos o asterisco para diferenciar os conjuntos de números naturais cardinais e ordinais. Assim:

- N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, }
- N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...}

Em todos os demais conjuntos numéricos o asterisco é usado para indicar que o número zero não é elemento do conjunto considerado.

É importante observar que há uma defasagem entre os elementos desse conjunto. Do fato de zero ser o primeiro número natural decorre que o número 12 é o 13º número natural, por exemplo.

A defasagem entre os elementos desses conjuntos é a responsável pelo ano de 2020 pertencer ao século 21, entre outros exemplos cotidianos.

Atenção

Sendo *a* e *b* dois números inteiros tais que **a < b**, temos que:

I. De *a* até *b* há exatamente **(b a) + 1** números inteiros.

II Entre *a* e *b* há exatamente **(b a) 1** números inteiros.

Exercícios resolvidos

1 Responda às seguintes perguntas:

a) Quantos números naturais podem ser contados a partir do número 10 até o número 100?

b) Quantos números naturais existem entre os números 10 e 100?

Resolução:

a) De 10 a 100 podem ser contados (100 10) + 1 = = 91 números.

b) Entre 10 e 100 existem (100 – 10) – 1 = 89 números.

2 Uma corrida de rua disputada pelas crianças de um con domínio tinha as seguintes regras: na largada todas as crianças deveriam estar com uma das mãos encostadas no primeiro poste da calçada de um dos lados da rua, e a criança que encostasse primeiro a mão no oitavo pos te dessa mesma calçada venceria a corrida

A distância do primeiro para o segundo poste é de 50 metros, do segundo para o terceiro, 70 metros, do terceiro para o quarto, 90 metros, e assim por diante, ou seja, as distâncias entre dois postes consecutivos aumentam de vinte em vinte metros.

Com esses dados, podemos afirmar que a corrida toda tem

A 190 metros

B 210 metros

C 770 metros.

D 960 metros.

E 1 170 metros.

Resolução:

Como oito postes consecutivos determinam apenas sete distâncias entre dois postes consecutivos, temos que o comprimento total da corrida, em metros, é igual à soma das seguintes sete parcelas:

$$50 + 70 + 90 + 110 + 130 + 150 + 170 = 770$$

A corrida tem 770 metros

Alternativa: D.

FRENTE 2

Operações com números naturais

Como já foi mencionado, esse conjunto numérico é fechado em relação às operações de adição, multiplicação, potenciação, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. Isso significa que, sendo **a** e **b** dois números naturais quaisquer:

$(a + b) \in \mathbb{N}$ $(a \cdot b) \in \mathbb{N}$ $(a^b) \in \mathbb{N}$

$mmc(a, b) \in \mathbb{N}$ $mdc(a, b) \in \mathbb{N}$

Mas o conjunto $\mathbb{N}$ não é fechado em relação às operações de subtração, divisão, radiciação e extração de logaritmos Por isso devem ser estabelecidas condições de existência (CE) para a execução dessas operações, com os elementos de $\mathbb{N}$.

Adição em $\mathbb{N}$

A operação de adição pode ser aplicada a qualquer quantidade de números naturais Os números que participam da adição são chamados de parcelas, e o resultado da operação é chamado de soma.

Representando por n' o sucessor de um número natural *n*, a operação de adição começa a ser definida pelas seguintes proposições:

- $n + 0 = n$
- $n + 1 = n'$

A primeira sentença define o número zero como o elemento neutro da operação, e da segunda sentença deve-se entender que não existe número natural maior que *n* e menor que seu sucessor (n + 1).

Representando por m' o sucessor de outro número natural *m*, a operação de adição fica finalmente definida por:

- $n + m' = (n + m)'$

Além das sentenças que a definem, a adição possui as propriedades comutativa e associativa:

- $n + m = m + n$
- $(n + m) + p = n + (m + p)$

Subtração em $\mathbb{N}$

A operação de subtração é aplicada a apenas dois números naturais de cada vez. Os números que participam da subtração são o minuendo e o subtraendo, e o resultado é chamado de diferença ou de resto

O minuendo designa o número que será reduzido de certa quantidade que, por sua vez, é indicada pelo subtraendo da operação.

Sendo *a* e *b* dois números naturais, a diferença (a – b) só é possível nesse conjunto se o número *a* for maior ou igual ao número *b*.

- $a \geq b \Leftrightarrow (a \quad b) \in \mathbb{N}$
- $a < b \Leftrightarrow (a \quad b) \notin \mathbb{N}$

A impossibilidade da subtração em outra ordem caracteriza essa operação como não sendo comutativa, mas é o fato dessa operação não ser associativa que merece mais atenção, pois como $(a - b) - c \neq a - (b - c)$, algumas propriedades devem ser observadas.

Veja:

- $a - b - c = (a - b) - c = a - (b + c)$
- $a - (b - c) = a - b + c = a + c - b$

O número zero funciona como elemento neutro da subtração apenas no lugar do subtraendo:

- $a \quad 0 = a$

O número zero também é o resultado da subtração de dois números iguais:

- $a - a = 0$

A subtração é a operação contrária da adição. Isso significa que, sendo *a*, *b* e *c* números naturais:

$$a + b = c \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \quad b \\ b = c - a \end{cases}$$

Multiplicação em $\mathbb{N}$

A operação de multiplicação pode ser aplicada a qual quer quantidade de números naturais. Os números que participam da multiplicação são chamados de fatores e o resultado da operação é chamado de produto.

A operação de multiplicação começa a ser definida pelas seguintes proposições:

- $1 \quad n = n$
- $0 \cdot n = 0$

A primeira sentença define o número 1 como o elemento neutro da operação, e a segunda mostra que a multiplicação de qualquer número por zero resulta no próprio zero.

Representando por m' o sucessor do natural *m*, a operação de multiplicação fica finalmente definida por:

- $n \cdot m' = n \cdot m + n$

Dessa última expressão deduzem-se as propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição e à subtração:

- $n \quad (m + p) = n \quad m + n \quad p$
- $n \quad (m \quad p) = n \quad m \quad n \quad p$

Além das sentenças que a definem, a multiplicação também possui as propriedades comutativa e associativa:

- $n \cdot m = m \cdot n$
- $(n \cdot m) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$

! Atenção

Em relação à participação do zero na multiplicação, é muito importante observar também a inexistência de dois números naturais diferentes de zero que produzam resultado zero quando multiplicados um pelo outro Portanto, se um produto de números naturais é igual a zero, então um dos fatores deve, necessariamente, ser o próprio número zero.

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Divisão euclidiana em $\mathbb{N}$

A operação de divisão é aplicada a apenas dois números naturais de cada vez. Os números que participam da divisão são o dividendo e o divisor, e os resultados são chamados de quociente e de resto.

No esquema a seguir, o dividendo *n* designa a quantidade que será repartida em partes iguais, o divisor *d* indica quantas

são essas partes, o quociente *q* indica o valor de cada uma delas e o resto *r* indica quantas unidades sobram da partição

Sendo *n* e *d* dois números naturais, a divisão *n* por *d* só é possível, nesse conjunto, se o número *d* for diferente de zero. Neste caso, para garantir que os valores do quociente e o resto sejam corretamente obtidos, duas relações algébricas devem ser verificadas, uma de igualdade e outra de desigualdade:

- $n = q \cdot d + r$
- $0 \leq r < d$

Observe que a relação de desigualdade não pode ser verificada quando $d = 0$, pois não há número natural *r* que satisfaça $0 \leq r < 0$. Note também que, como $0 \leq r < d$, o valor de *q*, que satisfaz a igualdade $n = q \cdot d + r$, deve ser máximo.

Exercícios resolvidos

3 Considere n como o maior número inteiro de dois algarismos que satisfaz às seguintes condições:

I Dividindo-se o número n por 5 obtém-se resto igual a 3.

II Dividindo-se por 5 o número formado pelos mesmos algarismos de n só que em ordem contrária, o resto obtido é igual a 2.

Nestas condições, a soma dos quadrados dos algarismos que formam o número n é igual a:

A 113 **B** 100 **C** 85 **D** 29 **E** 14

Resolução:

Os números inteiros que deixam resto 3 na divisão por 5 terminam por 3 ou por 8, portanto, o algarismo das unidades de *n* é 3 ou 8.

Os números inteiros que deixam resto 2 na divisão por 5 terminam por 2 ou por 7, portanto, o algarismo das dezenas de *n* é 2 ou 7.

Assim, os únicos inteiros positivos que satisfazem às duas condições são: 23, 28, 73 ou 78.

A soma dos quadrados dos algarismos do maior desses números (78) é $7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$.

Alternativa: A.

4 Qual é o 2017º algarismo da forma decimal da fração $\frac{2\,017}{7}$?

A 1 **B** 4 **C** 2 **D** 8 **E** 5

Resolução:

O quociente inteiro da divisão de 2017 por 7 é 288 e o resto é igual a 1.

Portanto, a parte decimal desse quociente é a dízima 0,142857142857142857 cujo período possui 6 algarismos.

Então, descontando os 3 algarismos da parte inteira, devemos procurar pelo 2017 – 3 = 2014º algarismo da dízima.

Como a divisão de 2014 por 6 deixa resto 4, o algarismo procurado coincide com o 4º algarismo do período da dízima, que é o algarismo 8.

Alternativa: D.

Múltiplos e divisores

Uma relação muito especial pode ser observada quando o resto da divisão de um número *a* por um número *b* é igual a zero. Ela tem um caráter dual e é designada pelos termos múltiplo e divisor:

a é múltiplo de *b* ⇔ *b* é divisor de *a*

Quando isso acontece, escreve-se $b|a$ que pode ser lido como: "*b* divide *a*".

Dado um número natural qualquer *k*, o conjunto M(k) dos múltiplos naturais desse número *k* pode ser obtido multiplicando-o por todos os números naturais.

- $M(0) = \{0\}$
- $M(1) = \mathbb{N}$
- $M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ...\}$
- $M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, ...\}$

⋮

- $M(k) = \{0, k, 2 \cdot k, 3 \cdot k, 4 \cdot k, 5 \cdot k, 6 \cdot k, 7 \cdot k, 8 \cdot k, 9 \cdot k, 10 \cdot k, 11 \cdot k, 12 \cdot k, ...\}$

⋮

Observe que, com exceção de M(0), todos os demais conjuntos M possuem infinitos elementos. Além disso, nota-se também que o zero pertence a todos M(k), sendo o único elemento menor que o próprio *k*.

- $0 \in M(k)$
- $k \in M(k)$

Exercício resolvido

5 Bruno é um rapaz muito supersticioso, um bom exemplo disso é a senha de 4 algarismos que ele escolheu para o seu cartão de crédito. Na senha de Bruno, não aparecem os algarismos 1 e 3, mas tanto o número formado pelos dois primeiros algarismos, quanto o número formado pelos algarismos centrais e o número formado pelos dois últimos algarismos são múltiplos de 13.

Se os algarismos extremos da senha do cartão de Bruno são iguais, então, na senha do cartão de Bruno, a soma do maior algarismo com o menor algarismo deve ser igual a:

A 12 **B** 11 **C** 10 **D** 9 **E** 8

Resolução:

Os múltiplos de 13 com apenas dois algarismos diferentes de 1 e 3 são: 26, 52, 65 e 78.

Portanto, a senha de Bruno só pode ser: 2652, 5265 ou 6526

Em todos os casos, a soma do maior algarismo com o menor algarismo da senha é 2 + 6 = 8.

Alternativa: E

Encontrar o conjunto D(n) dos divisores naturais de um número *n* é um trabalho um pouco mais árduo.

Para isso, é necessário encontrar todos os valores de *k* para os quais $n \in M(k)$

- $D(0) = \mathbb{N}$
- $D(1) = \{1\}$
- $D(2) = \{1, 2\}$
- $D(3) = \{1, 3\}$
- $D(4) = \{1, 2, 4\}$
- $D(5) = \{1, 5\}$
- $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$
- $D(7) = \{1, 7\}$
- $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$
- $D(9) = \{1, 3, 9\}$
- $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$
- $D(11) = \{1, 11\}$
- $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Observe que, exceto D(0), todos os demais conjuntos D são finitos. Além disso, que a unidade e n pertencem a todo D(n) e que não há no conjunto elemento maior que o próprio n

- $1 \in D(n)$
- $n \in D(n)$

MDC

O máximo divisor comum de dois números naturais *a* e *b* é igual ao maior elemento positivo pertencente a ambos os conjuntos D(a) e D(b).

Sejam a = 12 e b = 18, por exemplo:

- o conjunto dos divisores de 12 é $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
- o conjunto dos divisores de 18 é $D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$;
- o conjunto dos divisores comuns de 12 e 18 é $D(12) \cap D(18) = \{1, 2, 3, 6\}$;
- o maior número positivo desse conjunto de múltiplos comuns é mdc (12, 18) = 6.

Essa operação possui as propriedades comutativa e associativa:

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, a)$$
$$\text{mdc}(a, \text{mdc}(b, c)) = \text{mdc}(\text{mdc}(a, b), c)$$

Além delas, é importante observar que, se $a \neq 0$, então:

$$\text{mdc}(0, a) = a$$
$$\text{mdc}(1, a) = 1$$

No caso de o número *a* ser múltiplo do número *b*:

$$\text{mdc}(a, b) = b$$

Quando o único divisor comum entre dois números naturais *a* e *b* é a unidade, dizemos que *a* e *b* são números primos entre si ou primos relativos um ao outro.

Sejam a = 9 e b = 10, por exemplo:

- o conjunto dos divisores de 9 é $D(9) = \{1, 3, 9\}$;
- o conjunto dos divisores de 10 é $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$;
- o conjunto dos divisores comuns de 9 e 10 é $D(9) \cap D(10) = \{1\}$;
- o único elemento desse conjunto de divisores comuns é mdc(9, 10) = 1.

Portanto, 9 e 10 são números primos entre si

MMC

O mínimo múltiplo comum de dois números naturais *a* e *b* é igual ao menor elemento positivo pertencente a ambos os conjuntos M(a) e M(b).

Sejam a = 12 e b = 18, por exemplo:

- o conjunto dos múltiplos de 12 é $M(12) = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...\}$;
- o conjunto dos múltiplos de 18 é $M(18) = \{0, 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, ...\}$;
- o conjunto dos múltiplos comuns de 12 e 18 é $M(12) \cap M(18) = \{0, 36, 72, 108, ...\}$;
- o menor número positivo desse conjunto de múltiplos comuns é mmc(12, 18) = 36.

Essa operação possui as propriedades comutativa e associativa:

$$\text{mmc}(a, b) = \text{mmc}(b, a)$$
$$\text{mmc}(a, \text{mmc}(b, c)) = \text{mmc}(\text{mmc}(a, b), c)$$

Além delas, é importante observar que:

$$\text{mmc}(0, a) = 0$$
$$a \neq 0 \Rightarrow \text{mmc}(1, a) = a$$

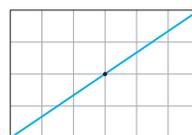
No caso de o número *a* ser múltiplo do número *b*:

$$\text{mmc}(a, b) = a$$

No caso de *a* e *b* serem números primos entre si:

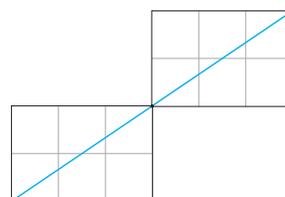
$$\text{mmc}(a, b) = a \cdot b$$

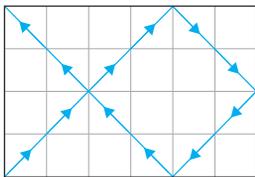
Exercícios resolvidos

6 Marcos pegou um caderno quadriculado e com uma régua uniu os vértices opostos de um retângulo de seis por quatro unidades, verificando que o segmento traçado passava sobre um único ponto da malha quadriculada situada no interior do retângulo, como mostra a figura:

Se Marcos tivesse unido os vértices opostos de um retângulo de quinze por vinte unidades, o segmento traçado passaria por exatamente quantos pontos da malha quadriculada situada no interior desse retângulo?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

Resolução:

Dividindo-se as dimensões do retângulo dado pelo seu máximo divisor comum mdc(6, 4) = 2, observa-se que este retângulo é formado por quatro retângulos menores de três por duas unidades. Além disso, pode-se observar que a diagonal do retângulo maior contém as diagonais de exatamente dois dos retângulos menores, que possuem apenas um ponto em comum.

Assim, como mdc(15, 20) = 5, temos que a diagonal de um retângulo grande, com 15 por 20 unidades, conterá as diagonais de cinco retângulos menores com 3 por 4 unidades.
Portanto, essa diagonal passará por exatamente 4 pontos comuns a dois desses cinco retângulos menores.
Alternativa: C.

7 Marina, irmã de Marcos, também tomou um retângulo de seis por quatro unidades do caderno quadriculado, mas fez um traçado diferente Partindo do vértice inferior esquerdo do retângulo, ela traçou uma linha reta sobre as diagonais dos quadrados até que essa linha atingisse um dos limites laterais do retângulo. Quando isso aconteceu, ela mudou a direção de seu traçado, mantendo-o sempre sobre as diagonais dos quadrados no interior do retângulo, até atingir outro vértice desse retângulo, como mostra a figura:

Depois que Marina terminou seu desenho, ela verificou que havia traçado as diagonais de exatamente doze quadrados da malha. Se tivesse procedido dessa forma num retângulo de quinze por vinte unidades, ela teria traçado as diagonais de exatamente:

A 30 quadrados da malha.
B 40 quadrados da malha
C 45 quadrados da malha
D 50 quadrados da malha
E 60 quadrados da malha

Resolução:

Sempre que a linha traçada por Marina atinge um limite lateral do retângulo, podemos observar que o número de quadrados por onde ela passou é múltiplo de uma das dimensões do retângulo.
Portanto, quando esta linha atingir um vértice, ou seja, um limite comum a dois lados do retângulo, o número de quadrados por onde ela passou será múltiplo comum das duas dimensões do retângulo
Assim, na primeira vez que isto acontecer num retângulo de 15 por 20 unidades, o número de quadrados que terão suas diagonais traçadas será igual ao mmc(15, 20) = 60.
Alternativa: E.

Divisão sem resto em ℕ

Quando um número a é múltiplo de um número b, o resto da divisão de a por b é nulo. Nesse caso pode-se representar o quociente da divisão como (a ÷ b).

- a é múltiplo de b $\Leftrightarrow$ $(a \div b) \in \mathbb{N}$
- a não é múltiplo de b $\Leftrightarrow$ $(a \div b) \notin \mathbb{N}$

Trata-se de uma operação não comutativa, pois se a > b então b não é múltiplo de a, o que torna impossível o quociente (b ÷ a) no conjunto dos números naturais.

Também não é uma operação associativa, uma vez que $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$.

As propriedades a seguir servem para contornar essa desigualdade:

- $a \div b \div c = (a \div b) \div c = a \div (b \cdot c)$
- $a \div (b \div c) = a \quad c \div b$

A unidade funciona como elemento neutro dessa divi são apenas no lugar do divisor

- $a \div 1 = a$

A unidade também é o resultado de um número posi tivo dividido por ele mesmo:

- $a > 0 \Rightarrow a \div a = 1$

A divisão (÷) é a operação inversa da multiplicação. Isso significa que, sendo a, b e c números naturais:

$$a \cdot b = c \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \div b \\ b = c \div a \end{cases}$$

Números primos absolutos e números compostos

Um número natural é considerado primo absoluto ou simplesmente número primo se, e somente se, possuir exatamente dois divisores naturais distintos Assim:

- O número 0 não é primo, pois possui infinitos diviso res naturais D(0) = ℕ
- O número 1 também não é primo, pois possui apenas um divisor natural D(1) = {1}
- O número 2 é primo, pois possui exatamente dois di visores naturais. D(2) = {1, 2}.
- O número 3 também é primo, pois possui exatamente dois divisores naturais. D(3) = {1, 3}.
- O número 4 não é primo, pois possui três divisores naturais. D(4) = {1, 2, 4}.
- O número 5 é primo, pois possui exatamente dois divisores naturais. D(5) = {1, 5}.
- O número 6 não é primo, pois possui quatro divisores naturais. D(6) = {1, 2, 3, 6}.

  ⋮

Os números naturais que possuem mais de dois divisores são chamados de compostos. Assim, de acordo com a quantidade de divisores, os números naturais podem ser classificados em três categorias:

- Números que não são primos nem são compostos: 0 e 1.
- Números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
- Números compostos: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14,

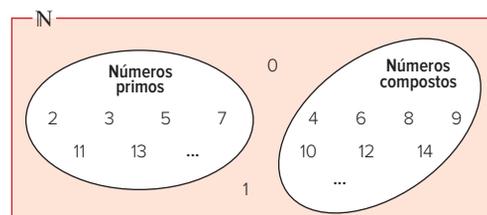



Fig. 4 Se n > 1, então n é primo ou composto.

FRENTE 2

Se um número natural $p > 1$ é primo, então seus dois únicos divisores naturais são o número 1 e próprio número *p*:

- *p* é primo $\Rightarrow$ D(p) = {1, p}

Se um número natural *n* é resultado do produto de dois números primos diferentes p_1 e p_2, então os divisores desse número são:

- $n = p_1 \cdot p_2 \Leftrightarrow D(n) = \{1, p_1, p_2, n\}$

Esse e outros fatos a respeito dos números primos e compostos são de grande utilidade para a ciência da criptografia, tão necessária nos dias de hoje.

O Teorema Fundamental da Aritmética garante que todo número composto é resultado do produto de uma única combinação de números primos. É fácil perceber que $2 \cdot 2$ e $2 \cdot 3$ são as únicas combinações de fatores que resultam nos números 4 e 6, mas pense em um número maior, como 3628800. O fato de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$ ser a única sucessão crescente de fatores primos que resulta em 3 628 800 é mais difícil de se verificar

Critérios de divisibilidade

Em alguns casos pode-se perceber que um número composto é divisível por um número primo, mesmo sem efetuar a divisão euclidiana.

Observando o valor do algarismo das unidades de um número natural verifica-se se ele é divisível por 2 ou 5:

- Números cujo último algarismo é 2, 4, 6, 8 ou 0 são divisíveis por 2
- Números cujo último algarismo é 5 ou 0 são divisíveis por 5

Observando a soma dos algarismos de um número natural verifica-se se ele é divisível por 3. Números cuja soma dos algarismos é 3, 6 ou 9 são divisíveis por 3 Se a soma dos algarismos for maior que 9, então, os algarismos do resultado devem ser somados novamente, e assim sucessivamente, até que o resultado tenha apenas um algarismo. Pode-se perceber que o número 3 628 800 é múltiplo de 3, por exemplo, pois:

$$3 + 6 + 2 + 8 + 8 + 0 + 0 = 27 \text{ e } 2 + 7 = 9$$

Subtraindo e somando, alternadamente e nessa ordem, os algarismos de um número natural verifica-se se ele é divisível por 11 quando o resultado final dessas operações é zero e, caso este resultado seja maior que 9, então, as operações alternadas devem ser feitas novamente, até que o resultado tenha apenas um algarismo. Exemplos:

- 2 453 é múltiplo de 11, pois: $2 - 4 + 5 - 3 = 0$.
- 64 589 não é múltiplo de 11, pois: $6 - 4 + 5 - 8 + 9 = 8$.
- 7 092 954 é múltiplo de 11, pois: $7 - 0 + 9 - 2 + 9 - 5 + 4 = 22$ e $2 - 2 = 0$.

Também é possível perceber se um número composto é divisível por outro número composto, sem efetuar a divisão euclidiana. Exemplos:

- Números que terminam por 0 são sempre divisíveis por 10.
- Números cuja metade termina por 2, 4, 6, 8, ou 0 são sempre divisíveis por 4.
- Números cuja soma dos algarismos é igual a 9 são sempre divisíveis por 9. Se a soma dos algarismos for maior que 9, então, os algarismos do resultado devem ser somados novamente, e assim sucessivamente, até que o resultado tenha apenas um algarismo.

Além disso, se um número natural n é divisível por dois números a e b que são primos entre si, ou seja, tais que mdc (a, b) = 1, então n também é divisível pelo produto $(a \cdot b)$. Exemplos:

- Números que são divisíveis por 2 e por 3 também são divisíveis por $2 \cdot 3 = 6$.
- Números que são divisíveis por 3 e por 4 também são divisíveis por $3 \cdot 4 = 12$.
- Números que são divisíveis por 3 e por 5 também são divisíveis por $3 \cdot 5 = 15$.
- Números que são divisíveis por 2, por 3 e por 5 também são divisíveis por $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Nos casos em que mdc (a, b) > 1, essa propriedade não se verifica. Veja o exemplo do número n = 20, que é divisível por a = 4 e por b = 10, mas não é divisível por $a \cdot b = 4 \cdot 10 = 40$:

- D(20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

Decomposição em fatores primos

Todo número composto n pode ser decomposto em fatores primos efetuando-se sucessivas divisões sem resto por cada número primo do qual seja múltiplo, tantas vezes quantas forem possíveis O número 3 628 800, por exemplo, pode ser dividido por 2 oito vezes sucessivas Depois, o resultado dessas divisões pode ser dividido por 5 duas vezes sucessivas, depois por 3 mais quatro vezes e finalmente por 7, até que o quociente final seja unitário Procedendo dessa maneira efetua-se a decomposição do número 3 628 800:

Nessa decomposição, também pode-se efetuar as divisões por 3 antes das divisões por 5, como é ensinado tradicionalmente, mas o fato é que a ordem dos fatores primos não importa, pois a multiplicação é uma operação comutativa. Desse modo, podemos efetuar as divisões como preferirmos, considerando, por exemplo, uma identificação mais rápida dos critérios de divisibilidade.

O algoritmo da decomposição tem duas colunas. A coluna da esquerda começa em cima com o número a ser decomposto e segue com os quocientes das divisões até que o resultado seja igual a 1, e na coluna da direita escrevem-se os números primos que são os divisores no algoritmo.

Como o penúltimo número da coluna da esquerda sempre será um número primo, e ele pode ser relativamente grande, é recomendável que se tenha um bom repertório de números primos memorizados.

Os números primos menores, que possuem apenas um algarismo são: 2, 3, 5 e 7.

A tabela a seguir mostra a distribuição dos números primos de dois algarismos:

	Unidade = 1	Unidade = 3	Unidade = 7	Unidade = 9
Dezena = 1	11	13	17	19
Dezena = 2		23		29
Dezena = 3	31		37	
Dezena = 4	41	43	47	
Dezena = 5		53		59
Dezena = 6	61		67	
Dezena = 7	71	73		79
Dezena = 8		83		89
Dezena = 9			97	

Exercício resolvido

8 Assinale a alternativa que apresenta um número que não pode ser obtido da soma dos algarismos de um número primo menor que 100.

A 5
B 7
C 11
D 13
E 15

Resolução:

Como todas as alternativas apresentam números ímpares, devemos verificar a soma dos algarismos dos números primos de dois algarismos em que um desses algarismos é par. Estes números são:

$23 \rightarrow 2 + 3 = 5$
$29 \rightarrow 2 + 9 = 11$
$41 \rightarrow 4 + 1 = 5$
$43 \rightarrow 4 + 3 = 7$
$47 \rightarrow 4 + 7 = 11$
$61 \rightarrow 6 + 1 = 7$
$67 \rightarrow 6 + 7 = 13$
$83 \rightarrow 8 + 3 = 11$
$89 \rightarrow 8 + 9 = 17$

Alternativa: E

Números fatoriais

Chamamos os números que resultam do produto entre os primeiros números naturais positivos de números fatoriais. Indica-se o fatorial de um número natural **n** usando-se um ponto de exclamação (!)

Assim:

- $1! = 1$
- $2! = 1 \cdot 2 = 2$
- $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
- $4! = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 = 24$
- $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

E para todo n > 5:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n \quad 2) \cdot (n \quad 1) \cdot n$$

Ao contrário dos números primos, os números fatoriais maiores que 2 tendem a possuir muitos divisores.

Comparando-se dois números fatoriais diferentes, po de-se afirmar que, se a! > b!, então:

- a! é múltiplo de b!
- b! é divisor de a!
- mmc(a!, b!) = a!
- mdc(a!, b!) = b!

Potenciação

A operação de potenciação é aplicada a apenas dois números naturais de cada vez. Os números que participam da potenciação são a base e o expoente. O resultado da operação é chamado de potência.

Há um símbolo para representar a operação de poten ciação (^), mas ele pode ser omitido se o expoente for escrito um pouco acima da base (sobrescrito). Assim: $b \wedge n = b^n$.

Sendo *b* um número natural qualquer, a operação de potenciação começa a ser definida pelas seguintes proposições:

- $b^0 = 1$
- $b^1 = b$

A primeira sentença define que toda base elevada ao expoente zero resulta no número 1, e a segunda define que o número 1 funciona como expoente neutro

Representando por n' o sucessor de outro número na tural *n*, fica definido que:

$$b^{n'} = b \cdot b^n$$

Também é possível definir a potência de base *b* e expoente *n* como o resultado da multiplicação sucessiva do número 1 por *n* fatores iguais a *b*:

$$b^n = 1 \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \quad \cdot b \cdot b}_{\text{n fatores}}$$

Exemplos:

- $3^2 = 1 \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{\text{2 fatores}} = 9$
- $2^3 = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 fatores}} = 8$

Esses exemplos mostram que a potenciação não é uma operação comutativa, ou seja, $a^b \neq b^a$ com apenas uma exceção em $\mathbb{N}$: a = 2 e b = 4.

Além disso, não se trata de uma operação associativa, pois $a \wedge (b \wedge c) \neq a \wedge (b \wedge c)$ e, por isso, algumas propriedades devem ser observadas:

- $a \wedge b \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \cdot c)$

A potenciação tem propriedade distributiva em relação às operações de multiplicação e divisão:

- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a \div b)^n = a^n \div b^n$

O produto de potências de mesma base é obtido conservando-se a base e somando-se os expoentes:

- $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$

O quociente de potências de mesma base é obtido conservando-se a base e subtraindo-se os expoentes:

- $b^n \div b^m = b^{n \quad m}$

O uso da potenciação é bastante útil para abreviar a notação decomposta de um número natural como o número 3628800, por exemplo, cujos fatores são $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot$ 2 2 3 3 3 3 5 5 7 Na forma abreviada pela potenciação, esse número fica expresso por $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Exercícios resolvidos

9 Se a soma $2022^{2021} + 2022^{2021} + 2022^{2021} + \quad + $ $+ 2022^{2021}$ possui 2021 parcelas, então o total é de:

A $2022^{2022} \quad 1$
B 2022^{2022}
C $2022^{2022} \quad 2022$
D $2022^{2021} \quad 1$
E $2022^{2022} \quad 2022^{2021}$

Resolução:

Com 2021 parcelas, essa soma pode ser expressa pelo produto: $2021 \cdot 2022^{2021}$.
Fazendo $2021 = 2022 - 1$ tem-se:
$(2022 \quad 1) \quad 2022^{2021} = 2022 \quad 2022^{2021} \quad 1 \quad 2022^{2021} =$ $= 2022^{1+2021} - 2022^{2021} = 2022^{2022} - 2022^{2021}$
Alternativa: E.

10 Determine a soma dos algarismos do resultado que se obtém efetuando-se $5^{2021} \cdot 2^{2023} - 2022$.

Resolução:

$5^{2021} \cdot 2^{2023} = 5^{2021} \cdot 2^{2021} \cdot 2^2 = (5 \cdot 2)^{2021} \times 4 = 4 \cdot 10^{2021} = 4\underbrace{00000...00000}_{2021 \text{ zeros}}$

$$\begin{array}{r} 400000...00000 \\ 2022 \\ \hline \underbrace{399999.\ 97978}_{2022 \text{ algarismos}} \end{array}$$

Como o resultado possui exatamente 2022 algarismos, dos quais apenas 4 são diferentes de 9, temos que a soma desses algarismos é: $3 + 7 + 7 + 8 + (2022 - 4) \quad 9 = 25 + 2018 \quad 9 = 25 + 18162 = 18187$

Quadrados perfeitos e cubos perfeitos

Devido ao seu uso no cálculo de áreas e volumes, as potências de expoentes 2 e 3 são também chamadas de "quadrados" e "cubos", respectivamente.

- A segunda potência de uma base *b* é indicada por b^2 e pode ser lida como "*b* ao quadrado".
- A terceira potência de uma base *b* é indicada por b^3 e pode ser lida como "*b* ao cubo"

Com estes termos podem ser definidos dois importantes subconjuntos dos números naturais:

- O conjunto dos quadrados perfeitos $= \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- O conjunto dos cubos perfeitos $= \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$\left.\begin{array}{r} 0 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \\ 2 \cdot 2 = 4 \\ 3 \cdot 2 = 9 \\ 4 \cdot 4 = 16 \\ 5 \cdot 5 = 25 \\ 6 \cdot 5 = 36 \\ 7 \cdot 7 = 49 \\ 8 \cdot 8 = 64 \\ 9 \cdot 9 = 81 \\ 10 \cdot 10 = 100 \\ \vdots \end{array}\right\} \text{Quadrados perfeitos} \qquad \left.\begin{array}{r} 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\ 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \\ 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \\ 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \\ 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \\ 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343 \\ 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 \\ 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729 \\ 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \\ \vdots \end{array}\right\} \text{Cubos perfeitos}$$

Exercício resolvido

11 O menor número inteiro que pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos, de duas formas diferentes, é o número 50.

- $50 = 1^2 + 7^2$
- $50 = 5^2 + 5^2$

Qual é o próximo?

A 58
B 64
C 85
D 89
E 92

Resolução:

O próximo número inteiro que pode ser escrito como soma de dois quadrados perfeitos é o 85:
$85 = 2^2 + 9^2$ $\qquad 85 = 6^2 + 7^2$
Alternativa: C.

Radiciação e logaritmos em $\mathbb{N}$

A operação de radiciação ou extração de raízes é aplicada a apenas dois números naturais de cada vez Os números que participam da radiciação são o índice do radical e radi cando. O resultado da operação é chamado de raiz.

O índice do radical designa a ordem da radiciação, e o radicando o número do qual será extraída a raiz

Sendo *p* um número natural e *n* um número ordinal, a notação radical $\sqrt[n]{p}$ só é possível nesse conjunto se o número *p* for a n-ésima potência de algum número natural *m*,

de modo que a radiciação se presta como uma das operações contrárias da potenciação:

$$\sqrt[n]{p} = m \Rightarrow m^n = p$$

O número 1 funciona como elemento neutro no lugar do índice do radical, de modo que a primeira raiz de um número natural é igual a ele mesmo, ou seja, $\sqrt[1]{p} = p$.

Quando o índice do radical é igual a 2, ele pode ser omitido, por ser o valor mais comum dessa operação, ou seja, $\sqrt[2]{q} = \sqrt{q}$. A segunda raiz de um número é denominada sua raiz quadrada, e os únicos números que possuem raiz quadrada natural são os quadrados perfeitos.

A terceira raiz de um número é denominada sua raiz cúbica, e os únicos números que possuem raiz cúbica natural são os cubos perfeitos.

A radiciação não é uma operação associativa e nem comutativa, mas possui propriedade distributiva em relação à multiplicação e à divisão:

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$

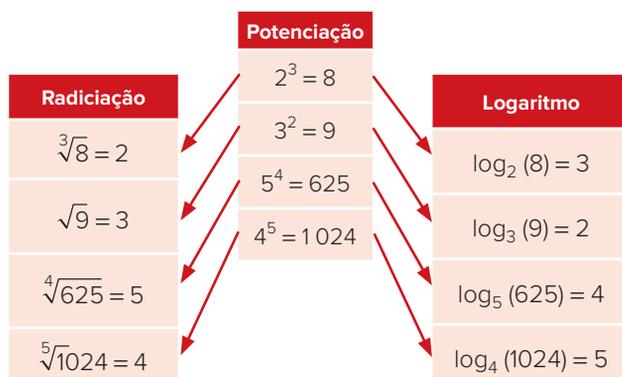
Além dessas propriedades, também é fato que:

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}} = \sqrt[n \cdot m]{p}$

A extração de logaritmos é aplicada a apenas dois números naturais de cada vez. Os números que participam dessa operação são o logaritmando e a base O resultado da operação é chamado de logaritmo.

Dada uma base *b*, os únicos números do conjunto ℕ que possuem logaritmos nessa base são as potências de *b*, ou seja, os números do conjunto $\{1, b, b^2, b^3, b^4, ...\}$. O logaritmo também se presta como operação inversa da potenciação:

$$b^n = p \Rightarrow n = \log_b(p)$$

A extração de logaritmos também não é uma operação associativa nem comutativa, mas possui uma série de propriedades importantes, que serão estudadas em outra ocasião. Veja alguns exemplos comparando resultados de potenciações às suas duas operações contrárias: a extração de raízes e de logaritmos.

Saiba mais

Zero elevado a zero

De acordo com a teoria dos conjuntos, sendo **n** a cardinalidade de um conjunto finito **A** e **m** a cardinalidade de um conjunto finito **B**, a potência m^n designa o número total de funções do conjunto **A** para o conjunto **B**.

Considerando o caso em que **A** e **B** são conjuntos vazios, ou seja, $m = n = 0$, existe uma única função que pode ser definida de **A** para **B**, que por sua vez também é um conjunto vazio de pares ordenados

Portanto, no conjunto ℕ,o resultado da potência zero elevado a zero é unitário, ou seja, $0^0 = 1$.

Exercício resolvido

12 Se $\sqrt[m]{729} = 3$ e $\sqrt[n]{729} = 9$ então os índices *m* e *n* das raízes são tais que:

A $m + n = 729$
B $m = n^2$
C $m = n + 9$
D $m = 3n$
E $m = 2n$

Resolução:

Decompondo o número 729 em fatores primos obtemos 36, portanto $m = 6$.
Como $3^6 = (3^2)^3 = 93$, temos que $n = 3$.
Logo, $m = 2n$.
Alternativa: E.

Os números inteiros

O conjunto ℤ dos números inteiros extrapola o conceito de número natural admitindo a existência de números ordinais menores que zero, denominados inteiros negativos. Com isso, os números naturais maiores que zero passam a ser chamados de inteiros positivos.

Nesse conjunto, o zero é o único número que não é positivo nem negativo. Os números inteiros negativos são obrigatoriamente precedidos pelo sinal (–), e os números positivos podem ser precedidos pelo sinal (+) ou sem sinal algum.

ℤ = { , 4, 3, 2, 1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, }

Um dos principais subconjuntos de ℤ é o conjunto dos números inteiros não nulos:

ℤ* = {..., –4, –3, –2, –1, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...}

Esse subconjunto dos números inteiros também possui características ordinais, pois não possui o zero Desse modo pode-se contar em dois sentidos opostos, como se faz no ocidente para numerar os séculos da história, por exemplo. Os séculos negativos são indicados por a C., os positivos por d C. e não há o século zero

Além dos inteiros não nulos, outros quatro subconjuntos de ℤ merecem atenção.

- O conjunto dos números inteiros positivos:
  $\mathbb{Z}^*_+ = \{+1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$
- O conjunto dos números inteiros negativos:
  $\mathbb{Z}^* = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, ...\}$
- O conjunto dos números inteiros não negativos:
  $\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$
- O conjunto dos números inteiros não positivos:
  $\mathbb{Z} = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, ...\}$

! Atenção

O conjunto $\mathbb{Z}$ também é discreto, ou seja, se $n \in \mathbb{Z}$ e $n < m < n + 1$, então $m \notin \mathbb{Z}$

Exercício resolvido

13 A expansão da República Romana para além da Península Itálica teve seu início no século III a C. e término em meados do século IV d C. Em quantos séculos da nossa história podemos afirmar que houve tal expansão?

A 2
B 3
C 5
D 7
E 8

Resolução:

A expansão da República Romana para além da Península Itálica ocorreu nos três últimos séculos a.C. e nos quatro primeiros séculos d.C.
Então, como não há o século zero, temos que essa expansão ocorreu durante 3 + 4 = 7 séculos da nossa história.
Alternativa: D.

Oposto do número natural

Cada número inteiro negativo é concebido como o oposto, ou simétrico, de um número natural e o sinal (–) indica essa oposição. Assim:

- –1 indica o oposto do número 1;
- –2 indica o oposto do número 2;
- –3 indica o oposto do número 3;
  ⋮
- *n* indica o oposto do número *n*

Em $\mathbb{Z}$ o único número que não possui oposto é o número zero. Também podemos afirmar que o número zero é o oposto dele mesmo, ou seja, 0 = –0.

A relação de oposição é dual Isso significa não haver uma terceira opção para essa relação, de modo que os opostos dos números inteiros negativos sejam os números positivos. Assim:

- 1 indica o oposto do número –1;
- 2 indica o oposto do número 2;
- 3 indica o oposto do número –3;
  ⋮
- *n* indica o oposto do número n.

Portanto, o oposto do oposto de um número *n* deve ser o próprio número *n*, ou seja, (n) = n. Perceba que todas essas afirmações são válidas para qualquer sinal de *n*.

Orientação ordinal

Entre as contribuições proporcionadas pelo adven to dos números negativos está a ampliação do aspecto ordinal do número que adquire dupla orientação em relação a uma referência original, que pode ser espacial, temporal, etc.

Veja o exemplo da escala Celsius de temperatura, em que o número zero é fixado como a temperatura de congelamento da água e as temperaturas mais frias são designadas por graus negativos, enquanto as mais quentes por graus positivos, de modo que cada grau negativo corresponda à mesma variação de temperatura que cada grau positivo, mas em outro sentido

No conjunto $\mathbb{Z}$ o número zero é sucessor do número –1 que, por sua vez, é o sucessor do número 2, e assim por diante. Nesse conjunto todo elemento possui um sucessor e um antecessor.

Módulo de um número inteiro

Todo número ordinal *n* está associado a dois números inteiros distintos, +n e –n, de modo que entre eles esteja o número zero e exatamente a mesma quantidade de nú meros positivos e negativos.

Natural ordinal (nº)	Inteiro positivo (+n)	Inteiro negativo (–n)	Inteiros entre +n e –n
1º	+1	–1	0
2º	+2	–2	–1, 0, +1
3º	+3	–3	–2, –1, 0, +1, +2
4º	+4	4	3, 2, 1, 0, +1, +2, +3
⋮	⋮	⋮	⋮

Em contrapartida, eliminando a orientação positiva/negativa de dois números inteiros opostos, obtém-se sempre o mesmo número ordinal. Chamamos de módulo de um número inteiro, ou valor absoluto de um número inteiro, ao número natural que se obtém ao eliminar o sinal de um número inteiro O módulo de um número *a*, é representado cercando-o por duas barras verticais, assim, o módulo do número *a* é indicado por |a|

- |+1| = |–1| = 1
- |+2| = |–2| = 2
- |+3| = |–3| = 3
  ⋮

Operações com números inteiros

O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado em relação às operações de adição, subtração e multiplicação. Assim, sendo *a* e *b* dois números inteiros quaisquer:

$(a + b) \in \mathbb{Z}$ $(a \quad b) \in \mathbb{Z}$ $(a \quad b) \in \mathbb{Z}$

Outras operações entre números inteiros como a potenciação, por exemplo, podem gerar resultados que escapam desse conjunto.

Adição em $\mathbb{Z}$

No conjunto $\mathbb{Z}$ a adição admite todas as propriedades que a definem no conjunto $\mathbb{N}$ A novidade é a existência de opostos aditivos, ou seja, pares de números cuja soma resulte no elemento neutro da operação: o número zero.

- $1 + 1 = 0$
- $2 + 2 = 0$
- $3 + 3 = 0$

⋮

- $n + n = 0$

A soma de dois números inteiros *a* e *b* de mesmo sinal tem o mesmo sinal das parcelas

A soma de dois números positivos equivale à soma de dois números naturais Exemplo:

$(+3) + (+5) = 3 + 5 = 8$

A soma de dois números negativos tem o módulo igual à soma dos módulos das parcelas, mas também é negativa. Exemplo:

$(-3) + (-5) = -8$

Para efetuar a adição de dois números inteiros com sinais diferentes, é necessário verificar qual deles possui o maior módulo O sinal do número de maior módulo será o sinal da soma, e o módulo da soma será igual à diferença absoluta dos módulos das parcelas. Observe:

- $(\quad 3) + (+5) = +2$
- $(+3) + (\quad 5) = \quad 2$
- $(-5) + (+3) = \quad 2$
- $(+5) + (\quad 3) = +2$

Eliminando o sinal das parcelas ficamos com os números 3 e 5, cuja diferença absoluta é de 2 unidades. Então, como 5 > 3, o resultado final fica com o mesmo sinal da parcela 5

Subtração em $\mathbb{Z}$

Cada número negativo em si pode ser tomado como o resultado da subtração de minuendo zero e algum subtraendo natural. Observe que:

- $-3 = 0 - 3$
- $-11 = 0 - 11$

Mas, de forma prática, no conjunto $\mathbb{Z}$ a subtração também pode ser interpretada como uma adição, desde que se tome para a segunda parcela o valor oposto ao subtraendo.

- $(\quad 3) \quad (+5) = (\quad 3) + (\quad 5) = \quad 8$
- $(+3) \quad (\quad 5) = (+3) + (+5) = +8$
- $(-5) \quad (+3) = (\quad 5) + (\quad 3) = \quad 8$
- $(+5) \quad (\quad 3) = (+5) + (+3) = +8$

A subtração não é uma operação comutativa, por isso (a – b) é diferente de (b – a) quando *a* e *b* são números inteiros diferentes um do outro. Os valores de (a – b) e (b – a) são opostos, ou seja, (a – b) = –(b – a).

Observando o fato de esses valores terem o mesmo módulo, pode-se concluir que a **diferença absoluta** de dois números inteiros é uma operação comutativa:

$|a - b| = |b - a|$

Multiplicação em $\mathbb{Z}$

A operação de multiplicação de números inteiros admite todas as propriedades que a definiram no conjunto $\mathbb{N}$, além das seguintes regras de sinal:

$(+) \quad (+) = (+)$ $(\;) \quad (-) = (+)$ $(+) \quad (\;) = (\;)$ $(-) \quad (+) = (-)$

Efetuando a multiplicação de números inteiros observa-se que o módulo do produto é igual ao produto dos módulos dos fatores:

$|a \quad b| = |a| \quad |b|$

E, além disso, que:

- O produto de dois números inteiros de mesmo sinal é sempre positivo
- O produto de dois números inteiros de sinais contrá rios é sempre negativo.

Divisão sem resto em $\mathbb{Z}$

Neste conjunto numérico, também acontece de um número *a* ser múltiplo de um número *b*. Nesse caso, o resto da divisão é nulo e pode-se representar o quociente da divisão como (a ÷ b), onde vale a mesma regra de sinais da multiplicação:

$(+) \div (+) = (+)$ $(-) \div (-) = (+)$ $(+) \div (-) = (-)$ $(-) \div (+) = (-)$

MDC e MMC

Com a inclusão dos números negativos, os conjuntos dos múltiplos e dos divisores de um número adquirem novos elementos.

O conjunto dos divisores de 12, por exemplo, é igual ao conjunto dos divisores de –12:

$D(-12) = D(12) = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Assim, como o conjunto dos divisores de 18 é igual ao conjunto dos divisores de 18:

$D(\quad 18) = D(18) = \{ \quad 18, \quad 9, \quad 6, \quad 3, \quad 2, \quad 1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

O conjunto dos múltiplos de –12 é igual ao conjunto dos múltiplos de 12:

$M(-12) = M(12) = \{..., -48, -36, -24, -12, 0, 12, 24, 36, 48, ...\}$

Assim, como o conjunto dos múltiplos de 18 é igual ao conjunto dos múltiplos de 18:

$M(\quad 18) = M(18) = \{ \quad , \quad 72, \quad 54, \quad 36, \quad 18, 0, 18, 36, 54, 72, \quad \}$

O máximo divisor comum de dois números inteiros segue a mesma definição dada no conjunto dos números naturais, pois os números positivos são maiores que os negativos.

FRENTE 2

Por conveniência, toma-se o mínimo múltiplo comum de números inteiros como um valor positivo, quaisquer que sejam os sinais dos números envolvidos. Observe que se os múltiplos negativos fossem incluídos como possibilidade para o mmc, a definição desta operação não encontraria resultado algum, pois o conjunto dos múltiplos inteiros de qualquer número diferente de zero decresce infinitamente.

- $\text{mdc}(\ 18,\ \ 12) = \text{mdc}(18,\ \ 12) = \text{mdc}(\ 18, 12) =$
  $= \text{mdc}(18, 12) = +6$
- $\text{mmc}(\ 18,\ \ 12) = \text{mmc}(18,\ \ 12) = \text{mmc}(\ 18, 12) =$
  $= \text{mmc}(18, 12) = +36$

Potenciação em $\mathbb{Z}$

A potenciação não é uma operação fechada em $\mathbb{Z}$, porque as potências de bases inteiras e expoentes negativos escapam desse conjunto.

- $(+5)^{-3} \notin \mathbb{Z}$
- $(+3)^{\ 2} \notin \mathbb{Z}$

Em relação às potências de base negativa e expoente positivo, aplica-se a regra de sinais da multiplicação, que dependerá exclusivamente da quantidade de fatores envolvidos, indicada pelo expoente da potenciação.

Assim, se o expoente for um número múltiplo de 2, então a potência será positiva, mas se o expoente não for múltiplo de 2, a potência será negativa. Exemplos:

- $(\ 3)^2 = +9$
- $(\ 3)^3 = \ \ 27$
- $(\ 3)^4 = +81$
- $(-3)^5 = -243$

⋮

As bases negativas devem ser indicadas entre parênteses, caso contrário o sinal que antecede a potenciação também será o sinal do resultado, pois, nesse caso, tem se o inverso de uma potência de base positiva. Exemplos:

- $-3^2 = -9$
- $-3^3 = -27$
- $\ 3^4 = \ \ 81$
- $\ 3^5 = \ \ 243$

⋮

Exercício resolvido

14 O número de soluções inteiras da equação $x^y = 64$ é:

A 6 C 4 E 2
B 5 D 3

Resolução:

O número 64 pode ser escrito na forma de uma potência de base e expoente naturais de quatro maneiras diferentes: $64^1 = 8^2 = 4^3 = 2^6$

Como as potências de base negativa e expoente par são positivas, temos mais duas opções: $(-8)^2$ e $(-2)^6$.

Logo, a equação $x^y = 64$ admite exatamente seis soluções distintas, que são os pares (x, y) correspondentes.

Alternativa: A

Radiciação em $\mathbb{Z}$

A radiciação também não é uma operação fechada no conjunto dos números inteiros, por vários motivos, exceto quando o radicando é unitário Os radicais de índices ne gativos escapam todos deste conjunto.

- $n \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \sqrt[n]{1} = 1$
- $n < 0 \text{ e } p \neq \pm 1 \Rightarrow \sqrt[n]{p}$

Além disso, se o radicando for negativo, as únicas raízes que podem gerar um resultado inteiro são aquelas cujos índices naturais não são divisíveis por 2, desde que o radicando seja uma potência adequada Nesse caso, a raiz também será um número negativo. Exemplos:

- $\sqrt{-4} \notin \mathbb{Z}$
- $\sqrt[3]{-8} = \ \ 2$
- $\sqrt[4]{\ 16} \notin \ \mathbb{Z}$
- $\sqrt[5]{-32} = -2$

⋮

Como a radiciação é uma das operações contrárias da potenciação, para resolver algumas equações enunciadas por essa operação, também é necessário observar se o expoente é, ou não, múltiplo de 2

Pergunta	Equação	Solução
Qual número inteiro deve ser elevado à segunda potência para se obter o número +9?	$n^2 = +9$	$n = \pm\sqrt{+9}$ $n = \pm 3$
Qual número inteiro deve ser elevado à segunda potência para se obter o número –9?	$n^2 = -9$	Não há solução
Qual número inteiro deve ser elevado à terceira potência para se obter o número +8?	$n^3 = +8$	$n = \sqrt[3]{+8}$ $n = +2$
Qual número inteiro deve ser elevado à terceira potência para se obter o número –8?	$n^3 = -8$	$n = \sqrt[3]{-8}$ $n = -2$

Assim, se a segunda potência de um número inteiro *n* for um quadrado perfeito, por exemplo, então o valor de *n* pode ser positivo ou negativo.

! Atenção

Em particular, as raízes quadradas de um quadrado perfeito devem ser indicadas com os dois sinais, pois a ausência do sinal antecedendo o radical indica apenas a raiz positiva Exemplo:

$$\pm\sqrt{9} = \pm 3 \qquad -\sqrt{9} = -3 \qquad +\sqrt{9} = +3$$

A terceira das sentenças acima é a única que mantém seu significado quando escrita sem os sinais, de modo que $\sqrt{9} = 3$ também a representa

Divisão com resto em $\mathbb{Z}$

Neste conjunto numérico, o algoritmo da divisão euclidiana também deve produzir quociente e resto O sinal do quociente obedece à mesma regra de sinais da multiplicação, mas o resto produzido não pode ser negativo, ele independe dos sinais do dividendo e do divisor.

$$\begin{array}{r|l} n & \underline{\;d\;\;} \\ r & \;q \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} n = q \cdot d + r \\ 0 \leq r < |d| \end{cases}$$

Nesse tipo de divisão é necessário observar que o resto **r** deve representar quanto o dividendo *n* ultrapassa o maior múltiplo do divisor *d* que seja inferior a *n*. Veja os exemplos a seguir.

- Dividendo e divisor positivos:

$$\begin{array}{r|l} 13 & \underline{\;5\;\;} \\ 3 & \;2 \end{array}$$

- Dividendo positivo e divisor negativo:

$$\begin{array}{r|l} 13 & \underline{\;\;5\;\;} \\ 3 & \;-2 \end{array}$$

- Dividendo negativo e divisor positivo:

$$\begin{array}{r|l} 13 & \underline{\;\;5\;\;} \\ 2 & \;\;3 \end{array}$$

- Dividendo e divisor negativos:

$$\begin{array}{r|l} -13 & \underline{\;-5\;\;} \\ 2 & \;\;3 \end{array}$$

Saiba mais

A divisão com resto em $\mathbb{Z}$ pode ser útil para se encontrar o mdc e o mmc de dois números.

Para o mdc entre dois números existe o algoritmo da divisão sucessiva, que funciona da seguinte maneira:

- Primeiro divide-se o maior dos números pelo menor;
- Depois, se o resto for diferente de zero, deve-se dividir o divisor da divisão anterior por este resto, assim sucessivamente até que seja efetuada uma divisão exata, ou seja, em que o resto é zero.
- O máximo divisor comum entre os números dados será o dividendo da última operação efetuada

Veja, por exemplo, que para obter o mdc (280, 180) são necessárias 4 divisões sucessivas:

$$\begin{array}{r|l} 280 & \underline{\;180\;} \\ 100 & \;\;1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 180 & \underline{\;100\;} \\ 80 & \;\;1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 100 & \underline{\;80\;} \\ 20 & \;\;1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 80 & \underline{\;20\;} \\ 0 & \;\;4 \end{array}$$

Portanto mdc (280, 180) = 20.

Para calcular o mmc de dois números inteiros **a** e **b** basta multiplicar os seus valores absolutos e dividir o resultado pelo mdc desses mesmos números:

$$\text{mmc}(a,\ b) = \frac{|a| \cdot |b|}{\text{mdc}(a,\ b)}$$

Exemplo: $\text{mmc}\left(280,\ 180\right) = \dfrac{280 \cdot 180}{20} = 2\,520$

Ideais e laterais

Todo número natural *n* está associado a um conjunto de números inteiros cujos elementos são os resultados das multiplicações de todos os números inteiros por *n*. Trata-se do conjunto dos múltiplos inteiros do número *n*, que podemos indicar por $n\mathbb{Z}$.

Assim, se o conjunto {..., –52, –39, –26, –13, 0, 13, 26, 39, 52, ...} possui todos os múltiplos de 13, por exemplo, esse conjunto fica representado por $13\mathbb{Z}$

O único conjunto finito que pode ser obtido dessa for ma ocorre quando $n = 0$, pois $0\mathbb{Z} = \{0\}$.

Se $n = 1$, o conjunto resultante desse processo é o próprio conjunto dos números inteiros, $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Todos os outros valores de *n* geram conjuntos com uma infinidade de elementos denominados múltiplos de n:

- $2\mathbb{Z} = \{..., -6,\ \ 4,\ \ 2, 0, 2, 4, 6, 8, ...\}$
- $3\mathbb{Z} = \{\ \ ,\ \ 9, -6,\ \ 3, 0, 3, 6, 9, 12,\ \ \}$
- $4\mathbb{Z} = \{\ \ ,\ \ 12,\ \ 8, -4, 0, 4, 8, 12, 16,\ \ \}$
- $5\mathbb{Z} = \{..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, ...\}$

⋮

Sendo *n* um número natural, os conjuntos do tipo $n\mathbb{Z}$ são chamados de "ideais" por serem fechados às operações de adição, subtração e multiplicação. Assim, sendo a e b dois elementos de um mesmo ideal $n\mathbb{Z}$, tem-se que:

$(a + b) \in n\mathbb{Z}$ $(a - b) \in n\mathbb{Z}$ $(a \cdot b) \in n\mathbb{Z}$

Vamos demonstrar essas afirmações:

Considerando o ideal $n\mathbb{Z}$, se x_1 e x_2 são seus elemen tos, então devem existir inteiros k_1 e k_2 de modo que:

$x_1 = n \cdot k_1$ e $x_2 = n \cdot k_2$

O conjunto $n\mathbb{Z}$ é fechado em relação às operações de adição e subtração, pois:

$x_1 \pm x_2 = n \cdot k_1 \pm n \cdot k_2 = n \cdot (k_1 \pm k_2) \in n\mathbb{Z}$

O conjunto $n\mathbb{Z}$ é fechado em relação à multiplicação, pois:

$x_1 \cdot x_2 = n \cdot k_1 \cdot n \cdot k_2 = n \cdot (n \cdot k_1 \cdot k_2) \in n\mathbb{Z}$

Além dessas propriedades de fechamento dos conjuntos ideais, toda potência de expoente ordinal de um elemento de $n\mathbb{Z}$ também é elemento de $n\mathbb{Z}$ e, em relação à divisão euclidiana, embora o quociente da divisão de *a* por *b* não seja, necessariamente, elemento do ideal $n\mathbb{Z}$, o resto da divisão certamente será elemento desse conjunto.

Vamos demonstrar a última afirmação

Sendo *q* o quociente da divisão de x_1 por x_2 e *r* o resto dessa divisão:

$$x_1 = q \cdot x_2 + r$$
$$n \quad k_1 = q \quad n \quad k_2 + r$$
$$n \cdot k_1 - q \cdot n \cdot k_2 = r$$
$$r = n \cdot (k_1 - q \cdot k_2) \in \mathbb{Z}$$

Atenção

Considerando o conjunto $n\mathbb{Z}$ com $n = 13$, por exemplo, as propriedades dos ideais, vistas até aqui, garantem que:

- Somando múltiplos de 13 obtêm-se múltiplos de 13.
- A diferença de dois múltiplos de 13 também é múltipla de 13.
- Multiplicando múltiplos de 13 obtêm-se múltiplos de 13.
- O resto da divisão de dois múltiplos de 13 também é múltiplo de 13.

Cada ideal $n\mathbb{Z}$, com $n \geq 2$ está associado a exatamente $n - 1$ subconjuntos de $\mathbb{Z}$, denominados conjuntos “laterais”.

Particularmente, $2\mathbb{Z}$ designa o conjunto dos números pares, cujo único conjunto lateral associado é o conjunto dos números ímpares, formado por todos os inteiros que deixam resto 1 quando divididos pelo número 2

Os números ímpares podem ser definidos pela expressão $2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$, e trata se do único lateral do conjunto dos números pares, porque o número 1 também é o único resto diferente de zero que pode ser obtido da divisão de um número inteiro pelo número 2.

- O conjunto dos números pares é $\{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$.
- O conjunto dos números ímpares é $\{..., -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \quad \}$.

Quando um número inteiro é dividido por 3, os possíveis restos da divisão são os números 1 e 2, por isso o ideal $3\mathbb{Z}$ pode ser associado a dois conjuntos laterais diferentes:

- o conjunto dos números da forma $3k + 1$, que deixam resto 1 quando divididos por 3;
- o conjunto dos números da forma $3k + 2$, que deixam resto 2 quando divididos por 3.

Quando um número inteiro é dividido por 4, os possíveis restos da divisão são os números 1, 2 e 3, por isso o ideal $4\mathbb{Z}$ pode ser associado a três conjuntos laterais diferentes:

- o conjunto dos números da forma $4k + 1$;
- o conjunto dos números da forma $4k + 2$;
- o conjunto dos números da forma $4k + 3$.

Exercícios resolvidos

15 Determine o menor inteiro positivo que deixa resto 7 ao ser dividido por 12 e ao ser dividido por 15.

Resolução:

Sendo *n* tal número, do enunciado temos que $n = 12 \cdot k_1 + 7$ e $n = 15 \cdot k_2 + 7$, ou seja *n* pertence a dois laterais distintos com defasagem de 7 unidades dos ideais $12\mathbb{Z}$ e $15\mathbb{Z}$. Portanto:

- $(n \quad 7) \in 12\mathbb{Z}$
- $(n \quad 7) \in 15\mathbb{Z}$

Como $mmc(12, 15) = 60$ tem-se que $(n \quad 7) \in 60\mathbb{Z}$

O menor elemento positivo desse conjunto é o número 60:

$$n \quad 7 = 60 \Leftrightarrow n = 67$$

16 Encontre o menor número inteiro positivo de três algarismos N tais que:

- N dividido por 17 deixa resto 5 e
- N dividido por 27 deixa resto 22.

Resolução:

Do enunciado, existem números inteiros positivos a, b e c tais que:

$$N = 17a + 5 \Leftrightarrow N \quad 5 = 17a$$
$$N = 27b + 22 \Leftrightarrow N - 5 = 27b + 17$$

Portanto, da igualdade $17a = 27b + 17$ pode-se concluir que b é múltiplo de 17 Então:

Com $b = 0$ tem-se: $N = 27b + 22 = 27 \cdot 0 + 22 = 22$.

Com $b = 17$ tem-se: $N = 27b + 22 = 27 \cdot 17 + 22 = 481$.

Os números racionais

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais vem suprir a necessidade de se anotar quantidades intermediárias entre dois números inteiros consecutivos. Os termos “dois terços”, “três quartos” e “um quinto”, são alguns exemplos de numerais que designam quantidades entre zero e um

Como entre dois números racionais *a* e *b* distintos quaisquer, existe uma infinidade de outros números racionais, este não é um conjunto numérico discreto, pois nenhum número racional possui sucessor ou antecessor no conjunto $\mathbb{Q}$. Dizemos que o conjunto dos números racionais é “denso”

Notação fracionária de um número racional

Juntando os sinais (+) e ( ) aos dez algarismos do sistema decimal {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, obtêm-se uma coleção de 12 símbolos que são suficientes para representar qualquer número inteiro. Acrescentando se a vírgula (,) e as reticências (...) a essa coleção de símbolos, torna se possível representar os números que não são inteiros

Em relação à representação decimal dos números racionais, eles podem ser separados em três categorias: a dos números inteiros, que não precisam ser escritos com o uso da vírgula, a dos números que possuem quantidade finita de casas decimais após a vírgula e a dos números que apresentam infinitas casas decimais após a vírgula. Estes últimos são conhecidos como dízimas periódicas.

- 3
- 3,3
- 3,3333...

Sendo X o conjunto dos números não inteiros que são representados com quantidade finita de casas decimais, e Y o conjunto das dízimas periódicas, o conjunto $\mathbb{Q}$ pode ser definido como a seguinte reunião de conjuntos: $\mathbb{Q} = X \cup Y \cup \mathbb{Z}$.

A forma de representação, o que todos os números racionais têm em comum, é chamada de fracionária. Todo número racional pode ser representado por uma fração de dois inteiros: o numerador e o denominador

- $3 = \frac{3}{1}$
- $3,3 = \frac{33}{10}$
- $3,3333... = \frac{10}{3}$

Por poderem ser representados dessa forma, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais fica definido pela sentença

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{d} \ \mid \ n \in \mathbb{Z} \ , \ d \in \mathbb{Z} \ , \ d \neq 0 \right\}$$

O denominador de uma fração indica em quantas par tes deve se dividir a unidade, seja essa unidade positiva ou negativa. O numerador indica quantas dessas partes de unidade devem ser tomadas, para se compreender o número racional que a fração expressa. Exemplos:

a) A fração $\frac{1}{5}$ indica a quinta parte de uma unidade, ou seja, o valor que resulta da divisão do número um pelo número 5 Sua forma decimal é 0,2

b) A fração $\frac{2}{3}$ compreende duas das três partes iguais em que se divide uma unidade. Sua forma decimal é a dízima 0,6666....

c) A fração $\frac{5}{5}$ é equivalente ao número inteiro 1, pois compreende todas as cinco partes iguais de uma única unidade.

Tipos de frações

Embora bastante adequada aos processos aritméticos, um inconveniente deste tratamento dos números racionais é o fato de haver muitas frações $\frac{n}{d}$, de diferentes numeradores *n* e diferentes denominadores *d*, que representam o mesmo número racional Observe que:

$$... = \frac{180}{300} = \frac{90}{150} = \frac{60}{100} = \frac{45}{75} = \frac{36}{60} = \frac{30}{50} =$$
$$= \frac{18}{30} \quad \frac{15}{25} = \frac{12}{20} = \frac{9}{15} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Para verificar que todas essas frações representam o mesmo número, basta efetuar a divisão sem resto do numerador pelo denominador de cada uma e encontrar o quociente decimal 0,6.

Frações unitárias

Chama-se fração unitária toda fração cujo numerador é o número 1. Cada uma dessas frações representa um número denominado de recíproco ou inverso de algum número natural. Exemplos:

Número	Fração unitária	Representação decimal
Recíproco de 2	$\frac{1}{2}$	0,5
Recíproco de 3	$\frac{1}{3}$	0,3333333333333333...
Recíproco de 4	$\frac{1}{4}$	0,25
Recíproco de 5	$\frac{1}{5}$	0,2
Recíproco de 6	$\frac{1}{6}$	0,1666666666666666...
Recíproco de 7	$\frac{1}{7}$	0,1428571428571428.
Recíproco de 8	$\frac{1}{8}$	0,125
Recíproco de 9	$\frac{1}{9}$	0,1111111111111111...
Recíproco de 10	$\frac{1}{10}$	0,1
Recíproco de 11	$\frac{1}{11}$	0,0909090909090909...
Recíproco de 12	$\frac{1}{12}$	0,0833333333333333...
Recíproco de 13	$\frac{1}{13}$	0,0769230769230769
⋮	⋮	⋮

Frações decimais

São aquelas com denominadores que são potências de 10.

Exemplos: $\frac{1}{10}, \frac{75}{100}, \frac{133}{1000}, ...$.

Frações próprias

São frações que apresentam o numerador menor que o denominador.

Exemplos: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, ...$

Frações impróprias

São frações que apresentam o numerador maior que o denominador.

Exemplos: $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{12}{5}, \frac{25}{6}, ...$

Frações aparentes

São frações em que o numerador é múltiplo do denominador. Frações aparentes na verdade representam números inteiros.

Exemplos: $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{24}{8} = 3$, $\frac{75}{15} = 5$, $\frac{60}{6} = 10$,

Frações redutíveis

São frações que indicam razões entre múltiplos de um mesmo número natural $n > 1$.

Exemplos:

O numerador e o denominador da fração $\frac{6}{4}$ são múltiplos de 2. ($n = 2$)

O numerador e o denominador da fração $\frac{24}{30}$ são múltiplos de 6. ($n = 6$)

O numerador e o denominador da fração $\frac{75}{100}$ são múltiplos de 25. ($n = 25$)

As frações redutíveis podem ser simplificadas, até sua forma irredutível, dividindo-se ambos os seus termos pelo maior divisor comum entre eles. Veja:

$$\frac{6}{4} = \frac{6 \div 2}{4 \div 2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{24}{30} = \frac{24 \div 6}{30 \div 6} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{75}{100} = \frac{75 \div 25}{100 \div 25} = \frac{3}{4}$$

Frações irredutíveis

São frações formadas por dois números primos entre si, ou seja, números cujo maior divisor comum é 1.

Exemplos: $\frac{3}{2}$ mdc(3, 2) = 1; $\frac{4}{5}$ mdc(4, 5) = 1; $\frac{32}{45}$ mdc(32, 45) = 1; ...

Outras notações para os números racionais

A forma fracionária de um número racional deixa bem claro como a parte desejada deve ser obtida da unidade, porém não é muito eficiente quando se deseja comparar números racionais diferentes, a fim de decidir qual deles é o maior, por exemplo. Para isso recomendam-se as formas decimais.

Forma decimal

Para encontrar a forma decimal, partindo da fracionária, basta que se execute a divisão do numerador da fração pelo denominador da mesma, até que o resto final seja igual a zero, ou até que os restos parciais da divisão comecem a se repetir.

Se a divisão gerar resto zero, então o quociente obtido será o representante decimal da fração, mas se os restos começarem a se repetir, então o quociente terá uma infinidade de algarismos que se repetirão periodicamente

Exercícios resolvidos

17 Coloque os elementos do aconjunto $\left\{\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}, \frac{13}{20}, \frac{31}{50}\right\}$ em ordem crescente.

Resolução:

Efetuando as divisões indicadas por cada fração:

$$\frac{3}{5} = 3 \div 5 = 0{,}6$$

$$\frac{5}{8} = 5 \div 8 = 0{,}625$$

$$\frac{7}{10} = 7 \div 10 = 0{,}7$$

$$\frac{13}{20} = 13 \div 20 = 0{,}65$$

$$\frac{31}{50} = 31 \div 50 = 0{,}62$$

Como $0{,}6 < 0{,}62 < 0{,}625 < 0{,}65 < 0{,}7$, a ordem crescente das frações será: $\frac{3}{5}$, $\frac{31}{50}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{20}$ e $\frac{7}{10}$.

18 **Enem 2011** O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21 mm; 68,102 mm; 68,001 mm; 68,02 mm e 68,012 mm

Para colocar o pistão no motor que está sendo con sertado, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que precisa

Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro

A 68,21 mm
B 68,102 mm
C 68,02 mm
D 68,012 mm
E 68,001 mm

Resolução:

Escrevendo em ordem decrescente, temos: 68,21 mm, 68,102 mm, 68,02 mm, 68,012 mm e 68,001 mm. O mais próximo ao diâmetro 68 mm é 68,001 mm.

Alternativa: E.

Mesmo não sendo necessário, na representação de um número decimal podemos escrever zeros à direita do último algarismo após a vírgula. A visualização da ordem crescente pode ficar mais clara se todos os números forem escritos com a mesma quantidade de casas decimais. Compare as colunas da seguinte tabela:

Número mínimo de casas decimais	Mesmo número de casas decimais
0,6	0,600
0,62	0,620
0,625	0,625
0,65	0,650
0,7	0,700

A notação monetária, por exemplo, padroniza a representação dos valores com duas casas decimais após a vírgula. Nos estudos da física e da química, muitos valores aproximados são representados com o uso de algarismos significativos Nesse contexto, a representação 0,620 transmite uma aproximação bem mais precisa do que, por exemplo, a representação 0,62.

Em relação às representações periódicas dos números decimais, o uso de uma barra horizontal sobre os algarismos que se repetem à direita da vírgula é bem mais preciso do que o simples uso das reticências à di reita do número.

Veja, por exemplo, como a cifra 0,4324... não deixa claro qual é o período da dízima que está sendo representada.

- $x = 0{,}432444444 \rightarrow$ Período: 4 (1 algarismo)
- $y = 0{,}432424242... \rightarrow$ Período: 24 (2 algarismos)
- $z = 0{,}432432432... \rightarrow$ Período: 432 (3 algarismos)

Mas, com o uso da barra horizontal, elimina-se esse tipo de ambiguidade:

- $x = 0{,}432\overline{4} \rightarrow$ Período: 4
- $y = 0{,}43\overline{24} \rightarrow$ Período: 24
- $z = 0{,}\overline{432} \rightarrow$ Período: 432

Frações geratrizes

Memorizar as dízimas periódicas oriundas de frações unitárias pode agilizar o processo de obtenção das frações geratrizes de outras dízimas periódicas Assim:

- Saber que $0{,}111111111 \; = \frac{1}{9}$ permite concluir, por exemplo, que $0{,}444444444. \; = \frac{4}{9}$.
- Saber que $0{,}01010101... = \frac{1}{99}$ permite concluir, por exemplo, que $0{,}47474747... = \frac{47}{99}$.
- Saber que $0{,}001001001... = \frac{1}{999}$ permite concluir, por exemplo, que $0{,}473473473... = \frac{473}{999}$

Mas, também existe um processo algébrico bastante eficiente para se encontrar frações geratrizes de dízimas periódicas.

Sendo *p* o número de algarismos do período da dízima gerada por uma fração *F*, o primeiro passo do processo é multiplicar a dízima por 10^P

O segundo passo consiste em subtrair a dízima original do resultado obtido no primeiro passo, obtendo um resultado sem a infinidade de casas decimais da dízima.

O terceiro passo, é resolver a equação obtida no segundo passo.

Observe os exemplos a seguir:

1) $F = 0{,}4444... \Rightarrow p = 1$

Primeiro passo:

$$F = 0{,}4444. \;\; \Rightarrow 10^1 \;\; F = 10 \;\; F = 4{,}4444.$$

Segundo passo:

$$\begin{array}{r} 10F = 4{,}4444... \\ F = 0{,}4444 \\ \hline 9F = 4{,}0000... \end{array} -$$

Terceiro passo:

$$9F = 4 \;\; \Leftrightarrow \;\; F = \frac{4}{9}$$

2) $F = 0{,}47474747... \Rightarrow p = 2$

Primeiro passo:

$$F = 0{,}47474747... \Rightarrow 10^2 \cdot F = 100 \cdot F = 47{,}47474747...$$

Segundo passo:

$$\begin{array}{r} 100F = 47{,}474747 \\ F = 0{,}474747... \\ \hline 99F = 47{,}000000... \end{array}$$

Terceiro passo:

$$99F = 47 \;\; \Leftrightarrow \;\; F = \frac{47}{99}$$

3) $F = 0{,}473473473473... \Rightarrow p = 3$

Primeiro passo:

$$F = 0{,}473473473... \Rightarrow 10^3 \cdot F = 1000 \cdot F = \\ = 473{,}473473473...$$

Segundo passo:

$$\begin{array}{r} 1000F = 473{,}473473473... \\ F = 0{,}473473473... \\ \hline 999F = 473{,}000000000. \end{array}$$

Terceiro passo:

$$999F = 473 \;\; \Leftrightarrow \;\; F = \frac{473}{999}$$

Forma percentual

As frações decimais cujos denominadores são iguais a $10^2 = 100$ também podem ser representadas na forma de porcentagem. Por exemplo, $\frac{75}{100}$ pode ser representado por 75%.

Forma mista

As frações impróprias também podem ser expressas na forma de números mistos. Para isso, basta efetuar a divisão com resto do numerador pelo denominador e apresentar o quociente ao lado de uma fração própria, que deve ser escrita como se fosse um algarismo à direita do quociente O numerador dessa fração própria é o resto da divisão efetuada, e o denominador é o mesmo da fração imprópria original. Observe:

$$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \quad \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \quad \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5} \quad \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$$

Operações com números racionais

O conjunto dos números racionais é fechado em relação às quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão, com exceção da divisão por zero Assim, sendo *a* e *b* dois números racionais quaisquer:

$(a + b) \in \mathbb{Q}$ $(a \quad b) \in \mathbb{Q}$ $(a \cdot b) \in \mathbb{Q}$

Além disso, nos casos em que b ≠ 0, tem-se:

$(a \div b) \in \mathbb{Q}$

Adição e subtração $\mathbb{Q}$

Na forma fracionária, as adições e subtrações de números racionais são executadas entre os numeradores das frações apenas quando todas as frações possuírem o mesmo denominador

Se as frações não tiverem o mesmo denominador, elas devem ser substituídas por frações equivalentes que tenham um mesmo denominador Para facilitar os cálculos, recomenda-se que esse denominador comum seja o mínimo múltiplo comum (mmc) dos denominadores das frações originais.

Assim, sendo *a*, *b*, *c* e *d* números inteiros tais que c d ≠ 0, tem se:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d' \pm b \cdot c'}{m}, \text{ em que}: \begin{cases} m = \text{mmc}(c, d) \\ c' = c \div m \\ d' = d \div m \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

19 Considere todos os números racionais entre 3 e 6 que são representados por frações irredutíveis com denominador igual a 6, e assinale a alternativa que apresenta o valor da soma desses números

A 25
B 26
C 27
D 28
E 29

Resolução:

Sendo $\frac{n}{6}$ uma menor fração irredutível entre 3 e 6, temos que $18 < n < 36$ e mdc $(n, 6) = 1$ Logo, os possíveis valores de n são: 19, 23, 25, 29, 31 e 35

$$\frac{19}{6} + \frac{23}{6} + \frac{25}{6} + \frac{29}{6} + \frac{31}{6} + \frac{35}{6} =$$

$$= \frac{19 + 23 + 25 + 29 + 31 + 35}{6} = \frac{162}{6} = 27.$$

Alternativa: C.

20 **Unisinos 2012** Uma fração unitária é uma fração da forma $\frac{1}{n}$, onde n é um número natural.

Uma fração escrita como soma de frações unitárias é denominada fração egípcia.

Por exemplo: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ e $\frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99}$.

A soma $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{60}$ é a representação egípcia de qual fração?

A $\frac{71}{120}$.
B $\frac{3}{71}$.
C $\frac{17}{60}$.
D $\frac{19}{40}$.
E $\frac{17}{30}$.

Resolução:

mmc(3, 8, 60) = 120

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{60} = \frac{1 \cdot 40 + 1 \cdot 15 + 1 \cdot 2}{120} =$$

$$= \frac{40 + 15 + 2}{120} = \frac{57}{120} = \frac{19}{40}$$

Alternativa: D.

Multiplicação em $\mathbb{Q}$

Na forma fracionária, o produto de números racionais é obtido multiplicando-se numerador por numerador e denominador por denominador de cada fração multiplicada.

Assim, sendo *a*, *b*, *c* e *d* números inteiros tais que c · d ≠ 0, tem-se:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$$

Divisão em $\mathbb{Q}$

A operação inversa da multiplicação é chamada de divisão, seus termos são o dividendo e o divisor, o símbolo usado para indicá-la é (÷). No conjunto dos números inteiros, a divisão pode produzir dois resultados: o quociente e o resto, mas no conjunto dos números racionais a divisão produz apenas um resultado: o quociente, que também costuma ser chamado de razão.

A divisão não é uma operação comutativa, como se pode observar nos exemplos a seguir:

- A razão entre os números 3 e 5 é representada pelo número decimal 0,6.
- A razão entre os números 5 e 3 é representada pela dízima periódica $1{,}66666... = 1{,}\overline{6}$.

Na forma fracionária, o numerador do quociente de dois números racionais é obtido multiplicando o numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração, e o denominador do quociente é obtido multiplicando o denominador da primeira fração pelo numerador da segunda fração.

Assim, sendo *a*, *b*, *c* e *d* números inteiros tais que c · b · d ≠ 0, tem-se:

$$\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$$

Exercício resolvido

21 Multiplicar um número por 0,0125 equivale a dividi lo por

A 8. **C** 1,25. **E** 125.
B 80. **D** 12,5.

Resolução:

Sendo N um número qualquer:

$N \cdot 0{,}0125 = N \cdot \frac{125}{10000} = N \cdot \frac{1}{80} = \frac{N}{80}$.

Portanto, a multiplicação mencionada equivale à divisão pelo número 80.

Alternativa: B.

Potenciação em $\mathbb{Q}$

A potenciação não é uma operação fechada no conjunto $\mathbb{Z}$, pois bases inteiras, diferentes de 1, 0 e 1, com expoentes negativos geram resultados que não são inteiros.

Os resultados dessas potências formam um subconjunto de $\mathbb{Q}$ ao qual pertencem todos os inversos multiplicativos ou recíprocos dos números inteiros, de modo que, para todo inteiro b ≠ 0 e *n* natural, temos:

- $b^{-1} = \frac{1}{b}$
- $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

Se a base for um número racional $\frac{a}{b}$, com *a* e *b* inteiros:

- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Se a base for positiva e o expoente for um número racional não inteiro, as potências também poderão ser expressas como radiciações.

A potenciação é uma operação distributiva em relação ao numerador e ao denominador de um número racional.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exercício resolvido

22 Considere as dízimas periódicas x = 0,12121212... e y = 0,21212121... Determine:

a) A fração irredutível que representa o valor de y – x.

b) O valor da expressão $\frac{x^{-1} - y^{-1}}{y + x}$.

Resolução:

a) x = 0,12121212...

$$\begin{array}{r} 100x = 12{,}121212 \\ x = 0{,}121212... \\ \hline 99x = 12{,}000000... \end{array}$$

$$99x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

y = 0,21212121...

$$\begin{array}{r} 100y = 21{,}212121... \\ y = 0{,}212121 \\ \hline 99y = 21{,}000000... \end{array}$$

$$99y = 21 \Rightarrow y = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$$

Portanto:

$$y - x = \frac{7}{33} - \frac{4}{33} = \frac{3}{33} = \frac{1}{11}$$

b)

$$\frac{x^{-1}\ \ y^{-1}}{y + x} = \frac{\left(\frac{4}{33}\right)^{-1} - \left(\frac{7}{33}\right)^{-1}}{\frac{7}{33} + \frac{4}{33}} = \frac{\frac{33}{4}\ \ \frac{33}{7}}{\frac{11}{33}} = \frac{33\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)}{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{33\left(\frac{7-4}{28}\right)}{\frac{1}{3}} = 33\left(\frac{3}{28}\right) \cdot \frac{3}{1} = \frac{297}{28}$$

Radiciação em $\mathbb{Q}$

A radiciação também é uma operação distributiva em relação ao numerador e ao denominador de um número racional.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Potências de bases positivas e expoentes que são frações unitárias exprimem radiciações, cujo índice do radical coincide com o denominador do expoente. Exemplos:

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3 \quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad 625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = 5$$

Assim, sendo b > 0 e d ≠ 0:

$$b^{\frac{1}{d}} = \sqrt[d]{b}$$

Quando o expoente de uma potência de base positiva é um número racional $\frac{n}{d}$, com n > 1, então o numerador *n* do expoente permanece como expoente da raiz:

$$b^{\frac{n}{d}} = \left(\sqrt[d]{b}\right)^n$$

Com b > 0, não importa a ordem de execução entre a potenciação e a radiciação Assim, o expoente pode ser escrito dentro ou fora do símbolo radical:

$$\left(\sqrt[d]{b}\right)^n = \sqrt[d]{b^n}$$

Exercício resolvido

23 Se o volume de um cubo, em litros, é igual ao triplo da raiz quadrada de $(4,33... + 2,88... \quad 0,11...)$, então a medida, em centímetros, da aresta desse cubo é igual a:

A 0,02
B 0,2
C 2
D 20
E 200

Resolução:

Sendo $0,11... = \frac{1}{9}$, $0,33. \ = \frac{3}{9}$ e $0,88 \ = \frac{8}{9}$, tem-se que:

$$4,33. + 2,88. = 0,11 \quad +4 + \frac{3}{9} \quad 2 \quad \frac{8}{9} \quad \frac{1}{9}$$

$$= 6 + \frac{10}{9} = \frac{54 + 10}{9} = \frac{64}{9}$$

Portanto, o volume desse cubo é igual a

$$3 \cdot \sqrt{\frac{64}{9}} = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8 \text{ litros.}$$

Como 8 litros equivalem a 8000 cm^3, temos que a medida da aresta desse cubo é igual a $\sqrt[3]{8000} = 20$ cm
Alternativa: D.

Logaritmo em $\mathbb{Q}$

Sendo *a* e *b* duas potências racionais de um mesmo número natural $c > 1$, então existem inteiros *n* e *d* tais que: $a = c^n$ e $b = c^d$.

Nessas condições, se $d \neq 0$, o logaritmo de *a* na base *b* será o número racional $\frac{n}{d}$.

$$\log_b(a) = \log_{c^d}(c^n) = \frac{n}{d}$$

Exemplo: $\log_8(16) = \log_{2^3}(2^4) = \frac{4}{3}$

Os números reais

Por muito tempo, pensou-se que o conceito de número racional era suficiente para representar qualquer quantidade, mas as grandezas métricas da Geometria Euclidiana mostraram a insuficiência desse conceito Para a escola pitagórica tudo era número e, dessa forma, todos os comprimentos poderiam ser expressos por números.

Tudo ia bem com os números racionais até que ten taram exprimir, em alguma unidade, os comprimentos das diagonais de quadrados e cubos. Nesse ponto, os pitagóricos encontraram uma dificuldade imensa. Muita tinta se gastou até verificarem ser impossível representar essas medidas por razões entre números inteiros, ou seja, por números racionais. Conclusão: existem muitos números além dos elementos do conjunto $\mathbb{Q}$.

Assim, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais vem da necessidade geométrica de admitir, por hipótese, a continuidade numérica em suas medidas.

O conjunto $\mathbb{R}$ é construído acrescentando-se, ao conjunto dos números racionais, todos os números que tenham representação decimal infinita, mas não periódica Esses números são denominados irracionais.

Números irracionais

Os números irracionais foram descobertos pela escola pitagórica pouco antes do século IV a.C. Muito tempo depois, o matemático escocês John Napier descobriu outros números irracionais estudando os logaritmos.

Embora não seja possível representar o valor exato de um número irracional usando-se apenas os algarismos e a vírgula, algumas aproximações podem ser feitas de acordo com a necessidade de se compreender a grandeza da resposta de um problema Os números irracionais podem ser definidos como limites para sucessões de números racionais, com número cada vez maior de casas decimais.

Na tabela a seguir, vemos séries decrescentes de nú meros racionais que definem $\sqrt{2}$ e $\log(2)$:

x	x^2
2	4
1,5	**2,**25
1,42	**2,0**164
1,415	**2,00**2225
1,4143	**2,000**24449
1,41422	**2,0000**182084
1,414214	**2,00000**1237796
1,4142136	**2,000000**10642496
⋮	⋮
$\sqrt{2}$	2,00000000000000...

x	10^x
1	10
0,4	**2,**511886431509
0,31	**2,0**41737944669...
0,302	**2,00**4472027365
0,3011	**2,000**322407865...
0,30103	**2,0000000**19968
0,301029996	**2,00000000**1547...
0,3010299957	**2,000000000**165.
⋮	⋮
log(2)	2,000000000000...

Na próxima tabela, vemos séries crescentes que definem o mesmo número:

x	x^2
1	1
1,4	**1,9**6
1,41	**1,9**881
1,414	**1,999**396
1,4142	**1,9999**6164
1,41421	**1,9999**899241
1,414213	**1,99999**8409369
1,4142135	**1,9999999**82358225
⋮	⋮
$\sqrt{2}$	2,00000000000000.

x	10^x
0	1
0,3	**1,99**5262314968
0,301	**1,999**861869632
0,30102	**1,9999**53968795...
0,301029	**1,99999**5414803...
0,3010299	**1,999999**559451...
0,30102999	**1,9999999**73916...
0,301029995	**1,99999999**6942...
⋮	⋮
log(2)	2,000000000000

Comparando as duas tabelas, é possível garantir que 1,414213 são os primeiros algarismos do número representado por $\sqrt{2}$ e que 0,301002999 são os primeiros algarismos do número representado por log(2).

A lista a seguir apresenta aproximações com dois algarismos decimais para alguns números irracionais bastante importantes:

- $\sqrt{2} \cong 1,41$
- $\sqrt{3} \cong 1,73$
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,62$
- $\log(2) \cong 0,30$
- $\log(3) \cong 0,48$
- $\pi \cong 3,14$
- $e \cong 2,72$

Exercício resolvido

24 Assinale a alternativa que apresenta o número inteiro mais próximo do valor da expressão:

$$E = \frac{61}{3} + \frac{7\pi}{11} \quad \frac{10\sqrt{2}}{7}$$

A 20 B 15 C 10 D 5 E 2

Resolução:

Dividindo-se o número 61 por 3 obtemos quociente igual à dízima $20,333... = 20,\overline{3}$. Aproximando-se π para a fração $\frac{22}{7}$, usada no desenho geométrico, temos que $\frac{7\pi}{11}$ é, aproximadamente, igual a 2. Finalmente, usando-se o decimal 1,4 para aproximar a raiz quadrada de 2, temos que a fração $\frac{10\sqrt{2}}{7}$ também é, aproximadamente, igual a 2. Portanto: $E = \frac{61}{3} + \frac{7\pi}{11} \quad \frac{10\sqrt{2}}{7} = 20,333... + 2 \quad 2 \cong 20.$

Alternativa: A.

Irracionais algébricos

Chamamos de algébricos a todos os números que são soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros.

Todos os irracionais algébricos oriundos de equações polinomiais de grau menor ou igual a 4 podem ser expressos por somas e produtos entre radicais e números racionais.

Exemplos:

- O número racional $\frac{2}{3}$ é algébrico, por ser a solução da equação $3x \quad 2 = 0$.
- Os números irracionais $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1 \quad \sqrt{5}}{2}$ são algébricos, por serem as soluções de $x^2 \quad x + 1 = 0$
- O número irracional $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ é algébrico, por ser uma das soluções de $x^3 \quad 6x \quad 6 = 0$.
- O número irracional $\sqrt[4]{3}$ é algébrico, por ser uma das soluções de $x^4 \quad 3 = 0$.

Do quinto grau em diante há muitas equações polinomiais cujas soluções não admitem representações por meio de radicais.

Radicais simples e radicais duplos

Um radical simples é um número irracional algébrico que pode ser expresso por uma única operação de radiciação, em que o índice do radical é um número natural $n \geq 2$ e o radicando é um número racional. São exemplos de radicais simples: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$, $-\sqrt[4]{4,2}$, ...

Radicais duplos são números irracionais, também algébricos, que precisam ser expressos por uma radiciação cujo radicando seja a soma de um número racional com um radical simples. São exemplos de radicais duplos: $\sqrt{3+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{2 \quad \sqrt{5}}{4}}$, $-\sqrt[4]{1,5+\sqrt[3]{2}}$, ...

Os irracionais algébricos também podem ser representados por radicais triplos, quádruplos etc.

Operações com radicais simples

Em relação às operações aritméticas de adição e subtração, multiplicação e divisão, o conjunto ℝ dos números reais herda todas as propriedades que são válidas para essas operações no conjunto ℚ dos números racionais. Mas, como os irracionais não podem ser expressos por frações de números inteiros nem por números decimais com precisão, os resultados das operações entre números racionais e números irracionais, como os radicais simples, ficam simplesmente indicados, pelas próprias operações. Exemplos:

- A soma do número racional 2 com o número irracional $\sqrt{3}$ é simplesmente $2+\sqrt{3}$.
- O produto do número racional $\frac{2}{5}$ pelo número irracional $\sqrt[3]{6}$ é simplesmente $\frac{2\sqrt[3]{6}}{5}$

! Atenção

O resultado da adição de um número racional com um número irra cional é sempre um número irracional.

O resultado da multiplicação de um número racional diferente de zero por um número irracional é sempre um número irracional

Simplificações de radicais

Como a radiciação possui propriedade distributiva em relação à multiplicação, se o radicando de uma raiz n ésima puder ser escrito como o produto de dois números de modo que um deles seja uma n-ésima potência, a represen tação do número irracional pode ser simplificada

Simplificam-se raízes quadradas de números que são múltiplos de algum quadrado perfeito, como o número 18 que, por exemplo, é múltiplo de 9 (o quadrado do número 3).

- $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

Simplificam-se raízes cúbicas de números que são múltiplos de algum cubo perfeito, como o número 40 que, por exemplo, é múltiplo de 8 (o cubo do número 2).

- $\sqrt[3]{48}=\sqrt[3]{8\cdot 5}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}$

Outro tipo de simplificação ocorre quando o radicando é uma potência cujo expoente possui fator comum com o índice do radical.

Todo radical pode ser expresso por uma potência de expoente racional e, quando os termos de uma fração racional são múltiplos de um mesmo número natural k > 1, essa fração pode ser simplificada dividindo-se os termos da fração pelo número *k*

Ou seja, como $\sqrt[d]{a^n}=a^{\frac{n}{d}}=a^{\frac{n\div k}{d\div k}}$, para a > 0, d > 0 e k > 0, também é correto afirmar que:

$$\sqrt[d]{a^n}=\sqrt[d\div k]{a^{n\div k}}$$

Exemplos:

- $\sqrt[4]{25}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[4\div 2]{5^{2\div 2}}=\sqrt[2]{5^1}=\sqrt{5}$
- $\sqrt[6]{125}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6\div 3]{5^{3\div 3}}=\sqrt[2]{5^1}=\sqrt{5}$
- $\sqrt[6]{625}=\sqrt[6]{5^4}=\sqrt[6\div 2]{5^{4\div 2}}=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$

Adição de radicais simples

Sem apelar para aproximações decimais, os radicais simples são somados apenas se possuírem o mesmo índice e o mesmo radicando. Exemplos:

- $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$
- $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$
- $3\sqrt[4]{7}+6\sqrt[4]{7}=9\sqrt[4]{7}$

Multiplicação de radicais simples

Multiplicamos radicais simples de mesmo índice *d*, con servando o radical e multiplicando os radicandos.

$$\sqrt[d]{a}\cdot\sqrt[d]{b}=\sqrt[d]{a\cdot b}$$

Exemplos:

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$
- $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{20}$
- $2\sqrt[4]{5}\cdot 3\sqrt[4]{6}=6\sqrt[4]{30}$

Quando os índices *d* e *d'* dos radicais são diferentes, reescrevemos esses radicais usando o mínimo múltiplo comum dos índices *d* e *d'*. Observe o exemplo:

$$\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[4]{5^1}\cdot\sqrt[6]{2^1}=\sqrt[4\cdot 3]{5^{1\cdot 3}}\cdot\sqrt[6\cdot 2]{2^{1\cdot 2}}=\sqrt[12]{5^3}\cdot\sqrt[12]{2^2}=$$
$$=\sqrt[12]{125}\cdot\sqrt[12]{4}=\sqrt[12]{125\cdot 4}=\sqrt[12]{500}$$

No exemplo, acima: d = 4, d' = 6 e mmc(4, 6) = 12

Escrever radicais sempre com o mesmo índice permite, não apenas efetuar a multiplicação, como também facilitar a comparação entre números irracionais, para saber qual é o maior ou menor.

Exercícios resolvidos

25 Simplificando-se corretamente a expressão $\sqrt{18}+\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}+\sqrt{8}$, pode-se obter:

A $3\sqrt{2}+6$
B $11\sqrt{2}$
C $13\sqrt{3}$
D $5\sqrt{2}+12$
E $2\sqrt{3}+6$

Resolução:

$\sqrt{18}+\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}+\sqrt{8}=\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{8\cdot 18}+\sqrt{4\cdot 2}=3\sqrt{2}+$
$+\sqrt{144}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}+12$

Alternativa: D.

26 Considere os números irracionais $x=\sqrt[2]{3}$, $y=\sqrt[3]{5}$ e $z=\sqrt[4]{10}$. Assinale a alternativa que apresenta a correta relação de ordem crescente entre esses números:

A $z<y<x$
B $z<x<y$
C $x<y<z$
D $y<z<x$
E $y<x<z$

Resolução:

mmc(2, 3, 4) = 12

$$x = \sqrt[2]{3^1} = \sqrt[2\cdot 6]{3^{1\cdot 6}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$
$$y = \sqrt[3]{5^1} = \sqrt[3\cdot 4]{5^{1\cdot 4}} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$$
$$z = \sqrt[4]{10^1} = \sqrt[4\cdot 3]{10^{1\cdot 3}} = \sqrt[12]{10^3} = \sqrt[12]{1000}$$

Portanto, $y < x < z$

Alternativa: E

Racionalização de denominadores

Frações que apresentam denominadores do tipo $\sqrt[d]{a^n}$ podem ter o numerador e o denominador multiplicados pelo termo $\sqrt[d]{a^m}$, de modo que m + n = d. Esse termo é denominado fator racionalizante.

$$\frac{1}{\sqrt[d]{a^n}} = \frac{1}{\sqrt[d]{a^n}} \cdot \frac{\sqrt[d]{a^m}}{\sqrt[d]{a^m}} = \frac{\sqrt[d]{a^m}}{\sqrt[d]{a^n \cdot a^m}} = \frac{\sqrt[d]{a^m}}{\sqrt[d]{a^{n+m}}} = \frac{\sqrt[d]{a^m}}{\sqrt[d]{a^d}} = \frac{\sqrt[d]{a^m}}{a}$$

Ao se fazer isso, o valor da fração não é alterado, mas sim a forma de escrevê la, de modo que o denominador da fração equivalente obtida não é um número irracional

Exemplos:

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$
- $\frac{1}{\sqrt[4]{5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{\sqrt[4]{125}}{5}$
- $\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{2}$

Irracionais transcendentes

Se um número irracional não é algébrico, então esse número é denominado transcendente Assim, se α é um número real e não existe equação polinomial de coeficientes inteiros tal que α seja uma de suas soluções, então α é um número transcendente

Em 1844, o matemático francês Joseph Liouville encontrou o primeiro número irracional transcendente e, em 1974, o matemático alemão Georg Cantor descobriu que o conjunto dos números transcendentes é infinitamente mais amplo que o conjunto dos números algébricos

Os principais números transcendentes estudados no Ensino Médio são a constante geométrica π e a constante de Euler (*e*) usada como base para os logaritmos naturais. Os algarismos das casas decimais desses dois números podem ser obtidos efetuando-se as adições de séries específicas de números racionais.

$$\pi = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{5} + \frac{4}{7} \quad \frac{4}{9} + \frac{4}{11} + \frac{4}{13} \quad \frac{4}{15} \quad \frac{4}{17} \quad \frac{4}{19} \quad \frac{4}{21} + \frac{4}{23} \quad \ldots$$

$$e = 2 + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \ldots$$

O eixo real

O conjunto dos números reais pode ser representado pelos pontos de uma única reta denominada reta real, ou eixo real. Para isso, basta tomar dois pontos distintos de uma reta e associá-los aos números zero e um. O ponto zero é denominado origem da reta real, e a distância do ponto zero (0) ao ponto um (1) é tomada como unidade de medida para todos os demais segmentos contidos na reta Dessa forma, cada ponto da reta real fica associado a um único número do conjunto $\mathbb{R}$.

Quando o eixo real é representado na horizontal, é comum que a unidade fique localizada à direita da origem e, assim, os pontos localizados à esquerda da origem re presentam os números negativos

Propriedades das potências em ℝ

Quando a base de uma potenciação é negativa e o expoente é uma fração própria de denominador par, a po tência resultante escapa do conjunto dos números reais

Por exemplo $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

Assim, as propriedades a seguir são válidas apenas quando as bases das potências são positivas e os deno minadores das frações não são nulos.

Para potências de mesma base a > 0 e diferentes expoentes *r* e *s* reais:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad \left(a^r\right)^s = a^{r\cdot s} = a^{s\cdot r} = \left(a^s\right)^r$$

Para potências de mesmo expoente real *n* e bases positivas diferentes *a* e *b*:

$$\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

! Atenção

A potenciação não admite propriedade distributiva em relação à adição ou à subtração. Assim, para todo n ≠ 1, tem-se que:

$$\left(a + b\right)^n \neq a^n + b^n \qquad \left(a \quad b\right)^n \neq a^n \quad b^n$$

Particularmente, para potências de base a > 0 e ex poentes no conjunto {1, 0, 1}, temos:

$$a^1 = a \quad a^0 = 1 \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Para potências de base a > 0 e expoentes negativos e fracionários:

$$a^{-1} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{n}{d}} = \left(\sqrt[d]{a}\right)^n = \sqrt[d]{a^n}$$

Exercícios resolvidos

27 Escreva o número $16^7 \cdot 125^{10}$ em notação científica.

Resolução:

$16^7 \cdot 125^{10} = (2^4)^7 \cdot (5^3)^{10} = 2^{28} \cdot 5^{30} = 2^{28} \cdot 5^{28} \cdot 5^2 =$
$= (2 \cdot 5)^{28} \cdot 25 = 25 \cdot 10^{28} = 2{,}5 \cdot 10^{29}$

Portanto, $16^7 \cdot 125^{10} = 2{,}5 \cdot 10^{29}$

28 Classifique as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) O produto entre dois números naturais é um número natural.
b) O produto entre dois números inteiros negativos é um número natural
c) Uma potência de base e expoente naturais é um número natural
d) A diferença entre dois números naturais é um número natural.
e) A razão entre dois números inteiros não nulos é um número inteiro.
f) A razão entre dois números racionais não nulos é um número racional.
g) A diferença entre dois números racionais pode ser um número irracional
h) A soma de dois números irracionais é um número irracional
i) Uma potência de base inteira e expoente racional é necessariamente um número real.
j) O quociente entre dois números reais é sempre um número real.
k) Uma potência de base real positiva e expoente real é necessariamente um número positivo.
l) A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional
m) O produto entre um número racional não nulo e um número irracional é sempre um número irracional.

Resolução:

Alternativa a): verdadeira. – O conjunto N é fechado em relação à operação de multiplicação.
Alternativa b): verdadeira. – O produto de dois inteiros negativos é um inteiro positivo, portanto, natural
Alternativa c): falsa O conjunto N é fechado em relação à operação de potenciação.
Alternativa d): falsa. O conjunto N não é fechado em relação à operação de subtração: $3 - 7 = -4 \notin \mathbb{N}$.
Alternativa e): falsa. O conjunto Z não é fechado em relação à operação de divisão: $\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0{,}4 \notin \mathbb{Z}$.
Alternativa f): verdadeira. – Com exceção da divisão por zero, o conjunto Q é fechado em relação à operação de divisão.
Alternativa g): falsa. – O conjunto Q é fechado em relação à operação de subtração.
Alternativa h): falsa. – A soma de dois irracionais opostos é zero, por exemplo: $-\pi + \pi = 0$.
Alternativa i): falsa. – Uma potência de base negativa e expoente fracionário pode não ser um número real
Alternativa j): falsa Não existe divisão por zero.
Alternativa k): verdadeira. Apenas potências de base negativa podem ser negativas ou irreais.
Alternativa l): verdadeira. – Caso contrário, o conjunto dos racionais não seria fechado em relação à subtração.
Alternativa m): verdadeira Caso contrário, o conjunto dos racionais não seria fechado em relação à divisão.

Teorema fundamental da aritmética

Um enunciado possível para o teorema fundamental da aritmética é que, desconsiderando as permutações dos fatores de um produto, todo número natural maior que 1 possui decomposição única em fatores primos.

Para expressar algebricamente esse teorema consideram-se duas sequências numéricas:

- **$(p_1, p_2, p_3, \ldots)$** a sequência dos números primos positivos em ordem crescente.
- **$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$** uma série de números naturais tal que existe k para o qual $\alpha_i = 0$, sempre que $i > k$.

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$, tem-se:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i} \cdot \ldots$$

Nessa expressão, cada expoente α indica quantas vezes o número n é divisível pelo número primo p de mesmo índice i. Também é importante observar a existência de uma constante k que indica, em cada sequência de expoentes α, a posição a partir da qual todos os termos α são nulos.

O número 180, por exemplo, pode ser dividido pelo número:

- 2, duas vezes sucessivas $\Rightarrow \alpha_1 = 2$
- 3, também duas vezes sucessivas $\Rightarrow \alpha_2 = 2$
- 5, apenas uma vez $\Rightarrow \alpha_3 = 1$

Além disso, o número 180 não é divisível por nenhum outro número primo maior ou igual a 7 e, como esse é o 4º termo da sequência dos números primos positivos, tem-se que $k = 4$, ou seja, $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \ldots = 0$.

Portanto, pelo teorema fundamental da aritmética (TFA), a forma decomposta do número 180 é:

$$180 = \mathbf{2}^2 \cdot \mathbf{3}^2 \cdot \mathbf{5}^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot 23^0 \cdot \ldots$$

Ou, de forma abreviada: $180 = \mathbf{2}^2 \cdot \mathbf{3}^2 \cdot \mathbf{5}^1$.

Veja outro exemplo com o número 280, que:

- Pode ser dividido por 2, três vezes sucessivas $\Rightarrow \alpha_1 = 3$
- Não pode ser dividido por 3 $\Rightarrow \alpha_2 = 0$
- Pode ser dividido por 5, apenas uma vez $\Rightarrow \alpha_3 = 1$
- Pode ser dividido por 7, apenas uma vez $\Rightarrow \alpha_4 = 1$

Além disso, o número 280 não é divisível por nenhum outro número primo maior ou igual a 11 e, como esse é o 5º termo da sequência dos números primos positivos, tem se que $k = 5$, ou seja, $\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \ldots = 0$.

Portanto, pelo TFA, a forma decomposta do número 280 é:

$280 = \mathbf{2^3} \cdot 3^0 \cdot \mathbf{5^1} \cdot \mathbf{7^1} \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot 23^0 \cdot ...$

Ou, de forma abreviada: $180 = \mathbf{2^3} \quad \mathbf{5^1} \quad \mathbf{7^1}$

Observe um terceiro exemplo com o número 91, que só pode ser dividido pelos números primos 7 e 13, ambos apenas uma vez Então, como esses são, respectivamente, o 4º e o 6º números primos, temos:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0 \qquad \alpha_4 = \alpha_6 = 1$$
$$k = 7 \Rightarrow \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = ... = 0$$

Portanto, pelo TFA, a forma decomposta do número 91 é:

$$91 = 2^0 \quad 3^0 \quad 5^0 \quad \mathbf{7^1} \quad 11^0 \quad \mathbf{13^1} \quad 17^0 \quad 19^0 \quad 23^0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 91 = \mathbf{7^1} \cdot \mathbf{13^1}$$

Como último exemplo, veja o número 17, que é o 7º número primo. Assim:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0 \quad \alpha_7 = 1 \quad k = 8 \Rightarrow \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{10} = = ... = 0$

Portanto, pelo TFA, a forma decomposta do número 17 é:

$17 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot \mathbf{17^1} \cdot 19^0 \cdot 23^0 \cdot \; ...$

Demonstrado em diversos períodos da história, de Euclides a Gauss, esse teorema permite afirmar que:

- Cada número natural positivo está associado a uma única sequência **(α_1, α_2, α_3, ...)**.
- Não há dois números naturais $n \neq m$ que estejam associados à mesma sequência **(α_1, α_2, α_3,)**

Assim, esse teorema estabelece uma correspondência biunívoca entre cada número natural positivo e uma específica série de números naturais:

$$\begin{aligned} 180 &\leftrightarrow (2, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ...) \\ 280 &\leftrightarrow (3, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...) \\ 91 &\leftrightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, ...) \\ 17 &\leftrightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, ...) \end{aligned}$$

O número 1 fica associado a uma sequência nula:

$$1 \leftrightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \;)$$

Recorrendo à notação de produtória ($\prod$), pode-se escrever a expressão do TFA de maneira mais sintética:

$$n = \pm \prod p_i^{\alpha_i}$$

Exercícios resolvidos

29 Para todo número inteiro positivo *n*, indicamos por n! o produto de todos os números inteiros positivos menores ou iguais a *n*. Assim, temos que $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, por exemplo.

Qual é o menor número natural pelo qual devemos dividir 10! a fim de obter um quociente que seja quadrado perfeito?

A 5
B 6
C 7
D 8
E 9

Resolução:

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$

Como o número 1 é o elemento neutro da multiplicação e os números 4, 6, 8, 9 e 10 não são primos, temos:

$10! = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5$

Assim, a decomposição em fatores primos do número 10! é $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Como 2^8, 3^4 e 5^2 são quadrados perfeitos pode-se concluir que 7 é o menor número pelo qual se deve dividir 10! a fim de se obter um quociente que seja quadrado perfeito.

Alternativa: C.

30 A decomposição em fatores primos do produto dos 19 primeiros números naturais positivos é uma expressão do tipo $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^w \cdot ...$, em que os expoentes *x*, *y*, *z* e *w* são todos naturais Nela, o valor de $x + y + z$ é

A 17
B 21
C 27
D 31
E 37

Resolução:

Entre os 19 primeiros números inteiros positivos há 9 números pares, sendo que entre eles há 4 números que são múltiplos de quatro, 2 que são múltiplos de oito e 1 que é múltiplo de 16

Portanto: $x = 9 + 4 + 2 + 1 = 16$.

Também entre os 19 números, há 6 múltiplos de três, sendo que 2 são múltiplos de nove

Portanto: $y = 6 + 2 = 8$.

Finalmente, como há apenas 3 números múltiplos de cinco entre os 19 primeiros inteiros positivos e nenhum deles é múltiplo de vinte e cinco, temos que $z = 3$.

Logo: $x + y + z = 16 + 8 + 3 = 27$

Alternativa: C.

Aplicações da forma decomposta

Sendo *a* e *b* dois números inteiros, do TFA têm-se que:

- $a = p_1^{a1} \times p_2^{a2} \times p_3^{a3} \times ... = \prod p_i^{ai}$
- $b = p_1^{b1} \times p_2^{b2} \times p_3^{b3} \times \quad = \prod p_i^{bi}$

Comparando-se apenas as formas decompostas desses dois números pode-se afirmar, por exemplo, que um número é múltiplo de outro se, e somente se, todos os expoentes da forma decomposta de um deles são menores ou iguais aos respectivos expoentes da forma decomposta do outro número. Assim:

- *a* é múltiplo de *b* $\Leftrightarrow$ $\alpha_i \geq \beta_i$ para todo **i**.
- *a* é divisor de *b* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{0} \leq \alpha_i \leq \beta_i$ para todo **i**

Além disso, há muitas outras vantagens na observação das formas decompostas dos números naturais, como a possibilidade de simplificação de radicais simples, encontro de fatores para racionalização de denominadores, busca da quantidade de divisores, cálculo do mmc e do mdc, entre outras aplicações.

MMC e MDC

É possível obter o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números de acordo com o algoritmo da decomposição em fatores primos.

Veja o exemplo do mmc(280, 180):

280, 180	2
140, 90	2
70, 45	2
35, 45	3
35, 15	3
35, 5	5
7, 7	7
1, 1	$mmc(280, 180) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$

Observe nessa decomposição que:

I Se o fator primo na última coluna não divide algum dos números de sua linha, esse número é repetido na linha posterior

II A decomposição é feita até que a última linha das primeiras colunas seja unitária

III. O **mmc** é dado pelo produto dos números primos postos na última coluna. Cada um deles foi posto para decompor pelo menos um dos números em sua linha.

Seguindo outras regras, também é possível obter o máximo divisor comum de dois ou mais números acordo com o algoritmo da decomposição em fatores primos.

Veja o exemplo do mdc (280, 180):

280,	180	2
140,	90	2
70	45	5
14	9	$mdc(280, 180) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$

Observe nessa decomposição que:

I. Todo fator primo na última coluna divide ambos os números de sua linha, nenhum número é repetido na linha posterior.

II. A decomposição é feita somente enquanto houver número primo que seja divisor de todos os números de sua linha.

III. O **mdc** é dado pelo produto dos números primos postos na última coluna. Cada um deles foi posto para decompor todos os números em sua linha.

Também é possível encontrar o mmc e o mdc de dois ou mais números naturais decompondo-os separadamente e comparando as sequências de expoentes de cada decomposição.

Assim, sendo $a = \prod p_i^{\alpha i}$ e $b = \prod p_i^{\beta i}$ para todo *i* considera-se:

- x_i como o maior valor entre α_i e β_i;
- y_i como o menor valor entre α_i e β_i.

De modo que:

$$\alpha_i > \beta_i \Rightarrow \begin{cases} x_i = \alpha_i \\ y_i = \beta_i \end{cases}$$

$$\alpha_i < \beta_i \Rightarrow \begin{cases} x_i = \beta_i \\ y_i = \alpha_i \end{cases}$$

$$\alpha_i = \beta_i \Rightarrow x_i = y_i = \alpha_i = \beta_i$$

Este procedimento seleciona os maiores expoentes x_i para a série de expoentes do mínimo múltiplo comum entre os números *a* e *b*:

$$mmc(a, b) = \pm p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} \cdot p_4^{x_4} \cdot ...$$

Seleciona também os menores expoentes y_i para a série de expoentes do máximo divisor comum entre os números *a* e *b*:

$$mdc(a, b) = \pm p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot p_3^{y_3} \cdot p_4^{y_4} \cdot ...$$

Veja o método aplicado no cálculo do mmc e do mdc dos números 280 e 180:

$$\begin{matrix} 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \\ 280 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \text{ e } \beta_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ e } y_1 = 2 \\ \alpha_2 = 2 \text{ e } \beta_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ e } y_2 = 0 \\ \alpha_3 = 1 \text{ e } \beta_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 \text{ e } y_3 = 1 \\ \alpha_4 = 0 \text{ e } \beta_4 = 1 \Rightarrow x_4 = 1 \text{ e } y_4 = 0 \end{cases}$$

Observando que para $i \geq 5$ os expoentes α_i e β_i das decomposições são todos iguais a zero, conclui-se que:

- $mmc(180, 280) = 2^{\mathbf{3}} \cdot 3^{\mathbf{2}} \cdot 5^{\mathbf{1}} \cdot 7^{\mathbf{1}} = 2520$
- $mdc(180, 280) = 2^{\mathbf{2}} \cdot 3^{\mathbf{0}} \cdot 5^{\mathbf{1}} \cdot 7^{\mathbf{0}} = 20$

! Atenção

Sendo **a** e **b** dois números inteiros diferentes de zero, é correto afirmar que:

$$|a| \times |b| = mmc(a, b) \times mdc(a, b)$$

Exercícios resolvidos

31 Calcule o **mmc** e o **mdc** dos números 8400 e 1500.

Resolução:

8400	2
4200	2
2100	2
1050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	$8400 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

1500	2
750	2
375	3
125	5
25	5
5	5
1	$1500 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^3$

mmc(8400, 1500) =
$= 2^4 \cdot 3^1 \times 5^3 \cdot 7^1 = 16 \cdot 3 \cdot 125 \cdot 7 = 42000$
mdc(8400, 1500) =
$= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^0 = 4 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 1 = 300$

32 Em uma estação rodoviária partem ônibus para a cidade A de 20 em 20 minutos, para a cidade B de meia em meia hora e para a cidade C de 45 em 45 minutos. Se ao meio dia de hoje partiram ônibus para as três cidades, a que horas isto acontecerá novamente?

Resolução:

As partidas para a cidade A ocorrem após 20 min, 40 min, 60 min, ou seja, em tempos que, em minutos, são múltiplos de 20. As partidas para a cidade B ocorrem após 30 min, 60 min, 90 min, ou seja, em tempos que, em minutos, são múltiplos de 30. As partidas para a cidade C ocorrem após 45 min, 90 min, 135 min, ou seja, em tempos que, em minutos, são múltiplos de 45. O tempo que levará até saírem ônibus para as três cidades será o mmc(20, 30, 45) = 180 min.
Como 180 minutos equivalem a 3 horas, temos que o próximo horário em que os três ônibus partirão simultaneamente será às 3 da tarde ou às 15 horas.

33 Uma remessa de doces deverá ser distribuída igualmente pela prefeitura para as festas de dia da criança das escolas da cidade. Sabendo que na remessa há 11200 balas, 37500 chicletes e 18450 pirulitos e que cada escola receberá o mesmo número de balas, chicletes e pirulitos qual é o maior número possível de escolas da prefeitura que há nessa cidade?

Resolução:

Como o número de escolas deve ser divisor comum dos números 11200, 37500 e 18450 tem-se que o maior número possível de escolas da prefeitura é o mdc de 11200, 37500 e 18450, ou seja:

11200,	37500,	18450	2
5600,	18750,	9225	5
1120,	3750,	1845	5
224,	750,	369	

$\text{mdc}(11200,\ 37500,\ 18450) = 2 \cdot 5^2 = 50$

Portanto, 50 é o maior número possível de escolas da prefeitura nessa cidade.

Quantidade de divisores

O conjunto dos múltiplos de um número inteiro é infinito, por isso não faz sentido determinar a quantidade de múltiplos de um número. Mas o conjunto dos divisores de um número inteiro não nulo é sempre finito, e a quantidade de divisores desse número pode ser facilmente expressa pelo produto dos sucessores dos termos da série de expoentes associada ao número pelo TFA.

Assim, o número de divisores positivos de um inteiro $n \neq 0$ é dado pela expressão:

$$d^+(n) = (1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \cdot (1 + \alpha_3) \cdot \quad = \prod(1 + \alpha_i)$$

E o número de divisores inteiros de um inteiro $n \neq 0$, pela expressão:

$$d(n) = 2 \cdot (1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \cdot (1 + \alpha_3) \cdot \ldots = 2 \cdot \prod(1 + \alpha_i)$$

Veja, por exemplo, como obter a quantidade de divisores do número 600 a partir da sua forma decomposta em fatores primos:

- $600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot \ldots$
- A série de expoentes dessa decomposição é (3, 1, 2, 0, 0, 0, ...).
- A série dos sucessores desses expoentes é (4, 2, 3, 1, 1, 1, ...).
- O produto dos termos dessa última série é 4 2 3 1 $\cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots = 24$.

Assim, pode-se concluir que o número 600 possui 24 divisores positivos ou 48 divisores inteiros.

Uma vez determinada a quantidade de divisores de um número inteiro, o conjunto de todos esses divisores pode ser obtido multiplicando-se combinações desses fatores de todas as maneiras possíveis.

Colocando em ordem crescente o conjunto dos divisores de um número inteiro $n \neq 0$, pode se observar que o produto dos termos equidistantes dos extremos desse conjunto é sempre igual a *n*

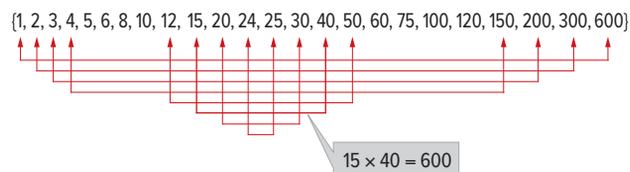



Fig. 5 Conjunto dos divisores positivos de 600.

Com o auxilio dessa propriedade, uma vez encontrada a primeira metade dos divisores positivos de um número inteiro $n \neq 0$, a segunda metade pode ser obtida pelos quocientes de n dividido por cada valor encontrado na primeira metade.

Se *n* for um quadrado perfeito, então a quantidade de divisores positivos de *n* será ímpar, sendo a raiz quadrada de *n* o termo central do conjunto de seus divisores positivos.

! Atenção

O número 1 possui apenas dois divisores inteiros:

$$d(1) = \{\pm 1\}$$

Todos os números primos, e apenas eles possuem exatamente quatro divisores inteiros:

$$d(p) = \{\pm 1, \pm p\}$$

Os quadrados dos números primos possuem apenas seis divisores inteiros:

$$d(p^2) = \{\pm 1, \pm p, \pm p^2\}$$

FRENTE 2

Sistema de numeração decimal

O sistema de numeração decimal é usado corriqueiramente para indicar quantidades. O nome decimal vem do fato de que o sistema é dotado de dez algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Cada algarismo sozinho representa uma quantidade de zero a nove, e os números maiores do que nove, são representados por dois ou mais desses algarismos, de modo que os valores representados por cada algarismo dependem da posição que esses algarismos ocupam nas cifras numéricas

Veja que, por exemplo, o número quinhentos e cinquenta e cinco é escrito com três algarismos iguais, mas cada algarismo 5 representa uma quantidade diferente desse número

Da esquerda para a direita, na cifra **555**, o primeiro algarismo 5 representa **quinhentas** unidades, o segundo algarismo 5, no centro da cifra, representa **cinquenta** unidades, e o terceiro e último algarismo 5 representa apenas **cinco** unidades.

Há uma conexão entre a posição ocupada pelo algarismo e a quantidade de unidades que ele representa. Essa conexão combina os aspectos ordinal e cardinal dos números naturais, e relaciona esses valores por meio das operações de adição, multiplicação e potenciação.

$$n = 555 \Rightarrow \begin{cases} 1^{\underline{o}} \text{ algarismo } 5 = \text{quinhentos} = 500 = 5 \cdot 10^2 \\ 2^{\underline{o}} \text{ algarismo } 5 = \text{cinquenta} = 50 = 5 \cdot 10^1 \\ 3^{\underline{o}} \text{ algarismo } 5 = \text{cinco} = 5 = 5 \cdot 10^0 \end{cases}$$

Toda cifra numérica decimal com dois ou mais algarismos representa uma sentença aritmética formada pelas operações de adição, multiplicação e potenciação, na qual os símbolos (+) e (·) bem como os expoentes das potências são todos omitidos. As normas da leitura do número cifrado já consideram essas operações.

Nessas representações decimais, todo algarismo que não ocupa a posição final de uma cifra numérica deve ser lido como um múltiplo de uma potência de base 10. Veja a nomenclatura das posições dos algarismos de uma cifra numérica decimal:

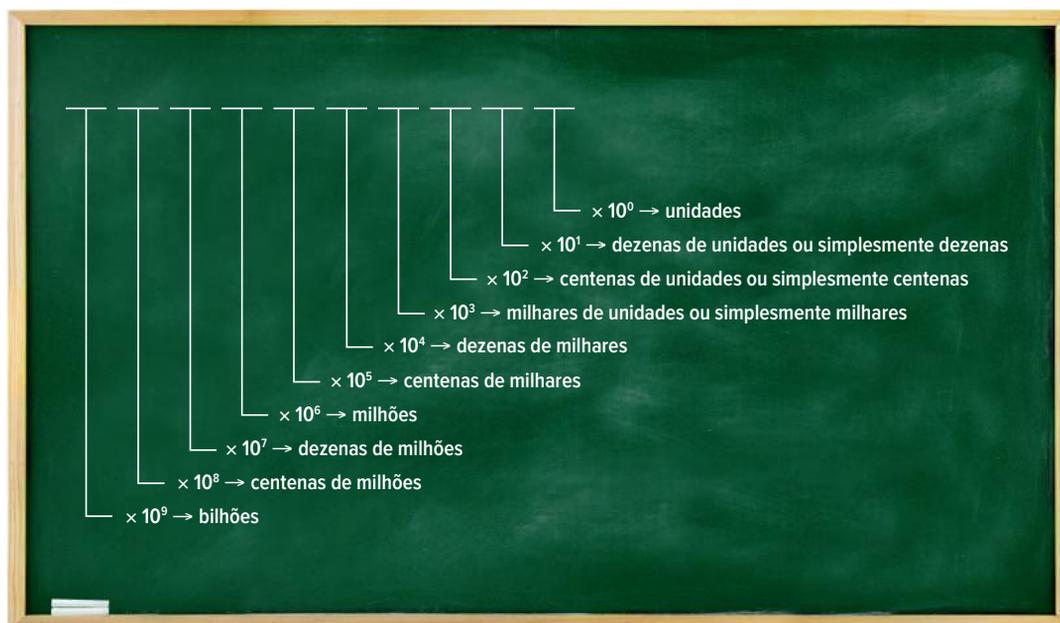



Fig. 6 Sistema decimal.

Cifras numéricas

Toda sequência de algarismos $(a_n\, a_{n\ \ 1}\, a_{n\ \ 2} \dots a_3\, a_2\, a_1\, a_0)_b$ com $a_i \in \{0, 1, 2, 3, \ \ , b \ \ 1\}$ representa o número natural obtido pelas seguintes operações:

$$n = a_n \cdot b^n + a_{n\ \ 1} \cdot b^{n\ \ 1} + \dots + a_3 \cdot b^3 + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0$$

O sistema decimal tem a base b = 10, que pode ser omitida no final da cifra:

$$(2345)_{10} = 2345 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \quad 10^0 = 2000 + 300 + 40 + 5$$

Assim, quando um número como, por exemplo, 2345 é lido em voz alta, ouve-se "dois mil e trezentos e quarenta e cinco", o que indica a adição dos números: 2000, 300, 40 e 5, pois a conjunção "**e**" é aditiva.

No sistema decimal, pode-se usar um recurso mnemônico para cifrar números de até quatro algarismos, que é bastante útil.

As letras **u**, **d**, **c** e **m**, iniciais das palavras **u**nidade, **d**ezena, **c**entena e **m**ilhar são colocadas nos lugares dos respectivos algarismos desconhecidos na cifra de um número.

Exemplos:

$$(du) = 10 \cdot d + u$$
$$(cdu) = 100 \cdot c + 10 \cdot d + u$$
$$(mcdu) = 1000 \cdot m + 100 \cdot c + 10 \cdot d + u$$

Assim, tem-se, por exemplo, que em $n = 2\,345 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ c = 3 \\ d = 4 \\ u = 5 \end{cases}$.

Exercícios resolvidos

34 Dividindo-se um número natural N, de dois algarismos distintos, pelo número *x*, obtemos quociente *y* e resto 1 Invertendo-se a ordem dos algarismos de N, formamos um número que dividido por *y* gera quociente *x* e resto *z*.

Nessas condições, pode-se afirmar que o resto da divisão do número *z* pelo número 9 é igual a:

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

Resolução:

Sendo *a* e *b* os dois algarismos que formam o número N, temos: $\begin{cases} 10a + b = x \cdot y + 1 \\ 10b + a = y \cdot x + z \end{cases}$

Subtraindo-se essas relações obtemos:

$(10a + b)\ \ (10b + a) = (x\ \ y + 1)\ \ (y\ \ x + z) \Leftrightarrow 9a\ \ 9b = = 1\ \ z \Leftrightarrow z = 1 + 9b\ \ 9a \Leftrightarrow z = 9(b\ \ a) + 1$

Logo, dividindo-se o número z por 9 obtemos resto igual a 1

Alternativa: A.

35 Encontre todos os pares (X, Y) tais que X é o algarismo das centenas e Y o algarismo das unidades do número 5X4Y, sabendo que esse número é múltiplo de 19

Resolução:

Como $5X4Y = 5040 + 100X + Y$, com $0 \le X \le 9$ e $0 \le Y \le 9$, efetuando-se a divisão parcial, temos:

$$\begin{array}{r|l} 5040 + 100X + Y & 19 \\ \hline -5035 - \ \ 95X & 265 + 5X \\ \hline 5 + \ \ 5X + Y & \end{array}$$

Então, para que 5X4Y seja múltiplo de 19 é necessário que 5 + 5X + Y também seja múltiplo de 19

Como X e Y variam de 0 a 9, temos que $5 \le 5 + 5X + Y \le 59$.

Portanto, $5 + 5X + Y \in \{19, 38, 57\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5X + Y \in \{14, ,33, 52\}$

As soluções (X, Y) de 5X + Y = 14 são (2, 4) e (1, 9).

As soluções (X, Y) de 5X + Y = 33 são (6, 3) e (5, 8).

A única solução (X, Y) de 5X + Y = 52 é (9, 7).

Os pares que são soluções da questão são: (1, 9), (2, 4), (5, 8), (6, 3) e (9, 7).

Em um sistema de base b = 8, por exemplo, a mesma cifra representa um número bem diferente:

$$(2\,345)_8 = 2 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 =$$
$$= 2 \cdot 512 + 3 \cdot 64 + + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 1 =$$
$$= 1024 + 192 + 32 + 5 = 1253$$

Para representar os naturais, os babilônios usavam um sistema de cifras sexagesimais. Imagine ter que memorizar 59 algarismos diferentes de zero e distintos entre si. Atualmente, além do sistema decimal, o estudo da computação faz uso do sistema hexadecimal, em que a base é b = 16, para a representação de valores em linguagem de máquina.

Com 16 algarismos esse sistema usa as letras A, B, C, D, E e F como respectivos representantes dos números dez, onze, doze, treze, quatorze e quinze.

Assim $\mathbf{(xyz)_{16} = x \cdot 16^2 + y \cdot 16 + z}$ é uma cifra na qual *x*, *y* e *z* são algarismos hexadecimais.

Outro sistema muito utilizado na linguagem de computadores é o sistema binário, em que a base b = 2 determina que existem apenas dois algarismos para se representar todos os números naturais. Esses algarismos são 0 e 1. Assim:

$$\mathbf{(10011101)_2} = \mathbf{1} \cdot 2^7 + \mathbf{0} \cdot 2^6 + \mathbf{0} \cdot 2^5 + \mathbf{1} \cdot 2^4 +$$
$$+ \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 =$$
$$= 128 + 0 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 157$$

Algarismo das unidades

Na sua forma decimal, o algarismo das unidades de cada inteiro informa diretamente se o número pertence ao ideal $10\mathbb{Z}$ ou a qual dos seus conjuntos laterais.

O número 280, por exemplo, pertence ao ideal $10\mathbb{Z}$ pois termina por zero Já o número 2345, por exemplo, pertence ao conjunto lateral de $10\mathbb{Z}$, cujos números são da forma 10   k + 5, com *k* inteiro, pois termina por 5.

Então, sendo *u* o algarismo das unidades de um núme ro inteiro *n* qualquer, tem-se que:

$$n \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 10 \cdot k + u,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Duas propriedades importantes podem ser enunciadas para o algarismo das unidades da soma e do produto de números naturais:

I. A unidade da soma depende apenas da soma das unidades das parcelas.

$$n_1 + n_2 = (10 \cdot k_1 + u_1) + (10 \cdot k_2 + u_2) = 10 \cdot (k_1 + k_2) + (u_1 + u_2)$$

II A unidade do produto depende apenas do produto das unidades dos fatores

$$n_1 \cdot n_2 = (10 \cdot k_1 + u_1) \cdot (10 \cdot k_2 + u_2) =$$
$$= 100 \cdot (k_1 \cdot k_2) + 10 \cdot (k_1 \cdot u_2 + k_2 \cdot u_1) + (u_1 \cdot u_2)$$

Revisando

1 Obter a forma irredutível dos seguintes números racionais:

a) 1,7

b) 0,32

c) 75%

d) 8,6666...

e) $0,\overline{54}$

f) $\dfrac{364}{56}$

g) $\dfrac{0,04}{1,2}$

h) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{18}}$

i) $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{153}}$

j) $\dfrac{\pi - 2}{2 \quad \pi}$

2 O número irracional π é uma das mais importantes constantes matemáticas conhecidas. Seu valor é estipulado pelo quociente entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

Hoje é sabido que o valor exato desse número não pode ser escrito na forma decimal, pois suas infinitas casas deci mais não apresentam nenhum padrão de repetição. O que podemos fazer é aproximá lo da melhor forma possível de acordo com a necessidade. Uma aproximação desse número com cinco casas decimais é 3,14159.

Os primeiros vestígios das estimativas do valor de π encontram-se no Papiro de Rhind escrito em torno de 1700 a.C. no antigo Egito. Os gregos usavam algumas frações para aproximar o valor de π e particularmente Arquimedes tinha preferência pela fração $\frac{22}{7}$. Os chineses também tinham verdadeira fascinação pelo número π e, em uma obra de Tsu Chúng-Chisch (430 501), o autor descreve o valor “arquimediano” $\frac{22}{7}$ para o número π como “inexato”.

Obtenha a forma periódica do número racional $\frac{22}{7}$ e responda às seguintes perguntas:

a) De quantos algarismos é composto o período da dízima?

b) Qual é o valor do 2014º algarismo após a vírgula dessa dízima?

c) Considerando-se apenas o número formado pelos quatro primeiros algarismos desse número, qual é a diferença aproximada entre o número irracional π e a razão $\frac{22}{7}$?

d) Qual é o valor aproximado do comprimento de uma circunferência com 280 metros de diâmetro, que se obtém adotando se o valor “arquimediano” inexato do número π?

3 Um professor do Ensino Fundamental propôs aos seus alunos a seguinte atividade: cada aluno deveria escolher um número x pertencente a um determinado intervalo de números reais determinado pelos números 1, 0 e 1, depois calcular suas cinco primeiras potências, e escrever os resultados obtidos em ordem crescente.
Os intervalos dados foram:

$A =]+1, +\infty[$ $\quad$ $C =]-\infty, \ 1[$ $\quad$ $B =]0, +1[$ $\quad$ $D =]-1, 0[$

André escolheu um número x pertencente ao intervalo A, fez os cálculos, comparou seus resultados e respondeu corretamente que: $x^1 < x^2 < x^3 < x^4 < x^5$.
Se Bruno escolheu um número do intervalo B, Claudia um número do intervalo C e Denise um número do intervalo D, e todos fizeram corretamente seus cálculos e comparações, então, sendo x o número escolhido em cada caso, quais foram, em função de x, as respostas de:

a) Bruno
b) Cláudia
c) Denise

4 Efetue as operações aritméticas indicadas nos seguintes itens, sem usar aproximações:

a) $2 + 3 \cdot 4^5$
b) $2^6 \cdot 5^6$
c) $25^{-1} + 25^0 + 25^{\frac{1}{2}} + 25^{-\frac{1}{2}}$
d) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$
e) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{18}$
f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$
g) $\sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$

5 **Fuvest (Adapt.)** Qual é o menor número natural positivo que multiplicado por 3888 resulta num

a) múltiplo de 7?
b) múltiplo de 10?
c) quadrado perfeito?
d) cubo perfeito?

6 Considere os números 4200 e 1500 e faça o que se pede em cada item:

a) Decomponha esses números em fatores primos.
b) Determine quantos são os divisores inteiros de cada um.
c) Calcule o mmc(8400, 1500).
d) Calcule o mdc(8400, 1500).

7 O manual de um veículo automotivo recomenda que o proprietário faça, numa concessionária autorizada, as revisões mecânica, elétrica e hidráulica, respectivamente, a cada 10000, 8000 e 12000 quilômetros rodados.
Se o proprietário seguir estas recomendações, após quantos quilômetros rodados ele deverá levar pela primeira vez à concessionária para fazer, no mesmo dia:

a) as revisões elétrica e mecânica?
b) as revisões elétrica e hidráulica?
c) as revisões mecânica e hidráulica?
d) as três revisões?

8 Uma remessa de doces deverá ser distribuída igualmente pela prefeitura para as festas de dia da criança das escolas da cidade. Sabendo que na remessa há 11 200 balas, 37 500 chicletes e 18 450 pirulitos e que cada escola receberá o mesmo número de balas, chicletes e pirulitos, determine:

a) Qual é o maior número possível de escolas da prefeitura que há nessa cidade?
b) Quantas balas cada escola irá receber?
c) Quantos chicletes cada escola irá receber?
d) Quantos pirulitos cada escola irá receber?

9 Determine o menor inteiro positivo que deixa o mesmo resto 7 quando dividido por 12 e por 15.

10 **Vunesp 2012** O número de quatro algarismos 77XY, onde X é o dígito das dezenas e Y o das unidades, é divisível por 91 Determine os valores dos dígitos X e Y

Exercícios propostos

1 Num dado momento em uma repartição pública, você é o 17º de uma fila de 20 pessoas e precisa sair dela para ir ao banheiro, sabendo que não é permitido guardar lugar na fila.
A eficiência dessa repartição é muito boa, seus funcionários são capazes de atender 3 pessoas a cada dez minutos, mas nesse horário entram na fila 4 pessoas a cada cinco minutos. Se nenhuma pessoa furar a fila, ninguém sair dela e você voltar para ela exatamente vinte minutos após ter saído, sua posição na fila será a

A 31ª
B 30ª
C 29ª
D 28ª
E 27ª

2 **Unicamp 2018** Considere três números inteiros cuja soma é um número ímpar Entre esses três números, a quantidade de números ímpares é igual a

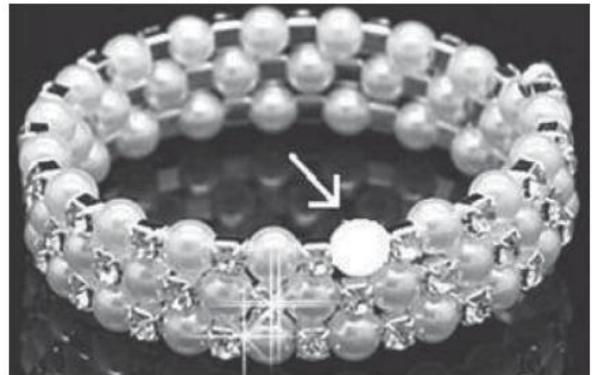
A 0 ou 1.
B 1 ou 2.
C 2 ou 3.
D 1 ou 3

3 **Fuvest** Sabendo que os anos bissextos são os múltiplos de 4 e que o primeiro dia de 2007 foi segunda feira, o próximo ano a começar também em uma segunda feira será

A 2012
B 2014
C 2016
D 2018
E 2020

4 **Unifesp** Dia 20 de julho de 2008 caiu num domingo. Três mil dias após essa data, cairá

A numa quinta-feira.
B numa sexta feira
C num sábado
D num domingo.
E numa segunda-feira.

5 **Enem 2017** Uma pessoa ganhou uma pulseira formada por pérolas esféricas, na qual faltava uma das pérolas. A figura indica a posição em que estaria faltando esta pérola.

Ela levou a joia a um joalheiro que verificou que a medida do diâmetro dessa pérola era 4 milímetros. Em seu estoque, as pérolas do mesmo tipo e formato, disponíveis para reposição, tinham diâmetros iguais a: 4,025 mm; 4,100 mm; 3,970 mm; 4,080 mm e 3,099 mm
O joalheiro então colocou na pulseira a pérola cujo diâmetro era o mais próximo do diâmetro das pérolas originais.
A pérola colocada na pulseira pelo joalheiro tem diâmetro, em milímetro, igual a

A 3,099
B 3,970
C 4,025
D 4,080
E 4,100

6 Uma balança digital que mede massas em gramas tem precisão de apenas duas casas decimais, de modo que, se uma massa de 6,543 g, por exemplo, for colocada na balança, essa balança indicará apenas 6,54 g, pois não há em seu visor espaço para uma terceira casa decimal

0 6 , 5 4 g

A balança mede desde 0,01 g até 99,99 g, mas não efetua aproximações considerando os valores de uma possível terceira casa decimal da massa medida, nesse caso, a balança simplesmente elimina os algarismos de todas as casas decimais que viriam após a segunda casa.

Considere que as frações nas alternativas a seguir representem as massas, em gramas, de cinco pequenos objetos e assinale aquele que terá a pior aproximação feita por essa balança.

A $\frac{1}{5}$
B $\frac{1}{6}$
C $\frac{1}{7}$
D $\frac{1}{8}$
E $\frac{1}{9}$

7 **PUC-Minas** Ordenando-se os números racionais $p = \frac{13}{24}$, $q = \frac{2}{3}$ e $r = \frac{5}{8}$, obtém-se:

A $p < r < q$
B $r < q < p$
C $r < p < q$
D $q < p < r$

8 O sistema de numeração de uma marca de chaves de boca de aço inoxidável indica a abertura da "boca" usando como unidade de referência a fração de um dezesseis avos da polegada. Assim, se o numeral impresso na chave for 13, por exemplo, então a abertura da boca da chave é de $\frac{13}{16}$ de uma polegada.

Eugene Shapovalov/Shutterstock.com

Um mecânico possui um conjunto de chaves de boca dessa marca cujos números são: 13, 18, 20, 24, 27 e 30. Ele precisa apertar uma porca cuja bitola é de 1,25 polegada. Se a abertura da boca da chave deve, preferencialmente, coincidir com a bitola da porca que será apertada, o mecânico deverá escolher a chave de número:

A 18
B 20
C 24
D 27
E 30

9 Tanto o diâmetro interno de uma porca, quanto o diâmetro externo dos parafusos são chamados de bitola e costumam ser apresentados como frações de polegadas. A tabela apresenta os valores das bitolas de algumas porcas e parafusos produzidos por uma determinada empresa.

Código	Bitola pol.
2 TX-S	1/8
3 TX-S	3/16
4 TX-S	1/4
5 TX-S	5/16
6 TX-S	3/8
8 TX-S	1/2
10 TX-S	5/8
12 TX-S	3/4
14 TX-S	7/8
16 TX-S	1
20 TX-S	1 1/4
24 TX-S	1 1/2
32 TX-S	2

Sabendo que uma polegada equivale a 2,54 centímetros, pode-se estimar a diferença entre os diâmetros internos das porcas de códigos 20 TX-S e 5 TX-S, que são produzidas por essa empresa, em, aproximadamente,

A 24 mm.
B 30 mm.
C 35 mm.
D 42 mm.
E 54 mm.

10 Qual o resultado que se obtém efetuando-se as operações aritméticas com as dízimas periódicas indicadas na expressão a seguir?

$$\frac{0,\overline{75} + 0,\overline{57}}{0,\overline{7} - 0,\overline{5}}$$

A 4,8
B 5,4
C 6
D 6,6
E 8

11 Qual é o resultado da adição das dízimas periódicas a seguir?

$$\begin{array}{r} 0,54545454 \\ 0,56565656... + \\ \hline ??? \end{array}$$

A 0,10101010.
B 0,11111111
C 1,00000000.
D 1,01010101
E 1,11111111

12 **Fuvest** Na figura adiante estão representados geometricamente os números reais 0, x, y e 1 Qual a posição do número x y?

A À esquerda de 0.
B Entre 0 e x.
C Entre x e y.
D Entre y e 1.
E À direita de 1.

13 **UFBA** Sobre os números reais, assinale as proposições verdadeiras e some os números associados a elas.

01 O produto entre dois números racionais quaisquer é um número racional.
02 O produto de um número inteiro não nulo qualquer por um número irracional qualquer é um número irracional.
04 O quadrado de qualquer número irracional é um número racional.
08 Se o quadrado de um número natural é par, então esse número também é par.
16 Todo múltiplo de 17 é um número ímpar ou múltiplo de 34.
32 A soma de dois números primos quaisquer é um número primo.

Soma:

14 No estudo do conjunto dos números reais, verificamos que os subconjuntos numéricos mais importantes são: naturais, inteiros, racionais e irracionais. A respeito das operações entre os elementos desses subconjuntos, assinale o que for correto:

- [ ] A soma de dois números irracionais é sempre irracional.
- [ ] Uma potência em que a base é um número inteiro e o expoente é um número racional, resulta, necessariamente, em um número real.
- [ ] O quociente entre dois números reais é, necessariamente, um número real.
- [ ] A soma de um número racional com um número irracional é, necessariamente, um número irracional.
- [ ] Uma potência em que a base é um número real positivo e o expoente é um número natural pode resultar em um número negativo.

15 No estudo da Termodinâmica, a dilatação pode ser analisada sob o aspecto linear, superficial ou volumétrico. Nas expressões algébricas que modelam esse fenômeno constam os termos α, β e γ, respectivamente. Denominados coeficientes de dilatação, os valores desses termos algébricos variam de acordo com o material que se está analisando a dilatação, mas em todos os casos os valores desses coeficientes são tais que:

$\alpha^2 = \beta$ | $\alpha^3 = \gamma$ | $\beta^3 = \gamma^2$

De acordo com essas relações, se para um determinado material o coeficiente de dilatação volumétrico é $\gamma = 0{,}000008$, o coeficiente de dilatação superficial β será igual a:

A 0,0004
B 0,0002
C 0,04
D 0,02
E 0,2

16 Entre as propriedades aritméticas relativas à noção das operações de potenciação, radiciação e adição, o fato de a radiciação não ser distributiva em relação à adição é essencial para que não sejam cometidos erros de cálculo. Nesse contexto, qual das sentenças fechadas a seguir é a correta?

A $\sqrt{1^2+2^2} = 1+2$

B $\sqrt[3]{1^2+2^2} = 1+2$

C $\sqrt[3]{1^3+2^3} = 1+2$

D $\sqrt{1^3+2^3} = 1+2$

E $\sqrt{1+2} = 1+2$

17 Simplificando a expressão aritmética $\sqrt[4]{\dfrac{4^8-8^4}{48}}$, é possível escrevê-la na forma $p \cdot \sqrt[4]{q}$, com *p* e *q* inteiros positivos Nessas condições, o menor valor possível da soma p + q é igual a

A 6
B 9.
C 15.
D 32
E 65

18 O número expresso pelo radical duplo $\sqrt[5]{25\sqrt{5}}$ tam bém pode ser escrito como

A $\sqrt{5}$
B $\sqrt[3]{5}$
C $\sqrt[3]{25}$
D $\sqrt[4]{5}$
E $\sqrt[4]{125}$

19 **UEL 2011** Assinale a alternativa que indica correta mente entre quais números inteiros está o valor da expressão a seguir

$$30\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-1} \quad 0{,}4\right]\left(\frac{1{,}2-2^{-1}}{5 \quad 3{,}7}\right) \quad \sqrt{13}$$

A 1 e 2
B 3 e 4
C 5 e 6
D 7 e 8
E 9 e 11

20 Se $x \in \left\{1, \ \frac{1}{2}, \ 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1\right\}$ e $y = 25^x$, então, a soma dos possíveis valores de *y* é:

A 0,3124
B 3,124
C 31,24
D 312,4
E 3124

21 **PUC-Minas** A expressão $\dfrac{0{,}3 \quad \frac{1}{4}}{\sqrt[3]{\quad 1}} + 0{,}036 : 0{,}04$ é igual a:

A 0,45
B 0,65
C 0,74
D 0,85

22 O número irracional representado pela expressão aritmética $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ também pode ser representado por:

A $\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}}{3}$

B $\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{3}$

C $\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}}{3}$

D $\dfrac{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}{3}$

E $\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{18}}{3}$

23 Efetuando $4^{3 \quad 2^{-1}}$ obtém-se:

A 4096

B 262144

C $\dfrac{1}{8}$

D $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

E $\sqrt[3]{4}^{\sqrt{3}}$

24 **Fuvest** Se $4^{16} \times 5^{25} = \alpha \times 10^n$, com $1 < \alpha < 10$ e n natural, então n é igual a:

A 24
B 25
C 26
D 27
E 28

25 **PUC (Adapt.)** Determine os números naturais **a**, **b** e **c** tais que $c^a = b^{2a}$, $3^c = 3 \cdot 9^a$ e $a + b + c = 16$

26 **Insper 2012** O menor número inteiro e positivo que deve ser multiplicado por 2012 para que o resultado obtido seja um cubo perfeito é

A 8048.
B 253009.
C 506018
D 1012036.
E 4048144.

27 Dois trapezistas balançam em seus trapézios com períodos diferentes, um deles irá saltar e será aparado pelo outro. O período do balanço do trapezista saltador é de 12 décimos de segundo, ao passo que o período do balanço do trapezista aparador é de 16 décimos de segundo.

Um trapezista só pode saltar e ser aparado pelo outro com segurança quando os trapézios estão nos pontos de máxima aproximação Esse é considerado o momento ideal para o salto

Em um determinado instante, os trapezistas estavam na posição ideal para o salto, mas o saltador ficou inseguro e resolveu esperar pelo próximo momento ideal. Esse momento ocorrerá depois de

A 10,8 segundos.
B 9,6 segundos
C 4,8 segundos.
D 3,6 segundos.
E 2,4 segundos.

28 O ano de 2014 será marcado pela passagem de três dos principais cometas conhecidos Veja a tabela a seguir:

Nome	Ano da descoberta	Próxima passagem	Período aproximado
Halley	240 a.C.	2061	76 anos
Encke	1786	2010	3 anos
Pons-Winnecke	1819	2015	6 anos
Tuttle	1790	2021	13 anos
Tempel-Swift-LINEAR	1869	2014	6 anos
Pons-Brooks	1812	2024	71 anos
Olbers	1815	2024	70 anos
Lobo	1884	2017	9 anos
Brooks 2	1889	2014	6 anos
Holmes	1892	2014	7 anos

De acordo com os dados contidos nessa tabela é correto afirmar que a última vez que esses três cometas passaram próximos ao nosso planeta no mesmo ano aconteceu em:

A 2008
B 1972
C 1954
D 1898
E 1814

29 **Enem 2015** O gerente de um cinema fornece anual mente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

1 cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
2 todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
3 não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é

A 2
B 4
C 9
D 40.
E 80.

Texto para as próximas duas questões

Em 1968, Stanley Kubrick produziu e dirigiu o filme *2001: Uma odisseia no espaço*, baseado no livro escrito por Arthur C. Clarke em 1961. A trama da ficção tem início com a descoberta de gigantescos monólitos pretos cercados por superfícies planas e retangula res. Na obra, todos os monólitos encontrados tinham dimensões proporcionais a 1, 4 e 9.

Bruce Rolff/Shutterstock.com

30 Na obra literária, essa específica proporção numérica indicava a possibilidade de que os monólitos fossem produtos de uma inteligência alienígena, pois esses números são os três primeiros:

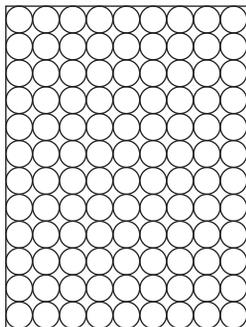
A números primos positivos.
B números ímpares positivos.
C números racionais positivos.
D quadrados perfeitos positivos.
E cubos perfeitos positivos.

31 Para comemorar os 50 anos do livro de Clarke, foram confeccionadas miniaturas do monólito com dimensões de 1 cm × 4 cm × 9 cm, para serem distribuídas com forma de *marketing* da obra. As miniaturas foram distribuídas em pacotes cúbicos e, dentro de cada pacote, essas miniaturas encostavam-se, umas nas outras, sempre de modo que as faces em contato fossem congruentes entre si. Além disso, as miniaturas não deixavam espaço vazio algum no interior dos pacotes.
Então, se os pacotes com as miniaturas eram do menor tamanho possível, pode-se concluir que o espaço no interior de cada pacote era equivalente ao de um cubo de

A 9 cm de aresta.
B 18 cm de aresta.
C 24 cm de aresta.
D 36 cm de aresta.
E 64 cm de aresta.

32 Um arquiteto está reformando uma casa De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m.
Atendendo ao pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

A 105 peças.
B 120 peças.
C 210 peças.
D 243 peças.
E 420 peças.

33 Carla deseja reformar a entrada de sua casa e, para isso, foi a uma serralheria encomendar um portão de ferro retangular de 90 cm × 120 cm. Assim que chegou ao local, viu um portão com as dimensões desejadas e que tinha uma grade formada por circunferências, como mostra a figura a seguir:

Carla gostou do padrão, mas preferia que as circunferências fossem maiores. Dessa forma, encomendou um portão, nas dimensões desejadas e nesse padrão, mas quis que as circunferências tangentes tivessem o maior raio possível. Dessa forma, para que nenhuma circunferência fique incompleta no interior do portão, a medida de seu raio deve ser de

A 10 cm.
B 12 cm.
C 15 cm.
D 20 cm.
E 30 cm.

34 Uma barra de doce de leite com o formato de um paralelepípedo, cujas dimensões, em centímetros, são de 15 × 30 × 9, será cortada em pequenos pedaços cúbicos de mesmo tamanho que serão embalados para venda. Se a aresta desses pequenos cubos for a maior possível e não houver desperdício, então, o número de pedaços cúbicos que podem ser cortados da barra original será igual a

A 300
B 150.
C 60.
D 30.
E 15

35 Em uma corporação, para o uso da rede de computadores devem ser selecionadas senhas de 4 algarismos de acordo com os seguintes critérios:

I. Facilidade de memorização
Nesse critério vários fatores são levados em con sideração, entre eles a quantidade de algarismos repetidos conta positivamente para a adequação da senha, por exemplo.

II. Maior divisor primo.
Nesse critério não se leva em consideração os valores dos demais divisores do numeral formado pela senha. Assim, entre duas ou mais senhas, a mais adequada é aquela que é divisível pelo maior número primo que possuir.

III. Quantidade de divisores
Nesse critério quanto menor for a quantidade de divi sores do numeral formado pela senha, mais adequada será a senha

Um membro dessa corporação deve escolher en tre as senhas 4740 e 7470 para entrar na rede de computadores. De acordo com os critérios listados e exemplificados, a senha mais adequada para essa pessoa escolher é

A 4740 pelo critério **I**.
B 4740 pelo critério **II**.
C 4740 pelo critério **III**.
D 7470 pelo critério **I**.
E 7470 pelo critério **II**.

36 **Fuvest 2017** Sejam **a** e **b** dois números inteiros posi tivos. Diz se que **a** e **b** são equivalentes se a soma dos divisores positivos de **a** coincide com a soma dos divisores positivos de **b**.
Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

A 8 e 9.
B 9 e 11.
C 10 e 12.
D 15 e 20.
E 16 e 25.

37 Um brinquedo direcionado para a alfabetização infan til é composto por 36 pequenos cubos de madeira de mesmo tamanho com letras pintadas em suas faces Todas as peças desse brinquedo devem ser embala das em uma caixa de base quadrada, de modo que cada dimensão interna da caixa seja, no mínimo, igual ao dobro das dimensões dos cubos de madeira.
Nessas condições, quantas opções há para as dimensões da caixa?

A 5
B 4
C 3
D 2
E 1

38 **Fuvest** O produto de dois números inteiros positivos, que não são primos entre si, é igual a 825. Então o máximo divisor comum desses números é

A 1 C 5 E 15
B 3 D 11

39 **Unifesp** Imagine uma fila de 50 portas fechadas e outra de 50 estudantes, portas e estudantes numerados conforme a posição em sua fila Do primeiro ao quinquagésimo e em ordem crescente, o estudante que ocupa a n-ésima posição na fila deverá fechar ou abrir as portas de números n, 2n, 3n, (ou seja, múltiplos de n) conforme estejam abertas ou fechadas, respectivamente, não tocando nas demais Assim, como todas as portas estão inicialmente fechadas, o primeiro estudante tocará em todas, abrindo as. O segundo estudante tocará apenas nas portas de números 2, 4, 6, , fechando as, pois vai encontrá- las abertas. O terceiro estudante tocará apenas nas portas de números 3 (fechando a), 6 (abrindo-a), 9 (fechando-a) e assim por diante Se A significa “aber ta” e F “fechada”, após o quinquagésimo estudante ter realizado sua tarefa, as portas de números 4, 17 e 39 ficarão, respectivamente,

A F, A e A D A, F e A
B F, A e F E A, F e F
C F, F e A

40 **Enem 2014** Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos Um número *N* é dado pela expressão $2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$, na qual x, y e z são números inteiros não negativos Sabe-se que *N* é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7
O número de divisores de *N*, diferentes de *N*, é

A $x \cdot y \cdot z$
B $(x + 1) \cdot (y + 1)$
C $x \cdot y \cdot z \quad 1$
D $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot z$
E $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (z + 1) \quad 1$

41 **UEPG 2011** Considerando os números naturais *p* e *q*, diferentes de zero, sobre o máximo divisor comum (mdc) e o mínimo múltiplo comum (mmc), assinale o que for correto.

01 mdc(p, 1) = p, se $p \neq 1$.
02 Se mmc(p,q) = $p \cdot q$ então p e q são números primos.
04 Se p é múltiplo de q então mmc(p, q) = p.
08 Se p é divisor de q então mdc(p, q) = p.
16 mmc(p, 2p) = $2p^2$.

Soma:

42 **Unifesp** O 2007º dígito da sequência periódica 123454321234543... é

A 1. C 3. E 5.
B 2. D 4.

43 Em uma reunião da coordenação do Sistema de Ensino Poliedro, foi sugerido que os cadernos com as resoluções das provas dos vestibulares tivessem suas páginas marcadas com a sucessão das letras das palavras *sistema* e *poliedro*, separadas por um espaço com o tamanho de uma letra, de acordo com o seguinte padrão:

```
S I S T E M A   P O L I E D R O   S I S T E M A
I S T E M A   P O L I E D R O   S I S T E M A
S T E M A   P O L I E D R O   S I S T E M A   P
T E M A   P O L I E D R O   S I S T E M A   P O
E M A   P O L I E D R O   S I S T E M A   P O L
M A   P O L I E D R O   S I S T E M A   P O L I
A   P O L I E D R O   S I S T E M A   P O L I E
  P O L I E D R O   S I S T E M A   P O L I E D
P O L I E D R O   S I S T E M A   P O L I E D R
O L I E D R O   S I S T E M A   P O L I E D R O
L I E D R O   S I S T E M A   P O L I E D R O
I E D R O   S I S T E M A   P O L I E D R O
E D R O   S I S T E M A   P O L I E D R O
```

Sabendo que todas as páginas desses cadernos teriam 55 linhas marcadas com o padrão ilustrado, pode-se concluir que a última linha de cada página começaria com

A a letra I.
B a letra T.
C a letra A.
D a letra D.
E um espaço.

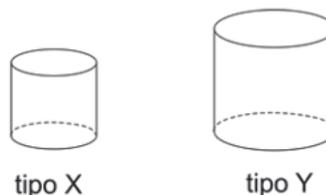
44 Uma atividade aritmética foi proposta pela professora de matemática de uma turma com 35 alunos. A professora diz um número ao primeiro aluno da lista de chamada e esse aluno deve somar os algarismos do número que lhe foi dito. Depois deve elevar ao quadrado a soma obtida e dizer o resultado ao próximo aluno da lista. Se um aluno ouvir um número com apenas um algarismo, então deve apenas elevá-lo ao quadrado e dizer o resultado para o próximo aluno. O último aluno da sala deverá dizer seu resultado para a professora.
Se todos os alunos da sala participaram da atividade, ninguém errou seus cálculos e a professora disse o número 11 para o primeiro aluno então, qual foi o número dito à professora no final da atividade?

45 **Unifesp** Um inteiro *n*, quando dividido por 7, deixa resto 5. Qual será o resto na divisão de $n \cdot (n + 1)$ por 7?

A 5 C 3 E 1
B 4 D 2

46 **Fuvest (Adapt.)** Uma empresa de construção dispõe de 117 blocos de tipo X e 145 blocos de tipo Y Esses blocos têm as seguintes características: todos são ci lindros retos, o bloco X tem 120 cm de altura e o bloco Y tem 150 cm de altura

tipo X

tipo Y

A empresa foi contratada para edificar colunas, sob as seguintes condições: cada coluna deve ser construída sobrepondo blocos de um mesmo tipo, elas devem ter a mesma altura, e deve haver pelo menos uma coluna com blocos do tipo X. Com o material disponível, o número máximo de colunas que podem ser construídas é

A 55
B 56
C 57
D 58
E 59

47 Bruna estudava métodos de criptografia e a aplicação dos números primos no processo de criação de senhas. Um dia resolveu mudar a senha de 4 algarismos do seu cartão de banco aplicando os mecanismos que estudava.
Assim, diante de uma tabela com todos os números primos de dois algarismos como a reproduzida a seguir, Bruna decidiu que sua senha satisfaria três condições:

1. A senha seria igual ao produto entre 2 números da tabela.
2. Os números primos escolhidos teriam apenas 2 unidades de diferença.
3. A senha teria apenas algarismos ímpares.

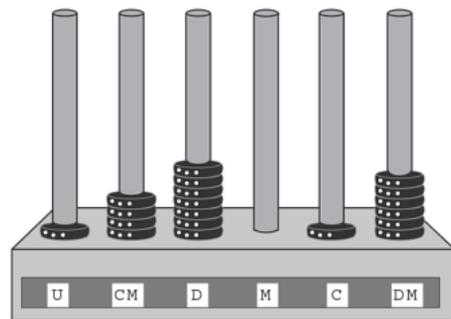
De 10 a 20	11 – 13 – 17 –19
De 20 a 30	23 – 29
De 30 a 40	31 – 37
De 40 a 50	41 – 43 – 47
De 50 a 60	53 – 59
De 60 a 70	61 – 67
De 70 a 80	71 73 79
De 80 a 90	83 – 89
De 90 a 100	97

Com essas condições, pode-se concluir que para a senha de Bruna

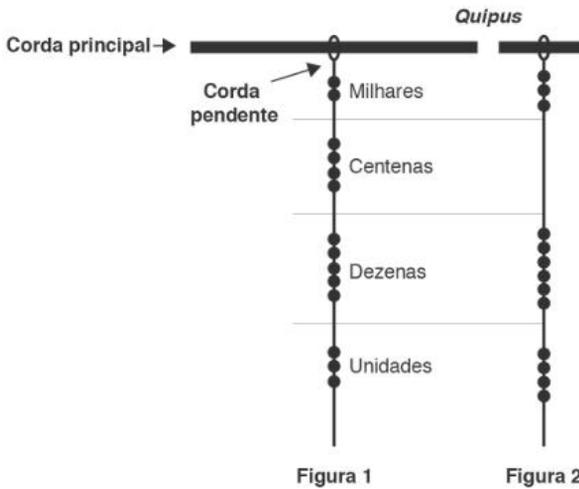
A há duas possibilidades nas quais os 4 algarismos são diferentes um do outro
B há apenas duas possibilidades nas quais os 4 algarismos são diferentes um do outro.
C há uma possibilidade em que 4 algarismos são diferentes um do outro.
D há apenas uma possibilidade em que os 4 algarismos são diferentes um do outro
E há apenas uma opção em que 2 dos algarismos são iguais.

48 **Enem 2012** João decidiu contratar os serviços de uma empresa por telefone através do SAC (Serviço de Atendimento ao Consumidor) O atendente ditou para João o número de protocolo de atendimento da ligação e pediu que ele anotasse Entretanto, João não entendeu um dos algarismos ditados pelo atendente e anotou o número 1 3 _ 9 8 2 0 7, sendo que o espaço vazio é o do algarismo que João não entendeu.
De acordo com essas informações, a posição ocupada pelo algarismo que falta no número de protocolo é a de

A centena.
B dezena de milhar.
C centena de milhar.
D milhão.
E centena de milhão.

49 **Enem 2016** O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base dez para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles é formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para a esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda.
Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.

Nessa disposição, o número que está representado na figura é:

A 46171
B 147016
C 171064
D 460171
E 610741

50 **Enem 2014** Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado *quipus* O *quipus* era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes) De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades dezenas, centenas e milhares Na figura 1, o *quipus* representa o número decimal 2453. Para representar o "zero" em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.

Disponível em: www.culturaperuana.com.br. Acesse em: 13 dez. 2012.

O número da representação do *quipus* da Figura 2, em base decimal, é

A 364.
B 463
C 3064.
D 3640.
E 4603

51 **Enem 2011** O medidor de energia elétrica de uma residência, conhecido por "relógio de luz", é constituído de quatro pequenos relógios, cujos sentidos de rotação estão indicados conforme a figura.

Disponível em: http://www.enersul.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010.

A medida é expressa em kWh. O número obtido na leitura é composto por 4 algarismos. Cada posição do número é formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro.
O número obtido pela leitura em kWh, na imagem, é

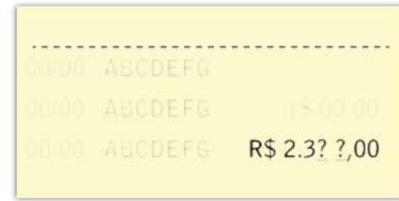
A 2 614.
B 3624.
C 2715.
D 3725.
E 4162.

52 Astrônomos registraram a primeira imagem da história de um buraco negro, que está localizado em uma galáxia distante da Terra.
O buraco negro tem 40 bilhões de quilômetros de diâmetro – cerca de 3 milhões de vezes o tamanho do nosso planeta – e é descrito pelos cientistas como um "monstro".
Essa região está a impressionantes 500 quintilhões de quilômetros de distância da Terra e foi registrada por uma rede de oito telescópios ao redor do mundo.

Fonte: www.bbc.com/portugese/geral-47883432

De acordo com a notícia, o quociente entre o comprimento do raio do buraco negro encontrado e a distância do nosso planeta à região onde o buraco está localizado deve valer:

A $4 \cdot 10^{16}$
B $4 \cdot 10^{15}$
C $4 \cdot 10^{14}$
D $8 \cdot 10^{14}$
E $8 \cdot 10^{16}$

53 Marcos retirou seu extrato bancário, mas ele estava tão borrado que não se viam dois dígitos.

Mesmo assim, era possível perceber que os dígitos borrados eram diferentes um do outro e nenhum deles tinha "bolinhas" como 0, 6, 8 e 9. Marcos sabia que seu saldo era múltiplo de nove então, raciocinando corretamente ele pode concluir que:

A os algarismos borrados eram 1 e 3.
B o segundo algarismo borrado era 5.
C o primeiro algarismo borrado era 7.
D pelo menos um dos algarismos borrados era 4.
E os dois algarismos borrados eram pares.

54 Não é difícil confundir dois números grandes formados pelos mesmos algarismos, mas em ordens diferentes Principalmente quando começam pelo mesmo alga rismo como 263 e 236.
Imagine um caminhoneiro que viajando por uma rodovia federal deva acessar a saída do quilômetro (XYZ), mas por distração acessa outra saída no quilômetro (XZY) da mesma rodovia
Nessa situação, a maior distância possível entre a saí da correta e a saída incorreta seria de:

A 9 km
B 36 km
C 55 km
D 74 km
E 81 km

55 **Unicamp 2019** A representação decimal de certo nú mero inteiro positivo tem dois algarismos. Se o triplo da soma desses algarismos é igual ao próprio número, então o produto dos algarismos é igual a

A 10.
B 12.
C 14.
D 16.

56 Um garoto resolveu guardar suas bolinhas de gude em saquinhos plásticos de forma que cada saquinho ficasse com a mesma quantidade de bolinhas. Tentou colocar cinco bolinhas em cada saquinho e percebeu que sobrava uma bolinha, tentou colocar seis bolinhas em cada saquinho e novamente sobrou uma bolinha. Tentou com sete e depois com oito e aconteceu o mesmo em ambos os casos: sobrou uma bolinha.
Sabendo que a atual coleção desse garoto tem mais do que 1500 bolinhas de gude, e que os saquinhos plásticos onde o garoto guardará suas bolinhas não são capazes de conter mais do que 50 bolinhas cada, determine:

a) Qual é o número mínimo de bolinhas de gude da coleção do garoto?
b) Qual é o número mínimo de saquinhos plásticos que o garoto deverá usar para guardar suas bolinhas de gude fazendo com que cada saquinho contenha a mesma quantidade de bolinhas dos demais? E qual seria, neste caso, a quantidade de bolinhas guardadas em cada saquinho?

57 **Fuvest** Um número natural N tem três algarismos. Quando dele subtraímos 396 resulta o número que é obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de N. Se, além disso, a soma do algarismo das centenas e do algarismo das unidades de N é igual a 8, então o algarismo das centenas de N é:

A 4 B 5 C 6 D 7 E 8

58 Assinale a alternativa que apresenta, no sistema decimal, a diferença entre as quantidades representadas pela cifra 1010 no próprio sistema decimal e no sistema binário.

A 1000
B 100
C 10
D 1
E 0

59 Determine o algarismo X da cifra 3X4 sabendo que ela representa um número divisível por 7

60 **FGV-SP 2012** Chamaremos de S(n) a soma dos algaris mos do número inteiro positivo *n*, e de P(n) o produto dos algarismos de *n*. Por exemplo, se $n = 47$, então $S(47) = 11$ e $P(47) = 28$. Se *n* é um número inteiro posi tivo de dois algarismos tal que $n = S(n) + P(n)$, então, o algarismo das unidades de *n* é

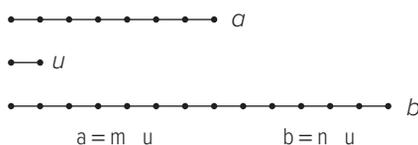
A 1. B 2. C 3. D 6. E 9.

Textos complementares

Números comensuráveis e incomensuráveis

Os antigos gregos, intuitivamente, acreditavam que dados dois objetos quaisquer, de comprimentos a e b, sempre existia alguma unidade u, suficientemente pequena, de tal forma que ambos objetos pudessem ser medidos de modo "exato" com essa unidade u Ou seja,

$$\forall \text{ a e b}, \exists \text{ u tal que } a = m \quad u \text{ e } b = n \quad u, \text{ onde } m, n \in \mathbb{N}$$

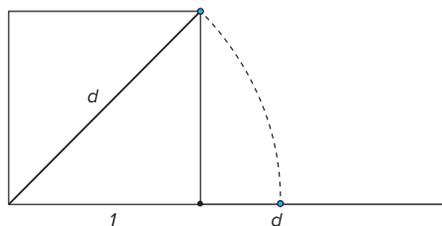
Desse modo, usando a medida u, um objeto mediria m vezes u e o outro n vezes u. Os objetos (números) a e b são ditos comensuráveis. Para os antigos gregos, dois comprimentos quaisquer eram sempre comensuráveis. Em outras palavras, tudo se podia comparar ou medir utilizando números inteiros.

Dizer que dois números a e b são sempre comensuráveis implica que o quociente de dois números a e b quaisquer é sempre racional.

$$\frac{a}{b} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n},$$

sendo $m, n \in \mathbb{N}$, então $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Seria grande a surpresa desses gregos ao descobrirem que pudessem existir números não comensuráveis ou incomensuráveis. Acredita-se que foi Hípaso de Metaponto, membro da escola pitagórica, quem demonstrara (provavelmente por métodos geométricos) que a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles e um dos seus catetos não eram comensuráveis. Ou, equivalentemente, que a diagonal d de um quadrado e um dos seus lados ℓ são incomensuráveis.

Sem perda de generalidade, suponha $\ell = 1$ Pelo teorema de Pitágoras

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Se d e $\ell = 1$ fossem comensuráveis então teríamos que $\frac{d}{\ell} = d$ é racional.

Portanto, deveríamos admitir que, $\exists\ d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = 2$

Mostraremos que tal conclusão é absurda

Lema 5.1. Não existe racional d tal que $d^2 = 2$

Demonstração. Suponha que existe $d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = 2$. Ou seja, $d = \frac{m}{n}$, onde m e n são primos relativos (isto é, m e n não têm fatores em comum). Logo,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Significa que m^2 é par. Logo, necessariamente m é par (se m fosse ímpar, o produto $m \cdot m = m^2$ seria ímpar) Sendo m par, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k$.

Assim, $m^2 = 4k^2$ e, portanto, $n^2 = 2k^2$ O que implica que n^2 é par Desse modo, necessariamente, n é par. Isto é, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2r$. Isso mostra que m e n não podem ser primos relativos, pois têm como fator comum o 2. Tal contradição prova o lema.

Portanto, deve-se concluir que existem números incomensuráveis Note que a diagonal d pode ser "levada" até a reta onde encontra o cateto do quadrado (rotando $\frac{\pi}{4}$ no sentido horário) Ou seja, o comprimento d corresponde a um ponto da reta, portanto, existe Mas, quem era esse número d? Antes dessa descoberta, achavam que todo ponto da reta poderia ser representado por um racional

Conta a lenda que essa descoberta teria levado a uma crise da matemática pitagórica. Na época, a escola pitagórica tratava os números como entidades místicas (números: amigáveis; primos; perfeitos; deficientes; abundantes; etc).

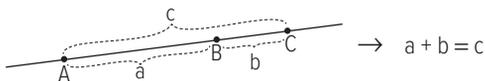
AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina S *A Construção dos Números Reais e suas Extensões*. *In*: 4º Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, nov. 2015, Catalão, p. 53 4.

Resumindo

Operações aritméticas

Adição

A adição é a mais intuitiva das operações aritméticas. Não é necessário o uso de algarismos ou de palavras para compreendermos que \\\ + \\ = \\\\\.

A interpretação geométrica da adição também tem esse caráter intuitivo:

Se A, B e C são pontos colineares e B pertence ao segmento $\overline{AC}$, então AB + BC = AC.

Os valores operados pela adição são chamados de parcelas, e o resultado é chamado de soma.

Multiplicação

A multiplicação entre os números inteiros positivos pode ser definida como uma adição de sucessivas parcelas iguais. O numeral que indica a quantidade de parcelas e o valor dessas parcelas são ambos, chamados de fatores O resultado das multiplicações é chamado de produto

Dizemos também que todo produto é múltiplo de seus fatores. Palavras como dobro e triplo indicam multiplicidades de certo valor:

- O dobro de **a** é **(a + a)** ou ainda **2a.**
- O triplo de **a** é **(a + a + a)** ou ainda **3a.**

Potenciação

A multiplicação de fatores iguais é expressa pela potenciação.

As primeiras potências de um número **a** são:

- O quadrado de **a** é **(a · a)** ou ainda $\mathbf{a^2}$**.**
- O cubo de **a** é **(a · a · a)** ou ainda $\mathbf{a^3}$**.**

Operações inversas

Para descrever os processos de resolução algébrica das equações que descrevem as perguntas criadas a partir da adição, da multiplicação ou da potenciação, usamos outros operadores simbólicos, como ( ) e (÷), que indicam as operações inversas da adição e da multiplicação.

A potenciação não é comutativa como a adição ou a multiplicação. Por isso, são necessárias duas operações distintas para invertê-la: uma para isolar a base invertendo o expoente – **a radiciação** – e outra para isolar o expoente invertendo a base, **o logaritmo**.

$$x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 5 \quad 3 = 2 \Leftrightarrow S = \{2\}$$
$$3 \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12 \div 3 = 4 \Leftrightarrow S = \{4\}$$
$$x^3 = 729 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{729} = 9 \Leftrightarrow S = \{9\}$$
$$3^x = 729 \Leftrightarrow x = \log_3 729 = 6 \Leftrightarrow S = \{6\}$$

Propriedades das potências

Para potências de mesma base e expoentes diferentes temos três regras válidas em todos os casos cuja base é positiva e não unitária (base > 0 e base ≠1):

I. O expoente do produto é igual à soma dos expoentes dos fatores.
II. O expoente da razão é igual ao expoente do numerador menos o expoente do denominador.
III. Os expoentes da potência de outra potência comutam entre si.

Assim, sendo a > 0 e a ≠ 1, temos:

I. $a^r \; a^s \quad a^{r+s}$

II. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

III. $\left(a^r\right)^s = a^{r\ s} = a^{s\ r} = \left(a^s\right)^r$

A potenciação é uma operação distributiva em relação à multiplicação e à divisão, mas não é distributiva em relação à adição ou à subtração. Assim sendo, para a > 0 e b > 0, temos:

I. $(a\ \ b)^n = a^n\ \ b^n$

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

As principais consequências dessas propriedades são que:

- Para todo a real temos que: $\begin{cases} a^1 = a \\ a^0 = 1 \end{cases}$.
- Se a ≠ 0, então $a^{-1} = \frac{1}{a}$ e se a > 0: $a^{\ n} = \frac{1}{a^n}$.
- Sendo a ≠ 0 e b ≠ 0: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$
- Sendo a > 0 e d ≠ 0: $a^{\frac{n}{d}} = \left(\sqrt[d]{a}\right)^n = \sqrt[d]{a^n}$.

Devido ao fato de as potências pares dos números negativos serem positivas, um cuidado especial deve ser tomado em relação às equações do tipo $\mathbf{x^n = a}$, no universo dos números reais, quando **n** é **par** diferente de zero:

- Se **a** for positivo, teremos: $x = \pm\sqrt[n]{a}$.
- Se **a** for negativo, a equação $x^n = a$ não possui solução real

Já nos casos em que **n** é **ímpar**, temos que $\mathbf{x^n = a}$ implica $x = \sqrt[n]{a}$, não importando qual seja o sinal de **a**.

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow S = \{-3, 3\}$$
$$x^2 = -9 \Leftrightarrow S = \varnothing$$
$$x^3 = 8 \Leftrightarrow S = \{2\}$$
$$x^3 = \Leftrightarrow 8 \quad = S \quad \{\ \ 2\}$$

Teorema Fundamental da Aritmética

"Todo número inteiro não nulo pode ser decomposto em fatores primos de uma única maneira e não há dois números inteiros com a mesma decomposição."

$$N = \pm p_1^{\alpha_1} \quad p_2^{\alpha_2} \quad p_3^{\alpha_3} \quad p_4^{\alpha_4} \qquad p_i^{\alpha_i}$$

Quantidade de divisores

Sendo N um número inteiro não nulo:

- A quantidade de divisores positivos de N é dado por: $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot ...$
- A quantidade de divisores inteiros de N é dado por: $2(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1)$

Divisão euclidiana

$$\begin{array}{l|l} N & d \\ \hline r & q \end{array} \rightarrow \begin{cases} N = d\ {+}q\ \ r \\ 0 \le r < |d| \end{cases}$$

Em que: **N** é o dividendo;
d é o divisor diferente de zero;
q é o quociente e
r é o resto da divisão.

Se o resto da divisão é zero, então:

- **d** é divisor de N;
- N é múltiplo de **d**.

Cifras numéricas

No sistema decimal, um número de até 4 algarismos pode ser representado por:

$$N = (mcdu)_{10} = m \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + u \cdot 10^0 \text{ com } \begin{cases} 0 \le m \le 9 \\ 0 \le c \le 9 \\ 0 \le d \le 9 \\ 0 \le u \le 9 \end{cases}$$

Quer saber mais?

Sites

- Uma breve apresentação da teoria dos números:
  <https://www somatematica.com br/coluna/gisele/25052001 php>
- O básico dos números racionais:
  <https://www.gestaoeducacional.com.br/numeros-racionais-o que-sao/>
- Curiosidades sobre os números irracionais:
  <http://www educ fc ul pt/icm/icm99/icm17/categori htm>
- Para se aprofundar no teorema fundamental da aritmética:
  <https://pt khanacademy.org/computing/computer-science/cryptography/modern-crypt/v/diffie hellman-key exchange part-1>
- Sobre outros sistemas de numeração.
- Binário:
  <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm36/numeracao binaria.htm>
- Hexadecimal:
  <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3643948/mod_resource/content/0/Representa%C3%A7%C3%A3o%20de%20N%C3%BAmeros%20em%20Bin%C3%A1rio%20e%20Hexadecimal.pdf>

Exercícios complementares

1 "... a uma temperatura de **doze** graus abaixo de zero, foi disputada ontem à tarde, a final do campeonato japonês de futebol que terminou com vitória do Kashiwa Reysol por **três** a zero. O mais impressionante foi que todos os gols foram marcados nos últimos dez minutos do **segundo** tempo ...". Neste texto, os numerais em negrito têm conotações respectivamente:

A Cardinal, ordinal e analítica.
B Cardinal, analítica e ordinal.
C Analítica, cardinal e ordinal.
D Analítica, ordinal e cardinal.
E Geométrica, analítica e cardinal.

2 Ana e seu irmão Beto moram em diferentes países da África, mas em cidades cuja característica comum é a de serem atravessadas pelo trópico de Câncer.
Como estão em férias os irmãos viajaram de avião para outros países e, pouco antes de pegarem seus voos, falaram-se ao telefone quando eram 22 horas na cidade em que mora Ana e 1 h na cidade em que mora Beto.
Depois que chegaram aos seus destinos, os irmãos falaram-se novamente ao telefone, quando eram 8 horas para Ana e 17 horas para Beto. As cidades onde Ana e Beto passam suas férias também estão localizadas ao longo do trópico de Câncer. Ana viajou para o Caribe percorrendo uma distância igual a 2 vezes a distância da viagem de Beto, que foi para o Oriente Médio.
De acordo com essas informações, quando forem 5 horas na cidade em que Beto passa suas férias, então, na cidade em que mora Ana será

A meio-dia.
B dez horas da manhã.
C duas horas da madrugada.
D meia-noite.
E onze horas da noite.

3 Em 2012, algumas pessoas se preocupavam com o dia 20/12/2012 em que aconteceria o "fim do mundo" supostamente previsto pelo calendário maia, mas isso não aconteceu. Parte da superstição gira em torno do fato de que, na data em questão, os numerais que indicam dia e mês formam, juntos e nessa ordem, o numeral que indica o ano.
Considerando-se que as representações numéricas de dias e meses sejam feitas sempre com dois algarismos cada como, por exemplo, 03/01 para o dia três de janeiro, quanto tempo se passará, aproximadamente, entre a próxima coincidência numérica similar à que aconteceu em 2012?

A 2 anos
B 10 anos
C 90 anos
D 500 anos
E 900 anos

4 Em 1779, o matemático francês Étienne Bézout publicou um trabalho sobre equações algébricas no qual demonstrava uma propriedade dessas equações que ficou conhecida como teorema de Bézout. De acordo com o teorema, sendo **a**, **b** e **c** três números inteiros não nulos, a equação $aX + bY = c$ somente admite soluções (X, Y) em que X e Y também são números inteiros e se o número **c** for múltiplo do máximo divisor comum entre os números **a** e **b**.
De acordo com esse teorema, qual é a única das equações a seguir que admite soluções (X, Y) em que X e Y são números inteiros?

A $36X + 84Y = 800$
B $40X + 80Y = 700$
C $72X + 96Y = 600$
D $42X + 70Y = 500$
E $35X + 98Y = 400$

5 Em um jogo de tabuleiro, cada jogador joga com 2 dados numerados de 1 a 6. Para saber quantas casas sua peça deverá andar no tabuleiro, os jogadores devem obedecer às seguintes regras:

I. Se os resultados obtidos nos dados forem iguais, então o número de casas que o jogador deverá andar será a soma dos resultados obtidos nos dados.
II. Se os resultados obtidos forem consecutivos, então o número de casas será igual ao produto dos resultados.
III. Se os resultados não forem nem iguais, nem consecutivos, então o número de casas será igual ao quadrado do menor resultado somado ao maior resultado.
IV. Três amigos jogam seus dados e descobrem que suas peças andarão o mesmo número de casas no tabuleiro, mesmo tendo obtido diferentes resultados em seus dados.

Quantas casas eles andaram ao todo?

A 6 **B** 12 **C** 18 **D** 20 **E** 24

6 Encontre o maior divisor do número $N = 2017^2 - 1$ que seja:

a) um número primo;
b) um quadrado perfeito.

7 Encontre o menor número positivo *x* tal que o número $N = 2020 \cdot 2014 + x$ seja um quadrado perfeito.

8 A imagem a seguir é de um jogo de oito chaves fixas, também conhecidas como chaves de boca.

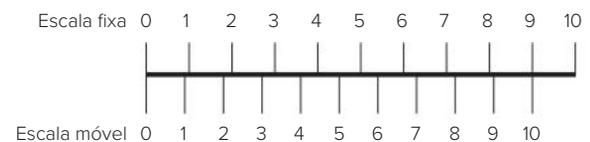
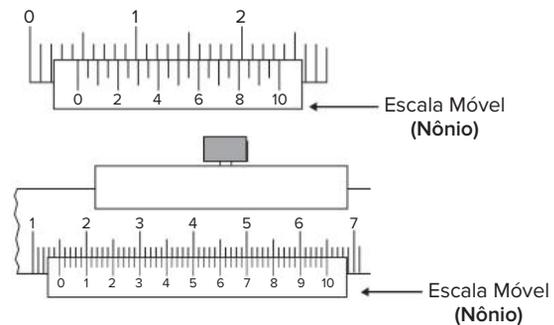
As medidas das aberturas ("bocas") dessas ferramentas costumam ser expressas por frações irredutíveis de uma polegada, nas quais os denominadores são expressos por potências do número 2 menores ou iguais a 32 A tabela a seguir apresenta, em ordem crescente, as frações marcadas em cada chave, com exceção da chave de número 4.

Chave	Boca menor	Boca maior
nº 1	5/32	3/16
nº 2	1/4	9/32
nº 3	5/16	11/32
nº 4		
nº 5	15/32	1/2
nº 6	9/16	19/32
nº 7	5/8	11/16
nº 8	23/32	3/4

Sendo assim, a soma dos numeradores das frações irredutíveis que completam essa tabela pode ser igual a

A 10.
B 14.
C 18.
D 23.
E 25.

Texto para as próximas duas questões.

O paquímetro foi desenvolvido a partir da invenção do nônio, que consiste numa gradação que é baseada na seguinte relação: "Sob uma escala fixa, com 10 graduações de 1 mm, foi colocada uma escala móvel, chamada de nônio, com as mesmas 10 graduações, porém ocupando o espaço de 9 graduações da escala fixa "

Posteriormente, a escala móvel foi ampliada para 20 graduações ocupando o espaço de 19 graduações, e também para 50 graduações, ocupando o espaço de 49

A resolução **R** de um paquímetro é dada pela razão entre o valor da menor divisão da escala fixa (UEF) pelo número de divisões do nônio (NDN). Um paquímetro que, por exemplo, tem sua escala fixa graduada em milímetros e cujo nônio tem 20 divisões é de 0,05 mm.

$$R = \frac{UEF}{NDN} = \frac{1\ mm}{20} = 0{,}05\ mm$$

http://www.fatecsorocaba.edu.br/principal/pesquisas/metrologia/apostilas/apostila_paquimetro.pdf

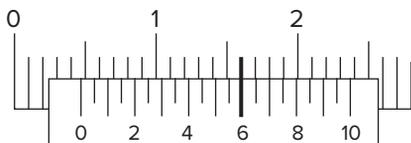
9 No sistema de polegadas decimais, alguns paquímetros são tais que cada divisão da escala fixa vale $\left(\frac{1}{40}\right)$ (um quarenta avos de polegada)

Fonte: https://www.ccpvirtual.com.br/paquimetro-universal-guias-de-titanio-150mm-6-002mm-1-128-digimess/p

Qual é a resolução, em polegadas, de um paquímetro desse tipo cujo nônio possui 25 divisões?

A 0,1
B 0,2
C 0,04
D 0,005
E 0,001

10 A leitura de um paquímetro leva em consideração o número **x** associado à última marca da escala fixa que foi ultrapassado pelo zero da escala móvel, e o número **y** de marcas da escala móvel anteriores à marca que coincide com alguma graduação da escala fixa. Determinados os valores de **x** e **y**, a medida será dada por **x + y · R**, em que **R** é o valor da resolução do paquímetro.

A figura a seguir mostra a posição das escalas de um paquímetro cuja escala fixa está graduada em milímetros:

A medida, em centímetros, obtida na leitura das escalas desse paquímetro é de:

A 4,6
B 1,66
C 1,06
D 0,46
E 0,406

11 Os números mistos são representados na forma $A\frac{B}{C}$, com A, B e C inteiros tais que A ≠ 0 e que 0 < B < C. Assim, o número A indica a parte inteira do número e a fração $\frac{B}{C}$ indica sua parte decimal No exemplo da placa, temos $7\frac{1}{2} = 7,5$ Então, se $x = 2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}$ e $y = \frac{2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{2}{3}}{3\frac{1}{2}}$, a forma mista do número x   y será

A $6\frac{1}{2}$

B $6\frac{5}{9}$

C $6\frac{7}{18}$

D $7\frac{1}{2}$

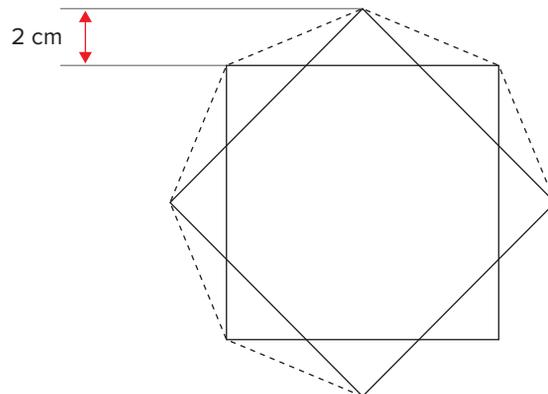
E $7\frac{5}{18}$

12 Sabendo que $\frac{2}{7} = 0,285714285714285714.$ considere o número inteiro n tal que:

$$\frac{n}{14} = 0,71428571428571428...$$

O valor de *n* é

A 10
B 9
C 8
D 7
E 6

13 Um professor do Sistema de Ensino Poliedro propôs aos seus alunos que encontrassem a medida dos lados de dois quadrados congruentes, cujos vértices coincidiam com os vértices de um octógono regular. Sabe-se que a distância entre os vértices de um dos quadrados e o lado mais próximo do outro é de 2 cm, como mostra a figura a seguir:

João, Cassiano, Chico, Duda e Luiza foram os primeiros a resolver o problema e encontraram os seguintes valores, em centímetros:

- João: $\frac{4}{\sqrt{2}\quad 1}$
- Duda: $\frac{4}{\sqrt{2}+1}$
- Cassiano: $\frac{8+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
- Luiza: $\frac{4\sqrt{2}}{2\quad \sqrt{2}}$
- Chico: $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

O professor ficou surpreso com as respostas aparentemente diferentes e resolveu racionalizar os denominadores de cada uma. Depois da racionalização, percebeu que apenas três desses alunos chegaram ao resultado correto. Esses alunos foram

A João, Cassiano e Luiza.
B Cassiano, Duda e Luiza.
C Chico, Duda e Luiza.
D Cassiano, Chico e Duda.
E João, Cassiano e Chico.

14 Resolvendo um problema de trigonometria de uma prova de vestibular, um estudante descobre que o seno do ângulo agudo procurado é igual a $\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Supondo que esse valor esteja correto, o ângulo em questão mede

A 75°.
B 60°.
C 45°.
D 30°.
E 15°.

15 Sendo a e b os números reais que resultam das seguintes potências de expoentes irracionais:

$$a = 2^{\sqrt{2}} \qquad b = 8^{\sqrt{8}}$$

Nessas condições, é correto afirmar que

A $b = a^8$.
B $b = a^6$.
C $b = a^4$.
D $b = a^3$.
E $b = a$.

16 Escrevendo o produto $E = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[5]{5}$ na forma $a\sqrt[b]{c}$, com a, b e c inteiros e positivos, o valor da soma a + b quando **a** é máximo e **b** é mínimo é igual a:

A 17
B 19
C 21
D 23
E 25

17 Sendo α e β dois números reais não nulos tais que α é um número racional e β é um número irracional, considere as seguintes informações:

I. A soma $(\alpha + \beta)$ é, necessariamente, um número irracional.
II. O produto $(\alpha \times \beta)$ é, necessariamente, um número irracional.
III. A potência (α^{β}) é, necessariamente, um número irracional.
IV. A potência (β^{α}) é, necessariamente, um número irracional.

Estão corretas as afirmações:

A I e II.
B I e III.
C II e III.
D II e IV.
E I, III e IV.

18 Considere o conjunto J de todos os números irracionais da forma $x = a + b\sqrt{2}$, em que a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Um elemento *x* do conjunto J é denominado unidade de J se, e somente se, $\frac{1}{x}$ também é elemento do conjunto J.

a) Mostre que o número $x = 3 \quad 2\sqrt{2}$ é uma unidade do conjunto J.
b) Mostre que o número $x = 5 + 3\sqrt{2}$ é uma unidade do conjunto J.
c) Encontre os valores de *y* para os quais $x = y + 5\sqrt{2}$ é uma unidade de J.

19 Considere todos os números reais y que podem ser expressos por um radical da forma $y = \sqrt[n]{m}$, em que n e m são números inteiros positivos

a) Se m = 729, determine todos os valores de n para os quais y é um número inteiro
b) Qual é o menor valor de m para o qual y pode assumir, exatamente, a mesma quantidade de valores inteiros que no item anterior?

20 Calculando-se $\sqrt[3]{\dfrac{2013^2 \quad 1987^2}{13}}$, o resultado obtido deve ser:

A 2
B 20
C 40
D 200
E 400

21 Efetuando-se corretamente todos os cálculos da expressão $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{64}} + \sqrt[3]{64} + \sqrt{64} + \sqrt{\sqrt[3]{64}}}$, encontra-se um número múltiplo de:

A 2
B 3
C 5
D 7
E 11

22 Mostre que a expressão $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}} + \sqrt{8-4\sqrt{3}}}$ representa um número racional, sabendo que para transformar um radical duplo como $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ na soma ou subtração de radicais simples como $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, basta encontrar números reais positivos x e y que satisfaçam o sistema $\begin{cases} x + y = a \\ 4xy = b \end{cases}$.

23 Sabe-se que há duas formas de se escrever a fração $\dfrac{26^{50}}{52^{25}}$ como uma única potência b^m de base e expoente naturais e maiores do que 1. A diferença entre o menor valor de b e o menor valor de m é:

A 5
B 8
C 12
D 15
E 20

24 Sabendo que existem três pares de números inteiros (m, n) tais que $m^n = 1$ e m + n = 3, assinale a alternativa que apresenta, respectivamente, o produto de todos os possíveis valores de m e a soma de todos os possíveis valores de n

A 3 e 2
B 3 e 6
C 1 e 6
D 1 e 2
E 6 e 1

25 Determine todos os números inteiros a, b e c tais que $b^a = 1$, a + c = 2 e b · c = 4.

26 Encontre os valores indicados por ? nas expressões a seguir:

a) $$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2016} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2017} = \frac{?}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2017}$$

b) $$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \quad \cdot 2016} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \quad \cdot 2017} = \frac{?}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \quad \cdot 2018}$$

c) $$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2016 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2017 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2018}{?}$$

27 Sejam **a** e **b** números inteiros, não nulos, tais que a < b, considere que P(a, b) represente o produto de todos os números inteiros não nulos desde o número **a** até o número **b**. Exemplo:

$$P(\ 3, 2) = (\ 3)\ \ (\ 2)\ \ (\ 1)\ \ 1\ \ 2 = \ \ 12$$

Entre as alternativas a seguir, assinale a que apresenta o número inteiro mais próximo de zero, que multiplicado por P(7, 10) resulte em um cubo perfeito e positivo.

A 7
C 2
E 7
B 5
D 5

28 Sendo $p_1 < p_2 < p_3$ três números primos positivos tais que $p_1 + p_2 = p_3$, determine todos os possíveis valores de p_1.

29 Sendo P e Q dois números primos, o número de divisores positivos e maiores do que 1 do número $(P \cdot Q)^{P+Q}$ é:

A $(P + Q)^2$
B $P^2 + Q^2$
C $(P + Q + 1)^2$
D $(P + Q \ \ 1)^2$
E $(P + Q) \cdot (P + Q + 2)$

30 Considere um conjunto C de números inteiros positivos e distintos tais que:

- C possui exatamente 3 elementos;
- Todos os elementos de C são números de 4 algarismos;
- O mínimo múltiplo comum dos elementos de C é 49000;
- O máximo divisor comum dos elementos de C é 280.

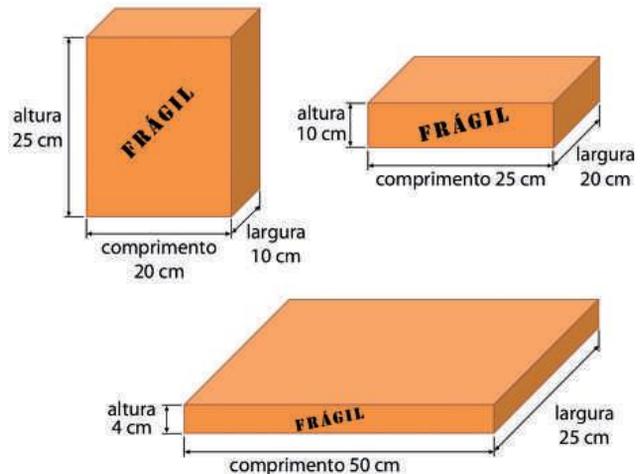
Encontre todos os possíveis conjuntos que satisfazem essas condições.

31 Uma empresa distribui pirulitos em saquinhos plásticos, contendo sempre 70 pirulitos cada, e guarda esses saquinhos em caixas de papelão. Em cada caixa de papelão cabe sempre a mesma quantidade de saquinhos. Quantidade essa, maior do que 10 e menor do que 20.

Certo dia, no depósito da empresa havia um caminhão carregado dessas caixas de papelão totalmente cheias de saquinhos com pirulitos. O caminhão já estava de saída para entregar uma encomenda de 2520 pirulitos, levando exatamente a quantidade de pirulitos encomendada.

Qual entre as alternativas a seguir pode representar a quantidade de pirulitos em cada caixa de papelão dentro do caminhão da entrega?

A 360
B 630
C 700
D 840
E 980

32 **Unesp 2013** Uma empresa de cerâmica utiliza três tipos de caixas para embalar seus produtos, conforme mostram as figuras.

Essa empresa fornece seus produtos para grandes cidades, que, por sua vez, proíbem o tráfego de caminhões de grande porte em suas áreas centrais. Para garantir a entrega nessas regiões, o proprietário da empresa decidiu adquirir caminhões com caçambas menores.

A tabela apresenta as dimensões de cinco tipos de caçambas encontradas no mercado pelo proprietário.

tipo de caçamba	comprimento (m)	largura (m)	altura (m)
I	3,5	2,5	1,2
II	3,5	2,0	1,0
III	3,0	2,2	1,0
IV	3,0	2,0	1,5
V	3,0	2,0	1,0

Sabe-se que:

- a empresa transporta somente um tipo de caixa por entrega.
- a empresa deverá adquirir somente um tipo de caçamba.
- a caçamba adquirida deverá transportar qualquer tipo de caixa.
- as caixas, ao serem acomodadas, deverão ter seus “comprimento, largura e altura” coincidindo com os mesmos sentidos dos “comprimento, largura e altura” da caçamba.
- para cada entrega, o volume da caçamba deverá estar totalmente ocupado pelo tipo de caixa transportado.

Atendendo a essas condições, o proprietário optou pela compra de caminhões com caçamba do tipo

A II.
D I.
B IV.
E V.
C III.

33 Um aplicativo de celular faz automaticamente três tipos de atualizações periódicas. As atualizações do sistema operacional são feitas a cada 30 dias, as atualizações de configuração são feitas a cada 18 dias e as atualizações de segurança são feitas a cada 24 dias. Se hoje, esse aplicativo foi instalado em um celular e fez as três atualizações comentadas, determine:

a) Quando o aplicativo fará novamente as três atualizações em um mesmo dia?

b) Quando acontecerá de o aplicativo fazer pela primeira vez duas dessas três atualizações em um mesmo dia?

34 Um trabalho de Educação Artística consiste em fazer um painel retangular usando canudinhos plásticos coloridos de mesma espessura, mas com comprimentos diferentes. Para isso, os canudinhos podem ser emendados pelas pontas formando colunas de mesmo comprimento. Depois essas colunas de canudinhos são coladas lado a lado formando um painel retangular como o da ilustração a seguir:

Marina dispõe de 100 canudinhos plásticos de 12 cm, 80 de 15 cm e 60 de 18 cm, para fazer esse trabalho e não quer que nenhum canudinho seja cortado para ajustar o comprimento de uma coluna Marina usará os três tipos de canudinhos nesse trabalho e, os que sobrarem ela guardará para um próximo trabalho Nessas condições:

a) Qual é a quantidade máxima de colunas que o trabalho de Marina poderá ter?

b) Qual é a quantidade máxima de canudinhos que Marina poderá usar?

35 Se mmc(x, y) = 2100 e mdc(x, y) = 21, então o valor de $\sqrt{x \cdot y}$ é:

A 12
B 21
C 102
D 120
E 210

36 Um número n entre 1000 e 1200 é tal que, se dividido por 12 deixa resto 11, se dividido por 18 deixa resto 17 e se dividido por 20 deixa resto 19. A soma dos três últimos algarismos de n é:

A 14
B 15
C 16
D 17
E 18

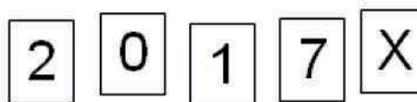
37 Encontre o menor número inteiro positivo N que dividido por:

- 7 deixa resto 5;
- 17 deixa resto 12 e
- 27 deixa resto 19.

38 Marcos começou uma brincadeira com números N de quatro algarismos que era composta de três etapas: a primeira etapa era escrever os algarismos de um número N em ordem decrescente. A segunda etapa era em escrever os algarismos do número N em ordem crescente. A terceira etapa era efetuar a subtração do número obtido na primeira etapa pelo número obtido na segunda etapa. Depois disso a brincadeira recomeçava com o resultado obtido na última etapa.
Marcos começou com o número N = 2017 e, assim, na primeira etapa ele obteve o número 7210, na segunda etapa obteve o número 0127 e na terceira efetuou a subtração 7210 – 127. Se Marcos repetir a brincadeira sucessivamente sempre com os resultados obtidos nas terceiras etapas, após 2017 repetições da brincadeira ele encontrará, na terceira etapa, o número:

A 5986
B 6027
C 6144
D 6174
E 7416

39 Bruno tinha 5 cartas com símbolos matemáticos, sendo quatro com algarismos e uma com operador aritmético da multiplicação.

2 1 7

Sua irmã pediu que ele colocasse a carta X em alguma posição entre as quatro cartas com os algarismos, de modo que a multiplicação indicada tivesse o maior resultado possível.
Qual é esse resultado?

A 1490
B 1470
C 1420
D 1407
E 1402

40 Considere um número natural N de quatro algarismos e também os naturais M_1 e M_2 tais que M_1 é o número formado pelos dois primeiros algarismos de N e M_2 é o número formado pelos dois últimos algarismos de N Sabe-se que M_1 é sucessor de M_2 e que ao dividir se N por M_2 obtêm-se quociente 106 e resto 5
Nessas condições pode-se concluir que a soma dos valores de M_1 e M_2 é igual a:

A 39
B 37
C 20
D 19
E 18

41 Cláudio foi ao banco consultar o saldo de uma con ta que não utilizava com frequência, mas chegando lá percebeu que não lembrava completamente da senha de quatro algarismos do cartão da conta Tudo o que lembrava era que:

I. O primeiro algarismo era 4.
II. O último algarismo era 6.
III. Os dois algarismos centrais eram iguais.
IV. A senha formava um número múltiplo de 7.

Nessas condições, quais são os algarismos que podem ser utilizados para que Cláudio possa fazer a consulta do saldo de sua conta?

A 1 ou 7.
B 2 ou 7.
C 1 ou 8.
D 2 ou 8.
E 7 ou 8.

42 Um número natural **N** possui **n** algarismos ($2 < n < 10$), de modo que:

- O primeiro algarismo de **N** é igual a **n**.
- O último algarismo de **N** também é igual a **n**.
- Todos os demais algarismos de **N** são iguais a 5.

a) Verifique que **N** não é divisível por 9 quando $n = 6$.
b) Determine todos os valores de **n** para os quais **N** é múltiplo de 9.

43 Mostre que a soma dos algarismos do número $N = 800 \cdot 2017 \cdot 6250$ é igual ao produto dos dois menores números primos que são divisores de N.

44 Qual é a soma dos algarismos ausentes no quociente da divisão de 10^6 por 7?

A 8
B 9
C 12
D 15
E 18

45 Muito usado no estudo da computação, o sistema numérico hexadecimal, é formado por 16 dígitos diferentes. Esses dígitos são representados pelos algarismos de 0 a 9, e pelas letras A, B, C, D, E, e F que equivalem, no sistema decimal, aos números 10, 11, 12, 13, 14, 15, respectivamente.
A tabela a seguir apresenta a correspondência entre alguns números nos dois sistemas de numeração.

Decimal	Hexadecimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F
16	10
17	11
18	12
19	13
20	14
21	15

Decimal	Hexadecimal
22	16
23	17
24	18
25	19
26	1A
27	1B
28	1C
29	1D
30	1E
31	1F
32	20
33	21
34	22
35	23
36	24
37	25
38	26
39	27
40	28
41	29
42	2A
43	2B

Decimal	Hexadecimal
44	2C
45	2D
46	2E
47	2F
48	30
49	31
50	32
51	33
52	34
53	35
54	36
55	37
56	38
57	39
58	3A
59	3B
60	3C
61	3D
62	3E
63	3F
64	40
65	41

De acordo com esse padrão de representação, o número representado por AB no sistema hexadecimal equivale, no sistema decimal, ao número:

A 21
B 27
C 161
D 171
E 1611

46 Quanto vale a soma dos algarismos da diferença entre os números 100^{100} e 10^{10}?

A 890
B 1240
C 1520
D 1710
E 1890

47 A soma das soluções da equação $(x-2)^{(x^2-9x+20)} = 1$ é

A 9.
B 10.
C 11.
D 12.
E 13.

48 Sendo a e b dois números inteiros, considere que M (a, b) represente o conjunto dos números que são múltiplos comuns dos números a e b. Considere também que P (a, b) represente o conjunto de todos os números primos que existem entre os números a e b. Sendo *x* o menor elemento de M (66, 99) e y o maior elemento de P (66, 99), o valor de x + y é:

A 265
B 275
C 285
D 295
E 305

49 Se uma sequência numérica infinita começa com dois números primos e os termos, a partir do terceiro, são sempre iguais ao produto dos dois termos anteriores, então não há termo nessa sequência que seja um número:

A par
B impar
C múltiplo de 3
D múltiplo de 10
E quadrado perfeito.

50 Sendo a e b dois números inteiros positivos tais que m = mmc (a, b) e d = mdc (a, b), então uma expressão equivalente a $\frac{m+d}{a \cdot b}$ é

A $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$
B $\frac{1}{m}+\frac{1}{d}$
C $\frac{m}{a}+\frac{d}{b}$
D $\frac{a}{m}+\frac{b}{d}$
E $\frac{a+b}{m \cdot d}$

51 Qual é o algarismo das unidades do número $2017^5 - 2017$?

A 6
B 7
C 8
D 9
E 0

52 Qual é o algarismo das unidades do número 2012^{2012}?

A 2
B 4
C 6
D 8
E 0

53 **IME 2018** A soma dos algarismos de X com a soma dos quadrados dos algarismos de X é igual a X Sabe se que X é um número natural positivo O menor X possível está no intervalo:

A (0, 25]
B (22, 50]
C (50, 75]
D (75, 100]
E (100, 125]

54 **IME 2018** Seja *x* um número natural maior que 2. Se a representação de um numeral N na base *x* é 1041 e na base x – 1 é 1431, então a sua representação na base binária é:

A 10001111
B 11011011
C 11100111
D 11011110
E 11110001

55 **IME 2018** Se X e Y são números naturais tais que $X^2 \quad Y^2 = 2017$, o valor de $X^2 + Y^2$ é:

A 2008010
B 2012061
C 2034145
D 2044145
E 2052061

56 **IME 2017** Assinale a alternativa verdadeira:

A $\sqrt{2016}-\sqrt{2015}<\sqrt{2017}-\sqrt{2016}<\left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$
B $\sqrt{2017}-\sqrt{2016}<\sqrt{2016}-\sqrt{2015}<\left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$
C $\sqrt{2017} \quad <\sqrt{2016} \quad \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}<\sqrt{2016} \quad \sqrt{2015}$
D $\sqrt{2016} \quad <\sqrt{2015} \quad \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}<\sqrt{2017} \quad \sqrt{2016}$
E $\left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}<\sqrt{2017} \quad \sqrt{2016}<\sqrt{2016} \quad \sqrt{2015}$

57 **IME 2011** Sejam r e $s \in \mathbb{Z}$ (inteiro). Prove que (2r + 3s) é múltiplo de 17 se, e somente se, (9r + 5s) é múltiplo de 17

58 **ITA 2019** Um número natural *n*, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema di reita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine *n*.

59 **ITA 2012** Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;
II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;
III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais, é (são) sempre verdadeira (s)

A apenas I.
B apenas II.
C apenas III.
D apenas I e II.
E I, II e III.

60 **ITA 2016** Se *x* é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ é igual a

A 285.
B 286.
C 287.
D 288.
E 289.

MikeDotta/Shutterstock.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

2

Sentenças matemáticas e modelagens algébricas

Ideias matemáticas estão presentes em praticamente todos os momentos do dia Podemos enxergar formas e padrões em diversos contextos e, até intuitivamente, criamos proporções e equações que nos possibilitam lidar com diversas situações corriqueiras Muitas destas situações são transformadas em “problemas” nos vestibulares, não havendo um método formal específico ou um roteiro a seguir para resolvê-los O sucesso reside na interpretação e compreensão adequada do enunciado, bem como em um conhecimento algébrico capaz de solucionar o problema proposto

Sentenças matemáticas

Uma sentença matemática é composta de entes matemáticos, representando relações que podem ser de igualdade, desigualdade, equivalência, identidade, entre outras. Exemplos:

- $2 + 7 = 4 + 5$
- $x - 3 = 6 - 2x$
- $x \neq 0$
- $x + 4 > 3$
- $(x + 2)^2 \equiv x^2 + 4x + 4$
- $y = x + 1$

Sentenças matemáticas fechadas

As sentenças matemáticas fechadas são expressões aritméticas em que todos os valores numéricos são conhecidos. Elas não apresentam variáveis, parâmetros ou qualquer tipo de incógnita.

Existem apenas dois tipos de sentenças matemáticas fechadas: as **verdadeiras** e as **falsas**.

- $2 = 2$ **(Verdadeira)**
- $3 = 2$ **(Falsa)**
- $4 + 4 \cdot (4 - 4) < 4$ **(Falsa)**

Sentenças matemáticas abertas

As sentenças matemáticas abertas são obtidas a partir das sentenças fechadas, "mascarando-se" um ou mais de seus valores numéricos com termos algébricos representados por letras como **x** ou **y**.

Quando nos deparamos com uma sentença matemática aberta, não sabemos a princípio se ela foi obtida de uma sentença fechada verdadeira ou falsa. Então, os valores dos termos algébricos da sentença dependem apenas da sua natureza numérica: ordinal, cardinal, inteira, racional, real, positiva ou negativa. Isto é o que chamamos de domínio de uma variável.

Pode causar estranheza a alguns o fato de que a sentença aberta **$x = 3$**, por exemplo, pode ter sido obtida da sentença fechada **$2 = 3$,** que é evidentemente falsa!

É importante estar ciente de que estamos procurando a solução do problema e não da última sentença aberta que escrevemos na tentativa de resolvê-lo. Por isso, recomenda-se, sempre que possível, substituir a variável da equação original pelos valores que encontramos a fim de verificar a veracidade da solução.

Algumas dessas sentenças abertas são chamadas de equações. As equações expressam perguntas e, portanto, devem ser lidas como tal. É como se toda equação quisesse saber: "Que valores me tornam verdadeira?" ou "Que valores me tornam falsa?".

Respondemos as perguntas expressas pelas equações, escrevendo o seu conjunto verdade, também conhecido como conjunto solução. O conjunto solução de uma equação deve possuir todos os valores da variável que a tornam verdadeira e apenas eles. Assim, pode-se dizer que resolver uma equação é escrever o seu conjunto solução. Exemplos:

- $x = 2 \Leftrightarrow S = \{2\}$
- $x^2 = 2x \Leftrightarrow S = \{0, 2\}$
- $x^3 = 4x \Leftrightarrow S = \{\ \ 2, 0, 2\}$
- $x^3 = x^2 \Leftrightarrow S = \{0, 1\}$

As sentenças abertas nos exemplos anteriores são chamadas de **equações polinomiais** de 1º, 2º e 3º graus, respectivamente.

Saiba mais

O teorema fundamental da Álgebra garante que o número de soluções de uma equação polinomial nunca ultrapassa o grau da equação. Assim, uma equação de quarto grau, por exemplo, possui no máximo quatro soluções. Essa quantidade de soluções varia de acordo com as restrições (implícitas ou explícitas) impostas ao seu domínio. Por exemplo, uma equação do tipo $x^3 = 4x$ teria apenas duas soluções, se limitada ao conjunto dos números naturais, e três soluções se não houvesse essa restrição, considerando-se, assim, o conjunto mais amplo possível. Mas também existem outros tipos de equações não polinomiais, como as exponenciais, as irracionais e as trigonométricas. Nesses casos, não se aplica o teorema fundamental para prever o número de soluções.

O que todas as equações têm em comum é o fato de expressarem perguntas cujas respostas são os valores numéricos que as tornam sentenças matemáticas fechadas e verdadeiras.

Se uma equação é expressa por uma sentença aberta impossível, então o conjunto solução da equação é vazio. Exemplo:

$$5^x = \Leftrightarrow \quad = S\varnothing$$

Essa equação exponencial é impossível no universo dos números reais, pois a base (5) é um número positivo e a potência (1) é um número negativo e, na operação de potenciação, bases positivas geram apenas potências positivas, qualquer que seja o expoente da operação, no caso representado por x

$$\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow S = \varnothing$$

Essa equação também é impossível, pois o numerador da fração é o número 1 e, para uma fração representar o número zero, é necessário que seu numerador seja zero também.

Veja alguns exemplos de tipos de equações e seus respectivos conjuntos solução, no universo real:

- Equação irracional: $\sqrt[3]{2x + 7} = 3 \Leftrightarrow S = \{10\}$
- Equação logarítmica: $\log x = 2 \Leftrightarrow S = \{100\}$
- Equação quociente: $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 \quad 2x} = 0 \Leftrightarrow S = \{\ \ 2\}$
- Equação polinomial: $(x \quad 1)(x^2 \quad 3x)(x^2 \quad 4) \quad 0$ $\Leftrightarrow S = \}{-2}, 0, 1, 2, 3$
- Equação modular: $|x \quad 3| \Leftrightarrow \quad = S \quad \{2, 4\}$
- Equação composta: $\left(x^2 + \ 4x \ 4\right)^{x \ \ 2} \Leftrightarrow 1 = \quad S \quad \{1, 2, 3\}$
- Equação trigonométrica: $\cos x = \quad \Leftrightarrow$
  $S = \{x \quad \mathbb{R}$ tal que $x = \pi + 2k\pi,\ k \quad \mathbb{Z}\}$

Se uma equação é expressa por uma sentença aberta que é sempre verdadeira, então o conjunto solução da equação é o próprio conjunto dos números reais. Exemplos:

- $x + x = 2x \iff S = \mathbb{R}$
- $x - x = 0 \iff S = \mathbb{R}$
- $x \cdot x = x^2 \iff S = \mathbb{R}$
- $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \iff S = \mathbb{R}$

! Atenção

Sentença aberta e sentença fechada

A sentença é fechada quando todos os seus componentes se apresentam determinados.

Exemplos: $2 + 7 = 4 + 5$

$8 + 5 > 7 \quad 1$

A sentença é aberta quando contém componentes de valor não determinado.

Exemplos: $x \quad 3 = 5$

$2y - 7 > 3$

Equações × identidades

Observe que a sentença matemática aberta a seguir não se encaixa na categoria de equação polinomial, pois, segundo o teorema fundamental da Álgebra, nenhuma equação polinomial de 2º grau admite três soluções distintas:

$$(x+1)^2 \quad = 2x + x^2 \quad 1$$

$$x = 0 \Rightarrow (0+1)^2 \cdot \; 2{=}0 \quad 0^2 + 1 \text{ (Verdadeiro)} \iff 0 \in S$$
$$x = 3 \Rightarrow (3+1)^2 - 2 \cdot 3 = 3^2 + 1 \text{ (Verdadeiro)} \iff 3 \in S$$
$$x = 5 \Rightarrow (5+1)^2 \cdot \; 2{=}5 \quad 5^2 + 1 \text{ (Verdadeiro)} \iff 5 \in S$$

A expressão $\mathbf{(x + 1)^2 - 2x = x^2 + 1}$ é uma sentença matemática que, embora aberta, é verdadeira para qualquer valor da variável *x*. As sentenças abertas desse tipo expressam fatos aritméticos e são chamadas de **identidades**.

Mas, se quisermos tratar a sentença do exemplo acima como uma equação e determinar seu conjunto solução, este será o próprio domínio da variável:

$$(x + 1)^2 - 2x = x^2 + 1 \iff S = \mathbb{R}$$

As identidades são todas as sentenças matemáticas abertas que expressam uma relação de igualdade verdadeira para todos os valores de suas variáveis, desde que estejam de acordo com as condições de existência da ex pressão. O símbolo (=) é usado para expressar as relações de igualdade algébricas, sejam elas perguntas (equações) ou fatos (identidades), enquanto o símbolo (≡) só deve ser usado numa identidade Assim, percebendo se que uma sentença aberta indicada com o símbolo (=) é uma identidade, devemos trocar sua relação de igualdade pelo símbolo (≡), deixando claro que a sentença não deve ser tratada como uma pergunta, mas como um fato.

Exemplos:

- $x^2 \equiv x \cdot x$
- $(x^2 - 9)(x + 2) \equiv x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

Se tratadas como equações, as sentenças terão conjunto solução $\mathbb{R}$. Porém, existem identidades que possuem exceções no conjunto dos números reais e são relativas às condições de existência de suas expressões.

As identidades a seguir, por exemplo, são válidas ape nas se $x \neq 0$:

- $\dfrac{x^2+4}{2x} \equiv \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$
- $\log(x^2) \equiv 2\log|x|$

! Atenção

O símbolo (≡) é usado para indicar sentenças que são verdadeiras sempre que a existência de suas expressões algébricas esteja garantida.

Algumas técnicas de manipulação de identidades

As técnicas algébricas que serão discutidas agora mos tram artifícios facilitadores para equações oriundas ou não de problemas com enunciados limitados a termos matemá ticos Também são úteis para lidar com situações-problema cujas soluções exigem a tradução do enunciado para uma linguagem ou forma matemática.

Um exemplo de técnica algébrica é a propriedade dis tributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração:

$A(B + C) \equiv AB + AC$ $\qquad (B + C)A \equiv BA + CA$

$A(B \quad C) \equiv AB \quad AC$ $\qquad (B \quad C)A \equiv BA \quad CA$

$(A + B)(X + Y) \equiv A(X + Y) + B(X + Y) \equiv AX + AY + BX + BY$

Exercício resolvido

1 Efetue o produto dos polinômios $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 3x \quad 2$ e $D(x) = x^2 + 5x \quad 1$

Resolução:

$(x^3 + 4x^2 + 3x \quad 2)(x^2 + 5x \quad 1) =$
$= x^3(x^2 + 5x \quad 1) + 4x^2(x^2 + 5x \quad 1) +$
$+ 3x(x^2 + 5x \quad 1) \quad 2(x^2 + 5x \quad 1) =$
$= x^5 + 5x^4 \quad x^3 + 4x^4 + 20x^3 \quad 4x^2 + 3x^3 +$
$+ 15x^2 \quad 3x \quad 2x^2 \quad 10x + 2 =$
$= x^5 + 9x^4 + 22x^3 + 9x^2 - 13x + 2$

Além da propriedade distributiva, os produtos notáveis e a fatoração algébrica são técnicas de formação de iden tidades matemáticas A relação entre os produtos notáveis e a fatoração é dual, e se comporta como uma via de mão dupla, em que há situações nas quais é necessário expan dir os fatores e outras em que é necessário condensá los

Produtos notáveis

Ao longo dos desenvolvimentos algébricos notamos que alguns produtos são mais frequentes e seguem uma lei de formação que dispensa a aplicação da regra ordinária da multiplicação entre polinômios (distributiva).

Esses produtos são denominados produtos notáveis e apresentam importância significativa em identidades de grandiosa aplicação na álgebra

Para melhor compreensão, vamos dividi-los em casos:

1º Caso: Quadrado de uma soma

$$(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

"O quadrado de uma soma entre dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo"

Também é possível manipular os produtos notáveis para criar novas identidades algébricas bastante úteis para a resolução de certas questões, como a identidade que relaciona a soma dos quadrados com o quadrado da soma:

$$A^2+B^2\equiv(A+B)^2\quad 2AB$$
$$A^2+B^2+C^2\equiv(A+B+C)^2-2(AB+AC+BC)$$

"A soma dos quadrados equivale ao quadrado da soma, menos o dobro da soma dos produtos."

Exemplos:

- $(3x+y)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot y+y^2=9x^2+6xy+y^2$
- $\left(\frac{3a}{2}+b^2\right)^2=\left(\frac{3a}{2}\right)^2+2\cdot\frac{3a}{2}\cdot b^2+\left(b^2\right)^2=\frac{9a^2}{4}+3ab^2+b^4$
- $\left(\frac{3m^2}{5}+\frac{5n^3}{2}\right)^2=\left(\frac{3m^2}{5}\right)^2+2\cdot\frac{3m^2}{5}\cdot\frac{5n^3}{2}+$
  $+\left(\frac{5n^3}{2}\right)^2=\frac{9m^4}{25}+3m^2n^3+\frac{25n^6}{4}$

2º Caso: Quadrado de uma diferença

$$(a\quad b)\cdot(a\quad b)=a^2\quad ab\quad ab\quad b^2$$

$$(a\quad b)^2=a^2\quad 2ab\quad b^2$$

"O quadrado de uma diferença entre dois termos é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo"

Exemplos:

- $(x\quad 5y)^2=x^2\cdot\quad 2\quad x\quad 5y\quad(5y)^2=x^2\quad 10xy\quad 25y^2$
- $\left(\frac{a}{2}\quad\frac{2b^3}{3}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\quad\cdot 2\quad\frac{a}{2}\quad\frac{2b^3}{3}\quad\left(\frac{2b^3}{3}\right)^2=$
  $=\frac{a^2}{}\quad\frac{2ab^3}{3}+\frac{4b^6}{9}$
- $\left(-7+3x^2\right)^2=\left(3x^2-7\right)^2=\left(3x^2\right)^2-$
  $\cdot\quad 2\quad 3x^2\quad 7=\quad 7^2\quad 9x^4\quad 42x^2\quad 49$

Atenção: $(-x-y)^2=\left[-(x+y)\right]^2=(-1)^2\cdot(x+y)^2=(x+y)^2$

3º Caso: Produto da soma pela diferença

$$(a+b)\cdot(a\quad b)=a^2\quad ab+ab\quad b^2$$

$$(a+b)\cdot(a\quad b)=a^2\quad b^2$$

"O produto da soma de dois termos pela diferença entre eles é igual ao quadrado do primeiro, menos o quadrado do segundo termo"

Exemplos:

- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $\left(\frac{a^3b}{3}-\frac{1}{a^4}\right)\cdot\left(\frac{a^3b}{3}+\frac{1}{a^4}\right)=\left(\frac{a^3b}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{a^4}\right)^2=\frac{a^6b^2}{9}-\frac{1}{a^8}$
- $\left(\frac{m}{5}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{m}{5}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{m}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{m^2}{25}-\frac{1}{4}$

4º Caso: Produto de Stevin

$$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+bx+ax+ab$$

$$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

"O produto de dois binômios cujos primeiros termos são iguais e os segundos termos desiguais, é igual a um trinômio completo do 2º grau em que o coeficiente do primeiro termo é a unidade, o coeficiente do segundo termo é a soma algébrica dos termos desiguais e o terceiro termo é o produto dos termos desiguais."

Exemplos:

- $(x+2)\cdot(x+3)=x^2+(2+3)x+2\cdot 3=x^2+5x+6$
- $(a+7)\cdot(a-1)=a^2+(7-1)a+7\cdot(-1)=a^2+6a-7$
- $(m\quad 12)\cdot(m+2)=m^2+(-12+2)m+(-12)\cdot 2=$
  $10m\quad 2\quad m-\quad 4$

5º Caso: Cubo da soma de dois termos

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)=(a+b)\cdot\left(a^2+2ab+b^2\right)=$$
$$=a^3+\quad 2a^2b+ab^2+a^2b+\quad ab^2+b^3$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

"O cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro, mais três vezes o quadrado do primeiro vezes o segundo, mais três vezes o primeiro vezes o quadrado do se gundo, mais o cubo do segundo."

Exemplos:

- $(x+2y)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot(2y)+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3=$
  $=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$
- $\left(5a+c^2\right)^3=(5a)^3+3\cdot(5a)^2\cdot c^2+3\cdot(5a)\cdot\left(c^2\right)^2+\left(c^2\right)^3=$
  $=125c\quad+75\quad\quad+15ac^4+c^6$

Observação: O cubo da soma de dois termos equivale à soma dos cubos mais o triplo do produto desses termos vezes a soma deles

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3 \cdot A \cdot B \cdot (A+B)$$

6º Caso: Cubo da diferença de dois termos

$$(a\quad b)\cdot(a\quad b)\cdot(a\quad b) = (a\quad b)\cdot\left(a^2\quad +2ab\quad b^2\right) =$$

$$= a^2\quad + a^2 b + ab\quad a\ b\quad ab\quad b^3$$

$$(a\quad b)^3 = a^3\quad 3a^2b + 3ab^2\quad b^3$$

"O cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro, menos três vezes o quadrado do primeiro vezes o segundo, mais três vezes o primeiro vezes o quadrado do segundo, menos o cubo do segundo."

Observação: O cubo da diferença de dois termos equivale à diferença dos cubos menos o triplo do produto vezes a diferença desses termos

$$(A\quad B)^3 = A^3 \cdot B^3\quad \cdot 3\ A\ B\ (A\quad B)$$

Exemplos:

- $(2x\quad y)^3 = (2x)^3\quad \cdot 3\ (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2\quad y^3 =$
  $= y8\ ^2 x y 12^3\ y + 6\quad -$
- $\left(3a^2 - 2b\right)^3 = \left(3a^2\right)^3 - 3 \cdot \left(3a^2\right)^2 \cdot (2b) + 3 \cdot \left(3a^2\right) \cdot (2b)^2 + (2b)^3 =$
  $= 27a^6 - 54a^4b + 36a^2b^2 - 8b^3$

! Atenção

O triângulo de Pascal

Podemos usar a estrutura das combinações para deduzir a sequência dos coeficientes do desenvolvimento geral da expressão $(a + b)^n$ quando n é natural. Essas sequências de coeficientes coincidem com os valores das combinações presentes nas linhas do triângulo de Pascal. É o caso da relação de Stieffel (a ser estudada mais detalhadamente no momento apropriado), que diz que todo elemento do triângulo ou é unitário ou pode ser obtido pela soma do termo que se situa acima dele e seu antecessor:

$$(a+b)^0 \equiv 1$$
$$(a+b)^1 \equiv 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 \equiv 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 \equiv 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1ab^3$$
$$(a+b)^4 \equiv 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$
$$(a+b)^5 \equiv 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

Alguns dos principais casos de fatoração consistem na simples leitura dos produtos notáveis no sentido oposto ao apresentado, ou seja, do segundo membro para o primeiro membro. O trânsito entre as formas fatorada e distribuída de uma identidade algébrica permite resolver equações, estruturar funções e, principalmente, responder a um teste de forma rápida e correta

7º Caso: Quadrado do trinômio

$$(a+b+c)\cdot(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

"O quadrado de um trinômio é igual à soma dos quadrados de cada termo, mais os duplos produtos dos termos considerados dois a dois."

Exemplos:

- $(x+y+3z)^2 = x^2 + y^2 + (3z)^2 + 2 \cdot x \cdot y +$
  $+ 2 \cdot x \cdot 3z + 2 \cdot y \cdot 3z =$
  $= x^2 + y^2 + 9z^2 +$
  $+ 2xy + 6xz + 6yz$
- $\left(a^2 + 5b^3 + 2c\right)^2 = \left(a^2\right)^2 + \left(5b^3\right)^2 + (2c)^2 +$
  $+ 2 \cdot a^2 \cdot 5b^3 + 2 \cdot a^2 \cdot 2c + 2 \cdot 5b^3 \cdot 2c =$
  $= a^4 + 25b^6 + 4c^2 + 10a^2b^3 + 4a^2c + 20b^3c$

Saiba mais

O produto de dois polinômios, cujos termos diferem somente nos sinais, equivale ao produto da soma pela diferença de dois termos (3º caso). Para isso, deve-se tomar como primeiro termo, a soma dos termo que têm os mesmos sinais em ambos os polinômios, e como segundo termo aquele com sinais contrários em cada polinômio

Exemplos:

- $(x+y+z)\cdot(x+y-z) = \left[(x+y)+z\right]\cdot\left[(x+y)-z\right] =$
  $= (x+y)^2 - z^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$
- $\left(m^2 + 5mn - 3n^2\right)\cdot\left(m^2 - 5mn + 3n^2\right) =$
  $= \left[m^2 + \left(5mn - 3n^2\right)\right]\cdot\left[m^2 - \left(5mn - 3n^2\right)\right] =$
  $= \left(m^2\right)^2\quad \left(5mn\quad 3n^2\right)^2 = m^4\quad 25m^2n^2 + 30mn^3\quad 9n^4$

! Atenção

Nós abordamos os casos principais e necessários dos produtos notáveis.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$
$$(x + a) \cdot (x\quad b) = x^2 + (a + b)x + ab$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Saiba mais

Polinômio canônico

Chamamos de canônico o polinômio de grau n na variável x cujos coeficientes são todos unitários:

$$\phi_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1$$

Assim, $\phi_1(x) = x + 1$, $\phi_2(x) = x^2 + x + 1$, $\phi_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e assim por diante. Há duas propriedades relevantes em relação a este polinômio que caracterizam produtos notáveis: a primeira diz respeito ao quadrado de $\phi(x)$, que resulta num polinômio palíndromo ou recíproco de coeficientes inteiros e consecutivos.

$$(x+1)^2 \equiv 1x^2 + 2x + 1$$

$$(x^2+x+1)^2 \equiv 1x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$(x^3+x^2+x+1)^2 \equiv 1x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Mas é a segunda dessas propriedades que mais nos interessa, pois ela estrutura a expressão da soma dos termos de uma Progressão Geométrica (PG). Afinal os termos de um polinômio canônico formam uma PG de razão x

Quando multiplicamos $\phi_n(x)$ por $(x - 1)$, obtemos um simples binômio de grau n + 1 e termo independente –1.

$$(x-1)\cdot(x+1) \equiv x^2 - 1$$

$$(x-1)\cdot(x^2+x+1) \equiv x^3 - 1$$

$$(x-1)\cdot(x^3+x^2+x+1) \equiv x^4 - 1$$

$$(x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1) \equiv x^5 - 1$$

$$(x-1)\cdot(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) \equiv x^6 - 1$$

$$(x-1)\cdot\phi_n(x) \equiv x^{n+1} - 1$$

Produtos notáveis e racionalização

Além do tempo ganho no desenvolvimento de expressões, os produtos notáveis são de grande utilidade na racionalização de denominadores no estudo dos números irracionais.

Quando o denominador da expressão a ser racionalizada tem a forma de um binômio $\left(A\sqrt{B} \pm C\sqrt{D}\right)$ em que os dois termos ou, pelo menos um deles, é um radical de índice 2, seu fator racionalizante se baseia no produto notável $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

Exemplos:

- O fator racionalizante de $\sqrt{7}+2$ é $\sqrt{7}-2$, pois $\left(\sqrt{7}+2\right)\cdot\left(\sqrt{7}-2\right) = 7 - 4 = 3$.
- O fator racionalizante de $5-3\sqrt{2}$ é $5+3\sqrt{2}$, pois $\left(5+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(5-3\sqrt{2}\right) = 25 - 18 = 7$.
- O fator racionalizante de $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ é $\sqrt{3+\sqrt{5}}$, pois $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$.

Para racionalizar os denominadores de frações irracionais, basta que se multiplique tanto o numerador quanto o denominador pelo fator racionalizante. Observe:

- $\dfrac{3}{5-\sqrt{7}} = \dfrac{3\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)}{\left(5-\sqrt{7}\right)\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)} = \dfrac{3\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)}{25-7} = \dfrac{3\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)}{18} = \dfrac{5+\sqrt{7}}{6}$
- $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{4\sqrt{6}-12}{2-3} = \dfrac{4\cdot\left(\sqrt{6}-3\right)}{-1} = 4\cdot\left(3-\sqrt{6}\right)$
- $\dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{4-3}} = \dfrac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{1} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
- $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} = \dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)} = \dfrac{3\sqrt{5}-6+5-2\sqrt{5}}{5-4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{1} = \sqrt{5}-1$

Atribuições algébricas

A mudança de variável também é indicada por uma relação de equivalência que apresenta todas as características de uma identidade com mais de uma variável, mas transmite uma ideia bem diferente. Enquanto as identidades expressam fatos descobertos ao longo do estudo da Matemática, uma atribuição representa uma imposição momentânea que será verdadeira apenas durante a execução do processo algébrico desenvolvido a partir de sua declaração.

Atribuições matemáticas devem ser declaradas: "*... então, fazendo* $y = \sqrt{x-1}$, *temos ...*". Elas servem para informar a relação entre a nova variável e a atual.

A relação $y = \sqrt{x-1}$ garante que conheceremos o valor de y sempre que soubermos o valor de x e este for no mínimo 1. Em outras palavras, ela expressa y em função de x para $x \geq 1$ (que é a condição de existência do segundo membro). A mesma relação pode ser escrita com x em função de y na forma $x = y^2 + 1$ com $y \geq 0$

Essas atribuições surgem, na maioria das vezes, para reduzir a quantidade de símbolos usados numa sentença matemática. Quando se deseja resolver a equação $x + \sqrt{x-1} = 13$, por exemplo, associada à relação entre x e y imposta anteriormente, é gerada a sentença $y^2 + 1 + y = 13$, ou seja, $y^2 + y - 12 = 0$ que implica $y = 3$ ou $y = -4$. Mas como $y \geq 0$, temos que $y = 3$.

O grande risco que corremos quando efetuamos mudanças de variável nos processos algébricos, é tomar os valores das variáveis criadas como sendo as soluções do problema. Nesse caso, a solução do problema não é o número 3, mas sim o número 10.

Verifique como ficam expressas as equações $y^3 - 3y^2 + y - 2 = 0$ e $y^3 - 3y^2 - 3y - 4 = 0$ se trocarmos a variável y pela expressão $x + 1$

Fatoração

Fatorar significa escrever na forma de produto e é uma tarefa que pode ser mais trabalhosa do que a simples execução da propriedade distributiva ou de um produto notável

Em muitos momentos se faz necessário a decomposição de um polinômio e, para isso, existem alguns processos que abordaremos como **casos**. A maioria desses casos se apoia em identidades decorrentes dos produtos notáveis que estudamos anteriormente

1º Caso: Fator comum

Esse processo é usado quando a expressão a ser fatorada apresenta um fator comum a todos os seus termos.

$$ax + ay = a(x + y)$$

Perceba que o fator comum (a) é colocado em evidência e cada termo da expressão é dividido por ele, gerando o outro fator (x + y).

Por exemplo, acompanhe a fatoração de cada expressão a seguir, colocando em evidência seu fator comum:

a) $3a^2 = 2ab \quad a(3a \quad 2b)$

b) $2x^3y + 8x^2y^4 - 6x^4y^3z = 2x^2y\left(x + 4y^3 - 3x^2y^2z\right)$

c) $6m^5n^2 \quad + 10m^3n^3 \quad 2m^2n^2 = 2m^2n^2\left(3m^3 \quad 5mn + 1\right)$

d) $(x + y)\cdot z - (x + y)\cdot w = (x + y)\cdot(z - w)$

2º Caso: Agrupamento

Esse processo é utilizado quando a expressão a ser fatorada apresenta grupos de termos que possuem fatores comuns

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

Perceba que inicialmente agrupamos os termos que possuíam fatores comuns e em seguida, em cada um desses grupos, colocamos o fator comum em evidência

Por exemplo, acompanhe a fatoração de cada expres são a seguir:

a) $x^2 + 5x + ax + 5a = x(x + 5) + a(x + 5) = (x + 5)(x + a)$

b) $6x^2 + 2xy - 3xz - yz = 2x(3x + y) - \; z(3x + y) =$
$= (3x + y)(2x \quad z)$

c) $a^3 - 3a^2 - 8a + 24 = a^2(a - 3) - 8(a - 3) = (a - 3)\left(a^2 - 8\right)$

3º Caso: Diferença de quadrados

Esse processo é utilizado quando a expressão a ser fatorada se apresenta sob a forma de uma diferença entre dois quadrados.

$$a^2 - b^2 = (a + b)\cdot(a - b)$$

Perceba que a expressão pode ser decomposta no produto da soma pela diferença das raízes dos dois termos quadrados.

Por exemplo, acompanhe a fatoração de cada expressão a seguir:

a) $x^2 \; = y^2 \; + (x \quad y)\cdot(x \quad y)$

b) $m^2 - 9 = (m + 3)\cdot(m - 3)$

c) $4a^2b^2 \; = 9c^2d^2 + (2ab \quad 3cd)\cdot(2ab \quad 3cd)$

d) $25x^2 - 1 = (5x + 1)\cdot(5x - 1)$

e) $x^2 \quad (y \quad z)^2 = [x + (y \quad z)]\cdot[x \quad (y \quad z)] =$
$= (\quad + y \quad z)\cdot(x \; + y \quad z)$

4º Caso: Trinômio Quadrado Perfeito (T.Q.P.)

Esse processo é utilizado quando a expressão a ser fatorada se apresenta com dois termos quadrados e o terceiro como um duplo produto das raízes dos termos quadrados.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{ou} \quad a^2 \; + 2ab = b^2 \quad (a \quad b)^2$$

Perceba que o trinômio pode ser decomposto no qua drado da soma ou da diferença das raízes conforme o sinal do duplo produto

Por exemplo, acompanhe a fatoração de cada expres são a seguir:

a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

b) $x^2 + 49 \; = 14x \quad (x \quad 7)^2$

c) $a^2 \; + 2a = 1 \quad (a \quad 1)^2$

d) $y^4 + 10xy^2 + 25x^2 = \left(y^2 + 5x\right)^2$

e) $x^2 \quad \frac{1}{36} + \frac{x}{3} = +\left(x^2 \quad \frac{x}{3} \quad \frac{1}{36}\right) = \left(x \quad \frac{1}{6}\right)^2$

Exercício resolvido

2 Fuvest As soluções da equação $\frac{x - a}{x + a} + \frac{x + a}{x \quad a} = \frac{2\left(a^4 + 1\right)}{a^2\left(x^2 \quad a^2\right)}$, onde $a \neq 0$, $a \neq 1$ e $a \neq \quad 1$, são:

A $\frac{-a}{2}$ e $\frac{a}{4}$

B $\frac{-a}{4}$ e $\frac{a}{4}$

C $\frac{1}{2a}$ e $\frac{1}{2a}$

D $\frac{-1}{a}$ e $\frac{1}{2a}$

E $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{a}$

FRENTE 2

Resolução:

$$\frac{x-a}{x+a}+\frac{x+a}{x-a}=\frac{2\left(a^4+1\right)}{a^2\left(x^2-a^2\right)}$$

$$\frac{(x-a)^2+(x+a)^2}{(x+a)\cdot(x-a)}=\frac{2\left(a^4+1\right)}{a^2\left(x^2-a^2\right)}$$

$$\frac{x^2-\cancel{2ax}+a^2+x^2+\cancel{2ax}+a^2}{x^2-a^2}=\frac{2\left(a^4+1\right)}{a^2\left(x^2-a^2\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+a^2+x^2+a^2}{\cancel{x^2-a^2}}=\frac{2\left(a^4+1\right)}{a^2\left(\cancel{x^2-a^2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2\cdot\left(2x^2+2a^2\right)=2\left(a^4+1\right) \Leftrightarrow 2a^2x^2+2a^4=2a^4+2 \Leftrightarrow$$

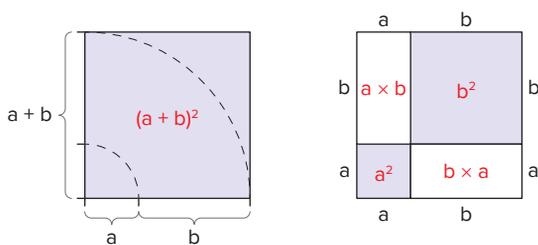
$$\Leftrightarrow 2a^2x^2=2 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{a^2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\pm\frac{1}{a} \quad \therefore S=\left\{\pm\frac{1}{a}\right\}$$

Alternativa: E

! Atenção

No período da Renascença, os matemáticos europeus não dispunham de uma notação algébrica eficiente para descrever as sentenças matemáticas, isso era feito através de versos ou ladainhas ritmadas. Até hoje esse recurso é usado para facilitar a memorização de identidades. A expressão resultante de $(a + b)^2$, por exemplo, é bastante conhecida, numa versão informal, como "*O quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo*".

Uma versão em linguagem formal dessa identidade seria "*O quadrado da soma de dois números equivale à soma dos seus quadrados mais o dobro do produto desses números*".

A mesma identidade pode ser ilustrada por meio de uma interpretação geométrica, construindo-se um quadrado cujo lado é formado pela soma das medidas de dois segmentos **a** e **b**, e verificando-se que nele cabem um quadrado de lado **a**, um quadrado de lado **b** e dois retângulos de lados **a** e **b**.

5º Caso: Trinômio do 2º grau

Esse processo é usado quando a expressão a ser fatorada se apresenta sob a forma de um trinômio completo do 2º grau, onde, quando ordenados em potências decrescentes da variável, o coeficiente do 1º termo é a unidade e o coeficiente do 2º termo é a soma de duas quantidades, cujo produto é o 3º termo.

$$x^2+\left(r_1+r_2\right)\cdot x+r_1\cdot r_2 \equiv \left(x+r_1\right)\cdot\left(x+r_2\right)$$

Perceba que o trinômio pode ser decomposto num produto de dois binômios onde r_1 e r_2 **são as raízes da equação do 2º grau em que** podemos transformar o trinômio do 2º grau.

Por exemplo, acompanhe as fatorações das expressões a seguir:

a) $x^2-5x+6 \equiv (x-2)\cdot(x-3)$

b) $x^2+5x-6 \equiv (x-1)\cdot(x+6)$

c) $y^2+8y+12 \equiv (y+2)\cdot(y+6)$

d) $z^2-8z+15 \equiv (z-3)\cdot(z-5)$

6º Caso: Soma ou diferença entre dois cubos

É o processo usado quando a expressão a ser fatorada se apresenta sob a forma da soma de dois cubos ou sob a forma da diferença entre dois cubos.

$$a^3+b^3 \equiv (a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right) \quad \text{ou}$$
$$a^3-b^3 \equiv (a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$$

Perceba que a expressão pode ser decomposta num produto de dois fatores, onde o 1º é um binômio com as raízes cúbicas e o segundo é um trinômio com o quadrado da 1ª raiz, o produto da 1ª pela 2ª raiz, mais o quadrado da 2ª raiz.

Por exemplo, acompanhe as fatorações das expressões a seguir:

a) $8k^3+27 \equiv (2k+3)\cdot\left(4k^2-6k+9\right)$

b) $x^3-8 \equiv (x-2)\cdot\left(x^2+2x+4\right)$

c) $27a^3+125b^3 \equiv (3a+5b)\cdot\left(9a^2-15ab+25b^2\right)$

d) $\frac{m^3}{8}-\frac{n^3}{64} \equiv \left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\cdot\left(\frac{m^2}{4}+\frac{m\cdot n}{8}+\frac{n^2}{16}\right)$

Adequando um caso de fatoração

Quando nenhum dos casos pode ser aplicado, é possível empregar manipulações algébricas para que a expressão obedeça a algum dos casos de fatoração. No 1º exemplo usaremos o artifício que chamamos de "completar o quadrado" e, no 2º exemplo, vamos evidenciar um fator que não é comum.

Exemplo 1: Fatorar a expressão $x^4 + 4x^2 + 3$.

Se, em vez de 3 tivéssemos 4, a expressão seria um trinômio quadrado perfeito, então vamos "somar e subtrair 1" da expressão para que a mesma não se altere:

$$x^4+4x^2+3+1-1=\underbrace{x^4+4x^2+4}_{\text{T.Q.P.}}-1=\underbrace{\left(x^2+2\right)^2-1}_{\text{Diferença de quadrados}}=$$

$$=\left[\left(x^2+2\right)+1\right]\cdot\left[\left(x^2+2\right)-1\right]=\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)$$

Exemplo 2: Fatorar a expressão $x^4+2x^3y-3x^2y^2-4xy^3-y^4$

Colocando y^4 em evidência, temos:

$$x^4+2x^3y-3x^2y^2-4xy^3-y^4$$
$$=y^4\cdot\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{2x^3y}{y^4}-\frac{3x^2y^2}{y^4}-\frac{4xy^3}{y^4}-\frac{y^4}{y^4}\right)=$$
$$=y^4\cdot\left(\frac{x^4}{y^4}+2\frac{x^3}{y^3}-3\frac{x^2}{y^2}-4\frac{x}{y}-1\right)$$

Chamando $\frac{x}{y} = m$, temos:

$$y^4\left(m^4 + 2m^3 \quad 3m^2 \quad 4m \quad 1\right) =$$
$$= y^4\left[\left(m^4 \quad m^3 \quad m^2\right) + \left(3m^3 \quad 3m^2 \quad 3m\right) + \left(m^2 \quad m \quad 1\right)\right] =$$
$$= y^4\left[m^2\left(m^2 \quad m \quad 1\right) + 3m\left(m^2 \quad m \quad 1\right) + 1\left(m^2 \quad m \quad 1\right)\right] =$$
$$= y^4\left(m^2 - m - 1\right)\cdot\left(m^2 + 3m + 1\right)$$

Voltando com $m = \frac{x}{y}$, temos:

$$y^4\left(\frac{x^2}{y^2} \quad \frac{x}{y} \quad 1\right)\cdot\left(\frac{x^2}{y^2} + 3\frac{x}{y} + 1\right) =$$
$$= y^2\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 1\right).\,y^2\left(\frac{x^2}{y^2} + 3\frac{x}{y} + 1\right) =$$
$$= \left(x^2 \quad xy \quad y^2\right)\cdot\left(x^2 + 3xy + y^2\right)$$

! Atenção

Nós abordamos os casos principais e necessários dos produtos notáveis.

$ax + ay \equiv a(x+y)$

$ax + ay + bx + by \equiv a(x+y) + b(x+y) \equiv (x+y)(a+b)$

$a^2 - b^2 \equiv (a+b)(a-b)$

$a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a+b)^2$ ou $a^2 \quad 2ab \equiv b^2 \quad (a \quad b)^2$

$x^2 + (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2 \equiv (x + r_1)(x + r_2)$

$a^3 + b^3 \equiv (a+b)\left(a^2 \quad ab \quad b^2\right)$ ou $a^3 \quad b^3 \quad (a \quad b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

Equações recíprocas

Uma equação é chamada de recíproca quando for igual a sua transformada recíproca, isto é, se x_1 é uma de suas raízes, então $\frac{1}{x_1}$ também o será.

Dada a equação $x^4 \quad 3x^3 \quad 7x^2 \quad 3x \quad 1 \quad 0$, sua transformada recíproca é $\left(\frac{1}{y}\right)^4 \quad 3\left(\frac{1}{y}\right)^3 + 7\left(\frac{1}{y}\right)^2 \quad 3\left(\frac{1}{y}\right) + 1 = 0$ ou $y^4 \quad 3y^3 \quad 7y^2 \quad 3y \quad 1 \quad 0$, que é a mesma equação da qual se partiu

A primeira vista, pode parecer que nas equações recíprocas os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos devem ser iguais. Contudo, nem sempre isso ocorre, pois também são recíprocas equações do tipo: $x^5 \quad 3x^4 \quad 6x^3 = 6x^2 \quad 3x \quad 1 \quad 0$.

E como é resolvido esse tipo de equação recíproca?

Vejamos um exemplo que ilustra o método de solução:

Seja a equação $4x^4 \quad 5x^3 + 7x^2 \quad 5x + 4 = 0$

Dividindo-a por $x^2 \neq 0$, tem-se $4x^2 \quad 5x + 7 \quad \frac{5}{x} \quad \frac{4}{x^2} \quad 0$

Seja $x + \frac{1}{x} = y$. Portanto, $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 \quad 2$

De modo que:

$$4x^2 - 5x + 7 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + \frac{4}{x^2} - 5x - \frac{5}{x} + 7 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\left(y^2 - 2\right) - 5y + 7 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 5y - 1 = 0 \quad \therefore$$
$$\therefore \quad y = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{8}$$

Assim, $x + \frac{1}{x} = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{8} \therefore x^2 - \left(\frac{5 \pm \sqrt{41}}{8}\right)x + 1 = 0$ de onde resultam as 4 raízes procuradas.

Problemas do 1º e 2º graus

Na sequência estudaremos a resolução desses problemas, porém, antes de transformarmos as frases em números, explanaremos as equações e seus elementos.

Equação algébrica

Chama-se de equação uma sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. São equações:

$5y - 3 = 7$ $\qquad$ $3x^2 - 5x - 2 = 0$ $\qquad$ $3^x = 5$

Observação: Numa equação, tudo que antecede o sinal de igualdade é denominado 1º membro e tudo que sucede o sinal de igualdade é denominado 2º membro Assim, na equação $2x \quad 3 = 5$ temos que $2x \quad 3$ é o 1º membro e 5 é o 2º membro.

Saiba mais

A incógnita de uma equação é o **ÚNICO VALOR** que podemos substituir na mesma para que tenhamos uma sentença verdadeira.

Na equação $x + y = 7$, temos que $x = 1$ e $y = 6$, $x = 4$ e $y = 3$, $x = -2$ e $y = 9$,   , e muitos outros valores x e y tornam a sentença verdadeira Dessa forma, x e y não são incógnitas, mas sim variáveis da equação

Equação do 1º grau

Numa equação do 1º grau temos como forma geral de representação:

$$ax + b = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 1^{\underline{o}} \text{ membro: } ax + b \\ 2^{\underline{o}} \text{ membro: } 0 \\ \text{coeficientes: } a \text{ e } b \; (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}) \\ \text{incógnita: } x \end{cases}$$

Exemplos:

$2x - 5 = 0 \qquad x + 4 = 7 \qquad -7x + 9 = 1 \qquad 32x = 0$

Resolver uma equação corresponde a encontrar o valor de sua incógnita (que chamamos de raiz). No caso das equações do 1º grau, encontraremos de um modo muito simples sua única raiz.

Teoricamente: $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

$\frac{b}{a}$ é a solução da equação do 1º grau

FRENTE 2

Exemplos:

$5x \;\; 10 \;\; 0$	$7x = 4 \;\; 2x$	$2x = 1 \;\; 2$
$5x = 10$	$7x + 2x = 4$	$2x \;\; 1$
$x = \frac{10}{5}$	$9x = 4$	$x = \frac{1}{-2}$
$x = 2$	$x = \frac{4}{9}$	$x = \;\; \frac{1}{2}$

O conjunto solução ou conjunto verdade de uma equação é o conjunto de todos os valores que a tornam uma sentença verdadeira, ou seja, são os números que fazem com que o 1º membro fique igual ao 2º membro.

Como a equação do 1º grau deve admitir uma única raiz, seu conjunto solução será um conjunto unitário. Observe:

$5x - 10 = 0$	$7x = 4 - 2x$	$-2x + 1 = 2$
$S = \{2\}$	$S = \left\{\frac{4}{9}\right\}$	$S = \left\{ \;\; \frac{1}{2}\right\}$

Equações equivalentes

Também chamadas de simultâneas, são equações de mesmo grau que admitem o mesmo conjunto solução.

Exemplos:

- $2x \;\; 4 = 0$ e $x \;\; 1 = 1$, pois em ambos os casos o conjunto solução é $S = \{2\}$;
- $7x + 1 = 0$ e $3 = -21x$, pois em ambos os casos o conjunto solução é $S = \left\{-\frac{1}{7}\right\}$.

Casos especiais

Observe a seguir casos que apresentam soluções que merecem destaque, apesar de terem suas resoluções rigorosamente comuns:

$2(x+3) = 6$	$2x + 5 = \frac{4x+10}{2}$	$3x + 1 = 3(x+2)$
$2x + 6 = 6$	$2(2x+5) = 4x + 10$	$3x + 1 = 3x + 6$
$2x = 0$	$4x + 10 = 4x + 10$	$3x \;\; 3x \;\; 6 \;\; 1$
$x = \frac{0}{2}$	$4x - 4x = 10 - 10$	$0x = 5$
$x = 0$	$0x = 0$	$0 = 5$
$S = \{0\}$	$0 = 0$	$S = \varnothing$
	$S = \mathbb{R}$	

Equação do 2º grau

Chamamos de equação do 2º grau, toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$. A incógnita é **x** e os números a, b e c são chamados de coeficientes.

Exemplos:

a) $3x^2 - 5x + 9 = 0$
$\begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 9 \end{cases}$

b) $-2x^2 + 7x = 0$
$\begin{cases} a = -2 \\ b = 7 \\ c = 0 \end{cases}$

c) $x^2 \;\; 4 = 0$
$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = \;\; 4 \end{cases}$

d) $\;\; 7x^2 = 0$
$\begin{cases} a = \;\; 7 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Equações incompletas do 2º grau

Chamamos de equações incompletas as equações cujos coeficientes b e/ou c são iguais a zero

1º caso: b = 0 $\rightarrow$ $ax^2 + c = 0$

Exemplos:

$3x^2 \;\; 12 \;\; 0$	$x^2 + 3 = 0$
$3x^2 = 12$	$x^2 = -3$
$x^2 = 4$	$x \notin \mathbb{R}$
$x = \pm 2$	$S = \varnothing$
$S = \{\pm 2\}$	

Observação: Uma equação do 2º grau incompleta em b, quando tem solução, apresenta raízes opostas (simétricas)

2º caso: c = 0 $\longrightarrow$ $ax^2 + bx = 0$

Exemplos:

$x^2 \;\; 5x \;\; 0$	$-3x^2 - 6x = 0$
$x(x \;\; 5) = 0$	$-3x(x+2) = 0$
$x = 0$ ou	$3x \;\; 0 \;\; x \;\; 0$
$x \;\; 5 \;\; 0$	$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
$x = 5$	$S = \{0, \;\; 2\}$
$S = \{0, 5\}$	

Observação: Uma equação do 2º grau incompleta em c sempre tem solução e uma das raízes é zero.

3º caso: b = c = 0 $\rightarrow$ $ax^2 = 0$

Exemplos:

$5x^2 = 0$	$\frac{7}{3}x^2 \;\; 0$
$x^2 = 0$	$x^2 = 0$
$x = 0$	$x = 0$
$S = \{0\}$	$S = \{0\}$

Observação: Uma equação do 2º grau incompleta em b e c sempre tem solução igual a zero, assim, já fica implícita a correspondência para o caso de $\Delta = 0$. Em casos como esse, com um par de raízes iguais, dizemos que a raiz é de "multiplicidade dois"

Equações completas

Chamamos de equações completas aquelas cujos coeficientes a, b e c são diferentes de zero.

Em qualquer equação do 2º grau podemos optar por formas de resolução. Uma forma de resolver qualquer equação (incompleta ou completa) é através da fórmula a seguir:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c = 0}_{\text{equação do 2º grau}} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \rightarrow \text{Discriminante da equação} \\ x = \frac{\;\; b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{matrix} \nearrow x_1 = \frac{\;\; b \;\; \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \searrow x_2 = \frac{\;\; b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{matrix} \\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ são as raízes da equação} \end{cases}$$

Exemplo: Resolver a equação $3x^2 + x - 2 = 0$.

$$\Delta = 1^2 \cdot 4 \cdot 3 \ (\ 2) = 1 + 24 = 25$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 5}{6} \begin{cases} x_1 = \frac{1 \quad 5}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \\ x_2 = \frac{1 \quad 5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{ \ 1, \frac{2}{3} \right\}$

Discussão de raízes

Podemos dizer qual é o número de raízes reais de uma equação do 2º grau com coeficientes reais, observando o valor do discriminante da equação, assim:

- Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e distintas.
- Se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais (possui duas raízes não reais).
- Se $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais e iguais.

Exemplos:

1. Determine m de modo que a equação $-5x^2 + 7x - \ 3m = 0$ não admita raízes reais.
   Se a equação não deve admitir raízes reais então $\Delta < 0$, logo:
   $7^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-3m) < 0 \Rightarrow 49 - 60m < 0 \Rightarrow$
   $\Rightarrow -60m < -49 \Rightarrow 60m > 49 \Rightarrow m > \frac{49}{60}$
2. Determine o maior valor inteiro de k para que a equação $kx^2 - 6x + 2 = 0$ admita raízes reais.
   Para que a equação admita raízes reais devemos ter $\Delta \geq 0$, logo:
   $(-6)^2 \cdot 4 \ k \cdot 2 \geq 0 \quad 36 \ 8k \geq 0 \geq \quad 8k \quad 36$
   $8k \leq 36 \Rightarrow k \leq \frac{36}{8} \ \therefore \ \leq \frac{9}{2}$

Soma e produto das raízes (relações de Girard)

Numa equação do 2º grau que tenha como coeficientes números reais, podemos demonstrar uma relação existente entre suas raízes e seus coeficientes

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ e sejam as raízes: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Vamos estabelecer as seguintes relações:

- **Soma das raízes:**

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \ \frac{b}{a}$$

- **Produto das raízes:**

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 \ \ b^2 \ \ 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Exemplos:

a) $2x^2 \ 10x = 12 \ \ 0$

Soma: $\frac{(\ 10)}{2} = 5$

Produto: $\frac{12}{2} = 6 \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = 3 \Rightarrow S = \{2, 3\}$

b) $x^2 - \left(\sqrt{3} + \sqrt{7} \right) x + \sqrt{21} = 0$

Soma: $\frac{-\left[-\left(\sqrt{3} + \sqrt{7} \right) \right]}{1} = \sqrt{3} + \sqrt{7}$

Produto: $\frac{\sqrt{21}}{1} = \sqrt{21} \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{7} \Rightarrow S = \left\{ \sqrt{3}, \sqrt{7} \right\}$

Forma fatorada da equação do 2º grau

Chamamos a forma fatorada de uma equação do 2º grau como "trinômio do 2º grau".

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \rightarrow \quad a(x \quad x_1)(x \quad x_2) = 0$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.

Exemplos:

a) $2x^2 \ 10x = 12 \ \ 0$; $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$ — Forma fatorada: $2 \cdot (x \ \ 2)(x \ \ 3)$

b) $5x^2 + 9x - 2 = 0$; $x_1 = \ \ 2$ e $x_2 \ \ \frac{1}{5}$ — Forma fatorada: $5 \cdot (x + 2) \cdot \left(x \ \ \frac{1}{5} \right)$

c) $x^2 \ \ (\sqrt{3} \ \ \sqrt{7}) x + \sqrt{21} = 0$; $x_1 = \sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{7}$ — Forma fatorada: $1 \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{7})$

Equações biquadradas e equações irracionais

Algumas equações podem ser transformadas ou reduzidas a equações do 2º grau. Chamamos de equação biquadrada e de equação irracional, respectivamente, ao 1º e o 2º caso a seguir:

1º caso: $y^4 \quad 3y^2 + 2 = 0$

Chamando $y^2 = m$, temos:

$m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1$ ou $m = 2$

Assim: $\begin{cases} y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Portanto, $S = \left\{ \pm 1, \ \pm\sqrt{2} \right\}$

2º caso: $\sqrt{3x + 4} = x \quad 8$

Elevando ao quadrado ambos os membros:

$3x + 4 = (x \quad 8)^2 \Rightarrow 3x + 4 = x^2 \quad 16x + 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \quad 19x + 60 = 0$

As raízes são $x = 4$ (não convém) ou $x = 15$.

Portanto, $S = \{15\}$.

Passagens da resolução de uma equação

Já vimos que uma equação polinomial de grau *n* admite um conjunto solução com no máximo *n* elementos distintos, qualquer que seja o domínio da variável Esse fato é consequência direta do teorema fundamental da Álgebra, que, embora seja o alicerce de nosso estudo atual, será abordado apenas no final do curso. Por ora, consideraremos tal fato, em toda **passagem** algébrica, prestando atenção à possibilidade de alteração do conjunto solução das sentenças algébricas que usamos para representar uma mesma equação.

Passagens permitidas

São aquelas que não alteram o conjunto solução de uma equação em hipótese alguma:

I. Substituição de uma sentença algébrica por outra idêntica a ela.
Exemplo:

$$\underbrace{x^2 + 6x}_{\text{T.Q.P.}} = \ 9 \ + \underbrace{2(x \quad 1)}_{\text{Distributiva}} \Leftrightarrow S = \{1,8\}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$(x \quad 3)^2 = 2x + 2 \Leftrightarrow S = \{1,8\}$$

II. Adição ou subtração de um mesmo número real ou uma mesma expressão algébrica de domínio real em ambos os termos da equação.
Exemplo:

$$\begin{array}{rcl} x + 3 & = & 7 \quad \not\Leftrightarrow \quad = S \quad \{2\} \\ \underline{+x - 3} & & \underline{-3 + x} \\ 2x + 0 & = & 4 + 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \{2\} \end{array}$$

III. Multiplicar ou dividir ambos os membros de uma equação por um mesmo número real **não nulo**.
Exemplo:

$$\underbrace{2x^2 + 12}_{\div 2} = \underbrace{10x}_{\div 2} \Leftrightarrow S = \{2,3\}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$x^2 + 6 = 5x \Leftrightarrow S = \{2,3\}$$

Passagens proibidas

A divisão por zero não tem significado algébrico ou aritmético e, portanto, não tem propósito. Sua execução gera frequentemente uma contradição matemática.

Se multiplicarmos ambos os membros de uma equação por zero obteremos a sentença fechada 0 = 0, que, embora seja verdadeira, não nos leva à solução de uma equação.

Passagens que exigem cuidado

São aquelas que incrementam certo número limitado de soluções numa equação, mas não eliminam as soluções da equação original.

Quando não pudermos evitá-las, devemos executar as **verificações dos resultados obtidos**, substituindo-os na equação original a fim de excluirmos as respostas indesejadas.

I. Elevar ao quadrado ambos os membros de uma equação.
Exemplos: $x = 3 \Leftrightarrow S = \{3\}$
$x^2 = 9 \Leftrightarrow S = \{\ 3, 3\}$

II. Multiplicar ambos os membros de uma equação por uma expressão algébrica.
Exemplos: $x = 3 \Leftrightarrow S = \{3\}$
$x^2 = 3x \Leftrightarrow S = \{0, 3\}$

A fim de generalizarmos as técnicas de resolução das equações polinomiais de 1º e 2º graus devemos nos acostumar com o conceito de parâmetro. Os parâmetros também são representados por letras que, bem como as variáveis, mascaram constantes numéricas de uma sentença matemática; mas, ao contrário das variáveis, não são os valores dos parâmetros que caracterizam os elementos dos conjuntos solução das equações.

Temos o hábito de representar os parâmetros pelas primeiras letras do alfabeto e as variáveis pelas últimas letras.

Sobre como resolver um problema

Como dito anteriormente, não existe um roteiro que podemos seguir de forma certeira para resolver problemas matemáticos. Porém, vamos destacar alguns passos que podem nos auxiliar a alcançar essa meta.

Inicialmente, devemos praticar a tradução algébrica, que consiste na interpretação de um enunciado em língua portuguesa para a obtenção de uma equação que modele corretamente o problema. Raramente as equações são obtidas nos seus formatos mais simples. Cabe ao interessado dominar as técnicas algébricas que permitem reescrevê-las nos seus formatos ideais.

> O domínio destas técnicas só pode ser alcançado com a prática!

Uma vez feita a tradução algébrica, as variáveis das equações obtidas deverão estar diretamente associadas às incógnitas do problema

I. Recomenda-se um uso mínimo de variáveis. Por exemplo, se um problema menciona três números inteiros consecutivos, não os represente por x, y e z, mas por x – 1, x e x + 1.

II. Recomenda-se também a escolha de variáveis mnemônicas; por exemplo: se um problema trata do número de vacas e do número de galinhas de uma fazenda, não os represente por x e y. Utilize v e g, eliminando, assim, o risco de confundi-los.

III Durante toda a resolução de um determinado proble ma, esteja atento à natureza numérica das variáveis. Por exemplo: o número de filhos de um casal é necessariamente natural; a medida do lado de um polígono pode ser representada por qualquer número real, desde que positivo etc

Uma característica muito importante da descrição em língua portuguesa de uma sucessão de operações matemáticas, é seguir a ordem contrária à qual as operações são executadas. Assim, enquanto o **quadrado da soma** de dois números é $\mathbf{(x + y)^2}$, ou seja, primeiro somamos e depois elevamos ao quadrado, a **soma dos quadrados** de dois números é $\mathbf{x^2 + y^2}$, ou seja, primeiro elevamos ao quadrado cada número para depois executar a adição. Para x e y não nulos temos que:

- A soma dos quadrados dos seus inversos é representada por $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2$.
- O inverso da soma de seus quadrados é representa do por $\frac{1}{x^2 + y^2}$

- O quadrado do inverso de sua soma é representado por $\left(\frac{1}{x+y}\right)^2$.

1º Passo: Compreender o problema.

Qual é a incógnita?
Quais são os dados?
Quais são as condições?

2º Passo: Planejar – conexão entre dados e incógnita.

Já viu esse problema antes?
Já viu algum problema parecido antes?
É possível reformular o problema (ainda que de outra maneira)?

3º Passo: Executar o plano.

Verifique cada passo.
É possível verificar se cada passo está correto?

4º Passo: Verificar a solução encontrada.

É possível verificar o resultado?
É possível usar o resultado num caminho diferente?

Exercícios resolvidos

3 Hoje Chico e Luísa têm, respectivamente, 15 e 4 anos. Daqui a quantos anos a idade de Chico será o dobro da idade de Luísa?

Resolução:

	Hoje	Daqui a x anos
Chico	15	15 + x
Luísa	4	4 + x

Daqui a x anos:

$$15 + x = 2 \cdot (4 + x)$$
$$15 + x = 8 + 2x$$
$$15 \quad 8 = 2x \quad x$$
$$x = 7$$

A idade de Chico será o dobro da de Luísa daqui a 7 anos.

4 Na fazenda de Sérgio há galinhas e coelhos num grande cercado de tela. Sabendo que ao todo nesse cercado tem 120 patas (pés) e 48 animais, quantas galinhas e quantos coelhos o Sérgio possui?

Resolução:

Considerando que cada uma das **g** galinhas tem duas patas e que cada um dos **c** coelhos tem 4, temos:

$$\begin{cases} g + c = 48 \\ 2g + 4c = 120 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos: g = 36 e c = 12
Portanto, o Sérgio possui 36 galinhas e 12 coelhos no cercado.

5 Que horas são quando o tempo que falta para terminar o dia é $\frac{3}{5}$ do tempo que já se passou?

Resolução:

Se agora são x horas, desde meia-noite (0 horas) passaram-se x horas e ainda faltam (24 x) horas para terminar o dia Logo:

$$24 \quad x \Leftrightarrow \frac{3}{5}x = 120 \Leftrightarrow 5x \quad 3x \Rightarrow 120 = 8x \quad x \quad 15$$

Portanto, agora são 15 horas.

6 Num passeio de férias escolares, Cassiano calcula que se gastasse R$ 100,00 por dia poderia permanecer viajando por 4 dias a mais do que se gastasse R$ 140,00 por dia. Com quanto dinheiro Cassiano começou a viagem?

Resolução:

Supondo que Cassiano comece a viagem com x reais e que a viagem dure y dias, temos:

$$\begin{cases} 1^{\circ} \text{ caso: } \frac{x}{y} = 140 \Rightarrow x = 140y \\ 2^{\circ} \text{ caso: } \frac{x}{y+4} = 100 \Rightarrow x = 100y + 400 \end{cases}$$

Logo:

$$140y = 100y + 400$$
$$40y = 400$$
$$y = 10$$

Assim: $x = 140 \quad 10 \Rightarrow x = 1400$

Portanto, Cassiano começou a viagem com R$ 1.400,00.

7 Um número é composto por dois algarismos cuja di ferença é 3 Quando trocada a ordem dos algarismos, o número obtido é $\frac{4}{7}$ do número dado Que número é esse?

Resolução:

Se ao inverter a ordem dos algarismos o número se torna menor que o dado $\left(\frac{4}{7} \text{ do número dado}\right)$, concluímos que o primeiro algarismo é maior que o segundo. Supondo que o primeiro algarismo seja x e o segundo y, podemos escrever que x y = 3 ⇒ ⇒ x = 3 + y e também que $10y + x = \frac{4}{7}(10x + y)$. Dessas igualdades tem-se:

$$\begin{cases} 10y + x = \frac{4}{7}(10x + y) \\ x = 3 + y \end{cases} \Rightarrow 10y + (3 + y) = \frac{4}{7}(10 \cdot (3 + y) + y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11y + 3 = \frac{4}{7}(30 + 11y) \Rightarrow 7(11y + 3) = 4(30 + 11y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 77y + 21 = 120 + 44y \Rightarrow 33y = 99 \Rightarrow y = 3$$

Assim, x = 3 + 3 = 6 e o número dado é 63.

8 Quando seu filho nasceu, Agenor tinha 36 anos. O produto da idade do filho e do pai atualmente é igual ao quádruplo do quadrado da idade do filho. Calcule a idade, hoje, de pai e filho.

Resolução:

Supondo que o filho tenha hoje x anos, Agenor terá (36 + x) anos; logo, se hoje o produto das idades é igual ao quádruplo do quadrado da idade do filho, então:

$x \cdot (36 + x) = 4 \cdot x^2 \Leftrightarrow 36x + x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 \quad 36x = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x - 12) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ (não convém) ou $x = 12$

Agenor tem hoje 48 anos e seu filho tem 12 anos.

9 **Unicamp** Em um restaurante todas as pessoas de um grupo pediram o mesmo prato principal e uma mesma sobremesa. Com o prato principal o grupo gastou R$ 56,00 e com a sobremesa, R$ 35,00. Cada sobremesa custou R$ 3,00 a menos do que o prato principal

a) Encontre o número de pessoas neste grupo
b) Qual é o preço do prato principal?

Resolução:

a) Se o grupo tem n pessoas e x é o preço do prato principal, podemos afirmar que $n = \frac{56}{x}$ ou que $n = \frac{35}{x-3}$, logo: $\frac{56}{x} = \frac{35}{x \quad 3} \Leftrightarrow 56(x-3) = 35x \Leftrightarrow$

$6x = 168 \Rightarrow 35x = 21x \Rightarrow 168 = x \quad 8$

Se x = 8, então $n = \frac{56}{8}$, ou seja, o grupo tem 7 pessoas.

b) Como x = 8, o prato principal custa R$ 8,00.

10 **Enem 2014** Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionando a Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

Valor do kWh (com tributos) × consumo (em kWh) + Cosip

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

A 134,1
B 135,0
C 137,1
D 138,6
E 143,1

Resolução:

Com o consumo de 150 kWh o morador pagará:
$150 \cdot 0,50 + 4,50 =$ R$ 79,50.
Como ele deseja uma redução de 10% no custo, temos que o novo valor deverá ser no máximo de:
79,50 0,9 = R$ 71,55
Perceba que o maior valor pago na terceira faixa de consumo é 140 0,50 + 3,00 = R$ 73,00, ou seja, o morador deverá sair da 4ª faixa de consumo.
Chamando de x um consumo na 3ª faixa que resulta em um custo de R$ 71,55, temos:
$x \cdot 0,5 + 3,00 =$ R$ $71,55 \Rightarrow x = 137,10$
Portanto, o consumo máximo será de 137,1 kWh.
Alternativa: C.

11 **Enem 2018** Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio

Quantos alunos compraram somente um bilhete?

A 34
B 42
C 47
D 48
E 79

Resolução:

Sendo x o número de alunos e y a quantidade de alunos que compraram 3 bilhetes, pode-se concluir que:

$$x = \underbrace{45}_{\text{alunos que compraram 2 bilhetes}} + \underbrace{0,2 \cdot \overbrace{(x+33)}^{\text{total de bilhetes vendidos}}}_{\text{alunos que compraram 1 bilhete}} + \underbrace{y}_{\text{alunos que compraram 3 bilhetes}} + \underbrace{80}_{\text{alunos que não compraram bilhetes}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0,8x - 131,6 \quad (I)$$

$$\underbrace{0,2 \cdot (x+33)}_{\text{quantida de 1 bilhete}} + \underbrace{2 \cdot 45}_{\text{quantidade 2 bilhetes}} + \underbrace{3y}_{\text{quantidade 3 bilhetes}} = \underbrace{x+33}_{\text{total de bilhetes}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y = 0,8x - 63,6 \quad (II)$$

De (I) e (II), tem-se $3(0,8x - 131,6) = 0,8x - 63,6 \Rightarrow$
= 207 lunos

Portanto, o número de alunos que compraram um bilhete é dado por: $0,2 \cdot (207 + 33) = 48$
Alternativa: D.

12 **Insper 2014** Por um terminal de ônibus passam dez diferentes linhas. A mais movimentada delas é a linha 1: quatro em cada sete usuários do terminal viajam nessa linha. Cada uma das demais linhas transporta cerca de 1300 usuários do terminal por dia. Considerando que cada passageiro utiliza uma única linha, a linha 1 transporta por dia cerca de

A 5200 usuários do terminal
B 9100 usuários do terminal.
C 13000 usuários do terminal.
D 15600 usuários do terminal.
E 18200 usuários do terminal

Resolução:

Se $\frac{4}{7}$ dos usuários viajam pela linha 1, $\frac{3}{7}$ viajam pelas demais linhas, logo:

$$\frac{3}{7}\cdot x = 9\cdot 1300 \Rightarrow 3x = 81900 \Rightarrow x = 27300$$

Assim, a linha 1 transporta por dia

$$\frac{4}{7}\cdot 27300 = \frac{109200}{7} = 15600 \text{ passageiros.}$$

Alternativa: D

13 **Unesp** Em uma loja, todos os CDs de uma determinada seção estavam com o mesmo preço, y. Um jovem escolheu, nesta seção, uma quantidade x de CDs, totalizando R$ 60,00.

a) Determine y em função de x.
b) Ao pagar sua compra no caixa, o jovem ganhou, de bonificação, 2 CDs a mais, da mesma seção e, com isso, cada CD ficou R$ 5,00 mais barato. Com quantos CDs o jovem saiu da loja e a que preço saiu realmente cada CD (incluindo os CDs que ganhou)?

Resolução:

a) $x\cdot y = 60 \Rightarrow y = \frac{60}{x}$

b) $(x+2)\cdot(y \quad 5) = 60$

$(x+2)\cdot\left(\frac{60}{x} - 5\right) = 60$

$60 + 5x = \frac{120}{x} \quad 10 \quad 60$

$5x^2 \quad 10x \quad 120 = 0$

$x^2 + 2x - 24 = 0$

Resolvendo a equação obtemos x = –6 (não convém) ou x = 4.
Assim, verificamos que o jovem saiu com 4 + 2 = 6 CDs e cada um custou R$ 60,00 : 6 = R$ 10,00.

Revisando

1 Desenvolva os produtos notáveis:

a) $(5x + 3)^2$

b) $(3a - b^2)^2$

c) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y\right)^2$

d) $(2x \quad 3y \quad 5)^2$

e) $(2a + b)^3$

f) $(3x - 5y)^3$

g) $\left(2m^3 \quad \frac{1}{2}\right)^3$

h) $(3a + 1)\cdot(3a \quad 1)$

i) $\left(\frac{x^2}{3} \quad \frac{y^3}{2}\right)\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^3}{2}\right)$

j) $(x \quad 7) \quad (x \quad 3)$

k) $(y + 2)\cdot(y - 11)$

l) $\left(\frac{1}{2} + x\right)\cdot\left(\frac{1}{4} \quad \frac{x}{2} \quad x^2\right)$

m) $\left(a^3 \quad \frac{b^2}{2}\right)\left(a^6 + \frac{a^3b^2}{2} + \frac{b^4}{4}\right)$

2 Se $x + \frac{1}{x} = \frac{3}{5}$, calcule:

a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

3 **Enem 2018** Em certa página de um livro foi anotada uma senha. Para se descobrir qual é a página, dispõe-se da informação de que a soma dos quadrados dos três números correspondentes à página da senha, à página anterior e à página posterior é igual a um certo número *k* que será informado posteriormente.

Denotando por *n* o número da página da senha, qual é a expressão que relaciona *n* e *k*?

A $3n^2 - 4n = k - 2$

B $3n^2 + 4n = k - 2$

C $3n^2 = k + 2$

D $3n^2 = k - 2$

E $3n^2 = k$

4 Fatore as expressões:

a) $x^2 \quad xy \quad 5x + 5y$

b) $a^2b \quad abm \quad ac + cm$

c) $4x^2 + 9y^2 + 12xy$

d) $1 + \frac{a}{b} \quad \frac{a^2}{4b^2}$

e) $x^2 \quad 4x \quad 45$

f) $y^2 + y - 2$

g) $3x^2 - 11x - 4$

h) $5x^2 + 9x \quad 2$

i) $1 \quad 25x^2$

j) $\frac{x^2}{y^2} \quad \frac{z^2}{81}$

5 Decomponha em 3 fatores: $x^4 - 1$.

6 **Cefet-MG 2019** Considere a expressão

$$M = \frac{x^5y + 2x^4y^2 + x^3y^3}{x^3 + x^3y + x^2y}$$

Se $x + y = \quad 3$ e $xy = 4$, então o valor numérico de M é

A –36 B –3 C 24. D 36.

7 **CP2 2019** Vanessa participará de uma corrida que acontecerá no dia 31 de dezembro de 2018.

No programa elaborado pelo seu treinador, ela deveria correr 6 km todos os dias por um período de *n* dias consecutivos. Desse modo, o treino terminaria 2 dias antes do evento. Vanessa, porém, verificou que, nesse período, planejado inicialmente, não poderia treinar por 4 dias. Então, para compensar, resolveu correr, por dia, 1 km a mais do que o planejado, de modo que a distância total percorrida por ela fosse a mesma, terminando também 2 dias antes do evento.

De acordo com o programa de treinamento de Vanessa, a data em que ela teria de começar a se preparar para a corrida é

A 01/12/2018.
B 02/12/2018.
C 03/12/2018.
D 04/12/2018.

8 Numa árvore pousam pássaros. Se pousarem dois pássaros em cada galho, fica um galho sem pássaros. Se pousar um pássaro, fica um pássaro sem galho. Calcular o número de pássaros.

9 Resolva as equações em ℝ:

a) $x^2 + 7x = 0$

b) $2x^2 - 11x = 0$

c) $x^2 - 36 = 0$

d) $9x^2 + 1 = 0$

e) $x^2 + 2x \quad 15 = 0$

f) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

FRENTE 2

g) $x^2 - 6x + 10 = 0$

h) $x^2 \quad (3 \quad \sqrt{7})x + 3\sqrt{7} = 0$

i) $x^2 \quad (\sqrt{2} \quad \sqrt{5})x + \sqrt{10} = 0$

j) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

k) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

l) $\sqrt{x+4} = x \quad 2$

m) $\sqrt{5 + \sqrt{x+1}} = \sqrt{x}$

10 Para que valores de *t* a equação $x^2 + tx + 4 = 0$ admite raízes reais e iguais?

Exercícios propostos

1 **Fuvest 2016** A igualdade correta para quaisquer a e b, números reais maiores do que zero, é

A $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$

B $\frac{1}{a + \sqrt{a^2 \quad b^2}} = \quad \frac{1}{b}$

C $(\sqrt{a} \quad \sqrt{b})^2 = a \quad b$

D $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

E $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$

2 **ESPM-SP 2018** Se $x^2 = x + 3$, a expressão $x^3 \quad x \quad 3$ é igual a:

A $x^2 \quad 9$
B $x - 6$
C $x^2 - 2x + 1$
D $x^2 + 6x - 1$
E $x^2 + 2x \quad 3$

3 **ESPM 2013** As soluções inteiras da equação $x^2 \quad y^2 = 7$ formam 4 pares ordenados. Esses pares representam, no plano cartesiano, os vértices de um quadrilátero cuja área vale:

A 30
B 48
C 24
D 32
E 36

4 **Uece 2017** Se u, v e w são números reais tais que $u + v + w = 17$, $u \cdot v \cdot w = 135$ e $u \cdot v + u \cdot w + v \cdot w = 87$, então, o valor da soma $\frac{u}{v \cdot w} + \frac{v}{u \cdot w} + \frac{w}{u \cdot v}$ é

A $\frac{23}{27}$.

B $\frac{17}{135}$.

C $\frac{27}{87}$.

D $\frac{16}{27}$

5 Sejam $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e $B = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$: então, A + B é igual a:

A $-2\sqrt{2}$

B $3\sqrt{2}$

C $2\sqrt{3}$

D $3\sqrt{3}$

E $2\sqrt{3}$

6 Fatore:

a) $x^2 + y^2 \quad z^2 \quad 2xy$

b) $x^4 + x^2 + 1$

7 **ITA** Sobre o número $x = \sqrt{7 \quad 4\sqrt{3}} \quad \sqrt{3}$ é correto afir mar que:

A $x \in]0,2[$

B x é racional.

C $\sqrt{2x}$ é irracional

D x^2 é irracional

E $x \in]2,3[$

8 Se x e y são números reais não nulos tais que $xy = \dfrac{x}{y} = x - y$, então o valor de x + y é igual a

A $-\dfrac{3}{2}$

B $\dfrac{1}{2}$

C 0

D $\dfrac{1}{2}$

E $\dfrac{3}{2}$

9 Seja F a forma fatorada irredutível equivalente à expressão algébrica a seguir:

$$\frac{x^2 \cdot (x \quad 1) \quad (x \quad 2)^2 \quad (x \quad 2) \quad (x \quad 1) \quad 1}{x^2 - 1}$$

a) Escreva F.

b) Calcule o valor numérico de F quando x = 2.

10 Considere o conjunto de todos os valores de m e n para os quais a expressão algébrica A, abaixo, está definida.

$$A = \frac{\dfrac{m^2}{n^2} \quad \dfrac{n^2}{m^2}}{\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{2}{m \cdot n} + \dfrac{1}{n^2}} \cdot \frac{(m-n)^{-2}}{(m^2 \quad n^2)^{-1}}$$

Nesse conjunto, uma expressão algébrica equivalente a A é:

A $m^2 + n^2$

B $m^2 - n^2$

C $\dfrac{m^2+n^2}{m^2 \quad n^2}$

D $\dfrac{m^2+n^2}{m-n}$

11 As técnicas de resolução das equações de 3º grau descobertas pelos matemáticos italianos do período da renascença, como Tartáglia e Cardano, eram fundamentadas em identidades de 3º grau.

Tartáglia tinha preferência por uma identidade de 3º grau que relaciona, numa mesma igualdade, o cubo da diferença e a diferença de cubos.

Assinale a alternativa que apresenta uma identidade de 3º grau com estas características:

A $u^3 = + v^3 \quad (u+v)^3 \quad 3uv(u \quad v)$

B $u^3 - v^3 = (u-v)^3 - 3uv(u-v)$

C $(u = v)^3 + \quad 3uv(v \quad u) \quad (u^3 \quad v^3)$

D $(u = v)^3 \quad +3uv + (v \quad u) \quad (u^3 \quad v^3)$

E $+(u \quad v)^3 \quad +3uv(v +^2 \quad u^2) \quad (u^3 \quad v^3)$

12 Fatorando-se completamente o polinômio do quinto grau $x^5 + 10x^4 + 25x^3 + 8x^2 + 80x + 200$ no universo dos números reais, obtemos três fatores de 1º grau e um fator do 2º grau.

Assinale a alternativa que apresenta a afirmação cor reta sobre estes fatores.

A Os três fatores de 1º grau são distintos entre si e o fator do 2º grau é $x^2 \quad 2x + 4$.

B Os três fatores de 1º grau são distintos entre si e o fator do 2º grau é $x^2 + 2x + 4$.

C Há dois fatores de 1º grau idênticos e o fator do 2º grau é $x^2 - 2x + 4$.

D Há dois fatores de 1º grau idênticos e o fator do 2º grau é $x^2 + 2x + 4$.

E Há dois fatores de 1º grau idênticos e o fator do 2º grau é $x^2 - 4x + 4$.

13 Encontre todos os pares (x, y) que solucionam o sistema $\begin{cases} xy^2 = 30 + x^2y \\ x - y = 11 + xy \end{cases}$.

14 Simplificando-se $\dfrac{\dfrac{x}{x \quad 2} + \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{2x^2}{x^2+4} + \dfrac{4x^4}{x^4+16}}{\dfrac{x^4}{x^4 \quad 16}}$ obtém-se:

A $x^4 - \dfrac{16}{x^4}$

B $\dfrac{8x^4}{x^4 \quad 16}$

C $\dfrac{8x^4}{x^4+16}$

D $\dfrac{x^4+16}{8x^4}$

E $x^4 + \dfrac{16}{x^4}$

FRENTE 2

15 Calculando-se $\sqrt[3]{\dfrac{2\,013^2 \quad 1987^2}{13}}$ o resultado obtido deve ser:

A 2
B 20
C 40
D 200
E 400

16 Sendo x um número real diferente de 1, determine qual número real y não pode ser escrito na forma $y = \dfrac{3x - 2\,013}{x \quad 1}$.

A 1
B 3
C 2010
D 2013
E 2016

17 Sabendo que 1 201 é um número primo, qual é a soma de todos os números primos positivos entre 1 e 100 que dividem $7^8 - 1$?

A 10
B 12
C 14
D 16
E 18

18 Se *x* e *y* são números reais positivos tais que $x^2 + y^2 =$ $= 3xy$ então $x^3 + y^3$ é igual a:

A $(xy)^{\frac{3}{2}}$

B $2(xy)^{\frac{2}{3}}$

C $2(xy)^{\frac{3}{2}}$

D $(xy)^{\frac{2}{3}}$

E $3(xy)^{\frac{2}{3}}$

19 Qual é o algarismo das unidades do número $2017^5 - 2017$?

A 6
C 8
E 0
B 7
D 9

20 Se $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b$ e então, $x^3 + y^3$ é igual a:

A $\dfrac{3ab \quad a^3}{2}$

B $\dfrac{ab - a^3}{2}$

C $\dfrac{ab + a^3}{2}$

D $ab + a_3$

E ab

21 Lembrando que os catetos de um triângulo retângulo e isósceles têm a mesma medida, que a soma dos quadrados das medidas dos catetos equivale ao quadrado da medida da hipotenusa e que perímetro significa o comprimento do contorno de uma figura, assinale a alternativa que apresenta a medida, em metros, dos catetos de um triângulo retângulo e isós celes de perímetro 10m.

A $10 \quad 5\sqrt{2}$
B $5 \quad \sqrt{2}$
C $5 + \sqrt{2}$
D $2\sqrt{5}$
E $5\sqrt{2}$

22 **PUC-Rio 2012** O valor da expressão $\left(1+\sqrt{2}\right)^3 + \left(1-\sqrt{2}\right)^3$ é igual a:

A 1
C 8
E 14
B $2\sqrt{2}$
D 10

23 **UPE 2014** Na sequência de quadros a seguir, o valor da primeira célula de cada quadro é a soma dos valores das duas últimas células do quadro anterior.

Se o número da célula central do último quadro dessa sequência é 2^{2013}, quanto vale o produto dos números das duas outras células?

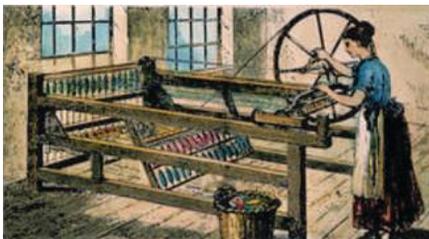
A $2^{2013} - 1$
C 2^{2013+1}
E $2^{4016} - 1$
B $2^{2013} + 1$
D $2^{4016} + 1$

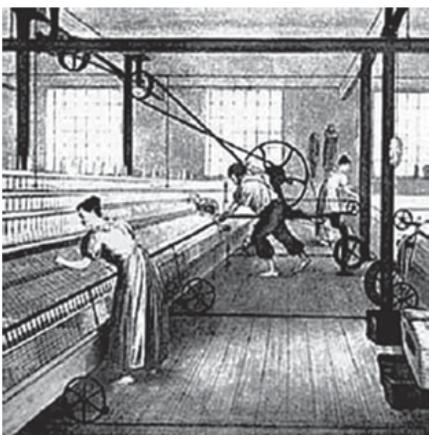
24 **Famerp 2018** Um granjeiro tem estoque de ração para alimentar 420 galinhas por 80 dias. Depois de *x* dias de uso desse estoque, o granjeiro vendeu 70 das 420 galinhas. Com a venda, o restante do estoque de ração durou 12 dias a mais do que esse restante de ração duraria se ele não tivesse vendido as galinhas Supondo que o consumo diário de ração de cada ga linha seja sempre o mesmo, x é igual a

A 20
C 18
E 24.
B 16.
D 22.

25 **Unifesp 2018** Raquel imprimiu um número x de fotografias ao custo unitário de 54 centavos Cada foto foi vendida ao preço de 75 centavos sobrando, no final do período de vendas, y fotografias sem vender, o que resultou em um prejuízo de 12 reais em relação ao custo total das impressões.

a) Calcule quantas fotografias foram impressas, para o caso em que y = 100.
b) Determine a expressão de y em função de x para a situação descrita no enunciado.

26 **UEL 2018** Analise as figuras a seguir e responda à questão

Máquina de tear manual

(Disponível em: <http://cmapspublic2.ihmc.us/rid=1PZQNHNNF L7R6322M31/capitalismo%204.jpg>. Acesso em: 2 maio. 2017.)

Máquina de tear industrial

(Disponível em: <http://www.sohistoria.com.br/resumos/revolucao industrial_clip_image001 jpg>. Acesso em: 2 maio 2017)

Considere que um tear manual produza 20 metros de tecido por hora de funcionamento e que um tear mecânico produza, no mesmo tempo, o dobro. Uma tecelagem britânica substituirá todos os seus teares manuais por mecânicos, adotando a seguinte regra: a cada tear mecânico adquirido, um tear manual é imediatamente descartado, até que o processo de mecanização dessa tecelagem se complete. Com essa regra, o número total C de teares se mantém constante ao longo do processo

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a média de produção dos teares desta tecelagem no instante em que o quociente, do número de teares manuais pelo número total de teares, é R

A 30 metros de tecido por hora de funcionamento

B 30 + 20R metros de tecido por hora de funcionamento

C $R\frac{1}{2}$ metros de tecido por hora de funcionamento

D 40 – 20R metros de tecido por hora de funcionamento

E 30R – 40 metros de tecido por hora de funcionamento

27 **Enem 2017** Chegando ao destino de uma mesma viagem, os turistas X e Y alugarão, cada um deles, um carro. Fizeram, previamente, cotações com as mesmas três locadoras de automóveis da região. Os valores dos aluguéis estão representados pelas expressões dadas no quadro, sendo *k* o número de quilômetros percorridos, e *n* o número de diárias pagas pelo aluguel.

Empresa	Valor cobrado, em real, pelo aluguel do carro
I	$100n + 0{,}8k$
II	$70n + 1{,}2k$
III	$120n + 0{,}6k$

O turista X alugará um carro em uma mesma locadora por três dias e percorrerá 250 km. Já a pessoa Y usará o carro por apenas um dia e percorrerá 120 km. Com o intuito de economizarem com as locações dos carros, e mediante as informações, os turistas X e Y alugarão os carros, respectivamente, nas empresas

A I e II
B I e III
C II e II
D II e III
E III e I

28 Perguntando-se a Guto que idade tem, obteve-se como resposta: se do triplo de minha idade sub trairmos o quíntuplo da idade que tinha há 12 anos, teremos minha idade atual Que idade tem Guto?

29 Um grupo de alunos do curso de mecânica deci diu comprar juntos um torno mecânico para montar uma oficina assim que se formassem. O valor de R$ 3.600,00 seria igualmente dividido por todos. De vido a alguns problemas financeiros, oito alunos que estavam no grupo desistiram, e a parte que cada um do grupo deveria pagar aumentou R$ 75,00. Quantos alunos faziam parte do grupo inicialmente?

A 20 alunos.
B 16 alunos.
C 18 alunos.
D 24 alunos.
E 12 alunos.

30 Uma fábrica utiliza sua frota particular de caminhões para distribuir as 90 toneladas de sua produção semanal. Todos os caminhões são do mesmo modelo e, para aumentar a vida útil da frota, adota-se a política de reduzir a capacidade máxima de carga de cada caminhão em meia tonelada. Com essa medida de redução, o número de caminhões necessários para transportar a produção semanal aumenta em 6 unidades em relação ao número de caminhões necessários para transportar a produção, usando a capacidade máxima de carga de cada caminhão.

Qual o número atual de caminhões que essa fábrica usa para transportar a produção semanal, respeitando-se a política de redução de carga?

A 36
B 30
C 19
D 16
E 10

31 **Fuvest** A soma e o produto das raízes da equação de segundo grau $(4m + 3n)x^2 - 5nx + (m - 2) = 0$ valem, respectivamente, $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{32}$ Então m + n é igual a:

A 9
B 8
C 7
D 6
E 5

32 **Unifei** Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, com a > b, as raízes da equação $x^2 + 6x + \frac{35}{4} = 0$ A equação cujas raízes são $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{3}$ é:

A $4x^2 - 24x + 35 = 0$
B $24x^2 + 58x + 35 = 0$
C $4x^2 - 35x + 24 = 0$
D $24x^2 + 62x + 35 = 0$

33 Dada a equação $(k - 2)x^2 - 2kx + k + 3 = 0$, responda:

a) Para quais valores de k, é uma equação do 2º grau?
b) Para quais valores de k, a equação apresenta raízes reais e iguais?

34 Encontre o valor de m, de modo que a soma e o produto das raízes da equação $(m \quad 2)x^2 \quad 3mx + 1 = 0$ sejam iguais.

35 Calcule o valor de p na equação $x^2 - 7x + p = 0$, de modo que a soma dos inversos das raízes seja $\frac{7}{10}$

36 **Enem 2014** Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:
Recipiente I: 0,125 litro
Recipiente II: 0,250 litro
Recipiente III: 0,320 litro
Recipiente IV: 0,500 litro
Recipiente V: 0,800 litro
O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez
Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

A I
B II
C III
D IV
E V

37 **Enem 2018** Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o finan ciamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.
Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

A 20
B 24
C 29
D 40
E 58

38 **Enem 2018** Um produtor de milho utiliza uma área de 160 hectares para as suas atividades agrícolas. Essa área é dividida em duas partes: uma de 40 hectares, com maior produtividade, e outra, de 120 hectares, com menor produtividade. A produtividade é dada pela razão entre a produção, em tonelada, e a área cultivada Sabe-se que a área de 40 hectares tem produtividade igual a 2,5 vezes à da outra Esse fazendeiro preten de aumentar sua produção total em 15%, aumentando o tamanho da sua propriedade Para tanto, pretende comprar uma parte de uma fazenda vizinha, que possui a mesma produtividade da parte de 120 hectares de suas terras.
Qual é a área mínima, em hectare, que o produtor precisará comprar?

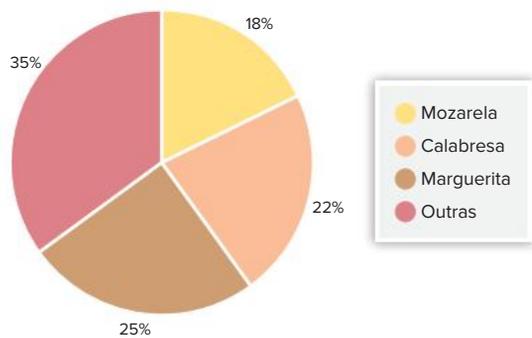
A 36
B 33
C 27
D 24
E 21

39 **Fuvest 2013** Um empreiteiro contratou um servi ço com um grupo de trabalhadores pelo valor de R$ 10.800,00 a serem igualmente divididos entre eles. Como três desistiram do trabalho, o valor contratado foi dividido igualmente entre os demais. Assim, o empreiteiro pagou, a cada um dos trabalhadores que realizaram o serviço, R$ 600,00 além do combinado no acordo original.

a) Quantos trabalhadores realizaram o serviço?
b) Quanto recebeu cada um deles?

40 **Unesp** Segundo a Teoria da Relatividade de Einstein, se um astronauta viajar em uma nave espacial mui to rapidamente em relação a um referencial na Terra, o tempo passará mais devagar para o astronauta do que para as pessoas que ficaram na Terra. Suponha que um pai astronauta, com 30 anos de idade, via je numa nave espacial, numa velocidade constante, até o planeta recém-descoberto GL581c, e deixe na Terra seu filho com 10 anos de idade. O tempo t decorrido na Terra (para o filho) e o tempo T decorrido para o astronauta, em função da velocidade v dessa

viagem (ida e volta, relativamente ao referencial da Terra e desprezando-se aceleração e desaceleração), são dados respectivamente pelas equações $t = \frac{40c}{v}$, $T = \frac{40c}{v}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$, onde c é uma constante que indica a velocidade da luz no vácuo e t e T são medidos em anos Determine, em função de c, a que velocidade o pai deveria viajar de modo que, quando retornasse à Terra, ele e seu filho estivessem com a mesma idade.

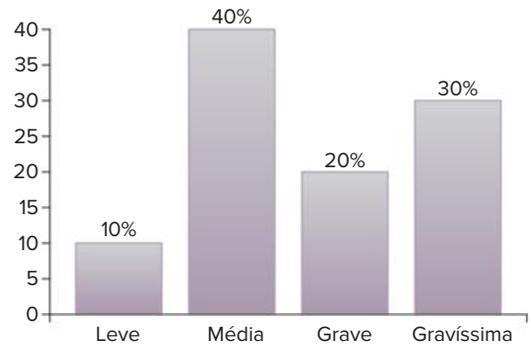
41 **Unicamp 2014** A pizza é, sem dúvida, o alimento preferido de muitos paulistas. Estima-se que o consumo diário no Brasil seja de 1,5 milhão de pizzas, sendo o Estado de São Paulo responsável por 53% desse consumo. O gráfico abaixo exibe a preferência do consumidor paulista em relação aos tipos de pizza.

a) Se não for considerado o consumo do Estado de São Paulo, quantas pizzas são consumidas diariamente no Brasil?
b) Quantas pizzas de mozarela e de calabresa são consumidas diariamente no Estado de São Paulo?

42 **FGV-SP 2014** Uma jarra de limonada contém 500 g de suco puro de limão, 500 g de açúcar e 2 kg de água. Sabe-se que:
- 25 g de suco puro de limão contém 100 calorias;
- 100 g de açúcar contém 386 calorias;
- água não contém calorias.

Nas condições dadas, um copo de 200 g dessa limonada contém quantidade de calorias igual a
A 262
B 223
C 174
D 137
E 129

43 **Unicamp 2015** O Código de Trânsito Brasileiro classifica as infrações, de acordo com a sua natureza, em leves, médias, graves e gravíssimas. A cada tipo corresponde uma pontuação e uma multa em reais, conforme a tabela abaixo.

INFRAÇÃO	PONTUAÇÃO	MULTA*
Leve	3 pontos	R$ 53,00
Média	4 pontos	R$ 86,00
Grave	5 pontos	R$ 128,00
Gravíssima	7 pontos	R$ 192,00

a) Um condutor acumulou 13 pontos em infrações. Determine todas as possibilidades quanto a quantidade e a natureza das infrações cometidas por condutor
b) O gráfico de barras abaixo exibe a distribuição de 1000 infrações cometidas em certa cidade, conforme a sua natureza. Determine a soma das multas aplicadas

44 **Unifesp 2016** A heparina é um medicamento de ação anticoagulante prescrito em diversas patologias De acordo com a indicação médica, um paciente de 72 kg deverá receber 100 unidades de heparina por quilograma por hora (via intravenosa). No rótulo da solução de heparina a ser ministrada consta a infor mação 10 000 unidades/50 mL.
a) Calcule a quantidade de heparina, em mL, que esse paciente deverá receber por hora.
b) Sabendo que 20 gotas equivalem a 1 mL, esse paciente deverá receber 1 gota a cada x segun dos. Calcule x.

45 **FICSAE 2016** Juntas, Clara e Josefina realizaram certo trabalho, pelo qual Clara recebeu, a cada hora, R$ 8,00 a mais do que Josefina. Se, pelas 55 horas que ambas trabalharam, receberam o total de R$ 1.760,00, a parte dessa quantia que coube a Clara foi:
A R$ 660,00
B R$ 770,00
C R$ 990,00
D R$ 1.100,00

46 **Fuvest 2017** João tem R$ 150,00 para comprar canetas em 3 lojas. Na loja A as canetas são vendidas em dú zias, cada dúzia custa R$ 40,00 e há apenas 2 dúzias em estoque. Na loja B, as canetas são vendidas em pares, cada par custa R$ 7,60 e há 10 pares em esto que Na loja C, as canetas são vendidas avulsas, cada caneta custa R$ 3,20 e há 25 canetas em estoque. O maior número de canetas que João pode comprar nas lojas A, B e C utilizando no máximo R$ 150,00 é igual a
A 46
B 45
C 44
D 43
E 42

47 **Fuvest 2018** Dois atletas correm com velocidades constantes em uma pista retilínea, partindo simultaneamente de extremos opostos, A e B. Um dos corredores parte de A, chega a B e volta para A. O outro corredor parte de B, chega a A e volta para B. Os corredores cruzam-se duas vezes, a primeira vez a 800 metros de A e a segunda vez a 500 metros de B. O comprimento da pista, em metros, é

A 1000.
B 1300.
C 1600.
D 1900.
E 2100.

48 **Fuvest 2016** Um veículo viaja entre dois povoados da Serra da Mantiqueira, percorrendo a primeira terça parte do trajeto à velocidade média de 60 km/h, a terça parte seguinte a 40 km/h e o restante do percurso a 20 km/h O valor que melhor aproxima a velocidade média do veículo nessa viagem, em km/h, é

A 32,5
B 35
C 37,5
D 40
E 42,5

49 **Fuvest 2015** Na cidade de São Paulo, as tarifas de transporte urbano podem ser pagas usando o bilhete único. A tarifa é de R$ 3,00 para uma viagem simples (ônibus ou metrô/trem) e de R$ 4,65 para uma viagem de integração (ônibus e metrô/trem) Um usuário vai recarregar seu bilhete único, que está com um saldo de R$ 12,50 O menor valor de recarga para o qual seria possível zerar o saldo do bilhete após algumas utilizações é

A R$ 0,85
B R$ 1,15
C R$ 1,45
D R$ 2,50
E R$ 2,80

50 **FGV-SP 2018** Duas áreas A e B de uma prefeitura apresentam orçamentos de gastos para 2018 de 3 milhões e 5 milhões de reais, respectivamente.
A prefeitura dispõe apenas de 4,8 milhões destinados às duas áreas no total. Se a prefeitura atender a um mesmo porcentual para cada área em relação às demandas solicitadas, a diferença (expressa em milhões de reais) entre o maior e o menor valor será:

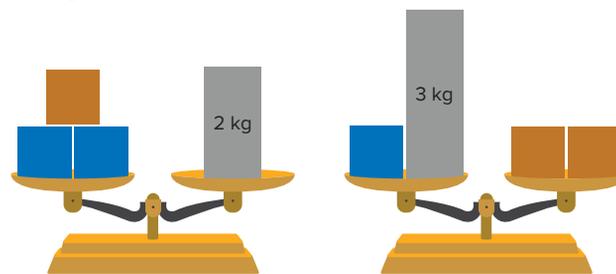
A 1,3
B 1,1
C 1,0
D 1,2
E 1,5

51 **Unicamp 2018** Dois anos atrás certo carro valia R$ 50.000,00 e atualmente vale R$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a

A R$ 25.600,00.
B R$ 24.400,00.
C R$ 23.000,00.
D R$ 18.000,00.

52 **Fuvest 2019** Em uma família, o número de irmãs de cada filha é igual à metade do número de irmãos. Cada filho tem o mesmo número de irmãos e irmãs.
O número total de filhos e filhas da família é

A 4
B 5
C 7
D 10
E 15

53 **Unesp 2017** Três cubos laranjas idênticos e três cubos azuis idênticos estão equilibrados em duas balanças de pratos, também idênticas, conforme indicam as figuras.

A massa de um cubo laranja supera a de um cubo azul em exato

A 1,3 kg
B 1,5 kg
C 1,2 kg
D 1,4 kg.
E 1,6 kg.

54 **Unifesp 2018** Um estudo médico recrutou 160 pacientes homens com histórico de alterações no antígeno prostático específico (PSA). Os pacientes foram submetidos aos exames laboratoriais de PSA total e de PSA livre e, em seguida, a uma biópsia da próstata A biópsia apontou, em cada caso, se a patologia era maligna ou benigna A tabela apresenta os resulta dos das médias dos exames laboratoriais do grupo de pacientes com patologia maligna e do grupo de pacientes com patologia benigna.

PSA (média)	Biópsia com indicação de patologia maligna	Biópsia com indicação de patologia benigna
PSA total (ng/mL)	10	8
PSA livre (ng/mL)	1,9	2
PSA livre ÷ PSA total	0,19	0,25

Pedro foi um dos pacientes que participou do estudo e seus exames indicaram PSA total = 9,5 ng/mL e PSA livre = 2,28 ng/mL.

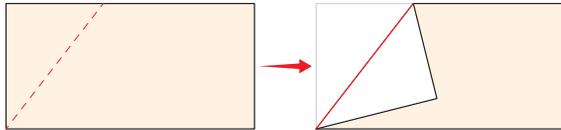
a) Calcule o quociente entre o PSA livre e o PSA total de Pedro. Usando esse indicador como referência na comparação com os dados da tabela, indique se o resultado do exame de Pedro está numericamente mais próximo ao resultado médio do exame de quem tem a patologia maligna ou de quem tem a patologia benigna
b) Sabendo que 40% dos pacientes foram diagnos ticados com patologia maligna, calcule a média do PSA total dos 160 pacientes que participaram do estudo.

55 **Unicamp** A soma de dois números positivos é igual ao triplo da diferença entre esses mesmos dois números Essa diferença, por sua vez, é igual ao dobro do quociente do maior pelo menor.

a) Encontre esses dois números.
b) Escreva uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$ cujas raízes são aqueles dois números.

56 **FGV-SP 2018** A equação quadrática $x^2 - 2x + c = 0$, em que C é uma constante real, tem como raízes x_1 e x_2. Se $\frac{x_1}{x_2} = \ \ 2$, então $\sqrt[3]{c}$ será

A um múltiplo de 3.
B racional não inteiro.
C irracional
D 2
E 2.

57 **Uefs 2018** Uma folha de papel retangular de área 32 cm^2, colorida na frente e branca no verso, é dobrada ao longo de uma linha tracejada. Após essa dobra, a parte do verso da folha que fica visível tem a forma de um triângulo e a parte colorida que não ficou encoberta tem a forma de um pentágono, conforme mostra a figura.

Dado que o perímetro desse pentágono é 24 cm a diferença entre o maior e o menor lado dessa folha de papel é

A 2 cm.
B 3 cm.
C 4 cm.
D 5 cm.
E 6 cm.

58 **EPCar 2017** Considere, em $\mathbb{R}$ a equação $(m+2)x^2 \ \ +2mx \ \ (m \ \ 1) = 0$ na variável x, em que **m** é um número real diferente de –2. Analise as afirmativas a seguir e classifique as em V (verdadeira) ou F (falsa).

( ) Para todo $m > 2$ a equação possui conjunto solução vazio
( ) Existem dois valores reais de **m** para que a equação admita raízes iguais.
( ) Na equação, se $\Delta > 0$, então **m** só poderá assumir valores positivos.

A sequência correta é

A V – V – V
B F – F – V
C F – V – F
D V – F – F

59 Dois irmãos gêmeos, Lucas e Mateus, em sua festa de aniversário, ganharam um certo número de camisas, cada um. Se Lucas der uma dessas camisas a Mateus, eles passarão a ter a mesma quantidade de camisas. Entretanto, se fosse Mateus que doasse a Lucas uma de suas camisas este então teria o dobro do número de camisas de Mateus. Considerando apenas as camisas recebidas de presente no aniversário, é correto afirmar que:

A Mateus ganhou 40% menos camisas do que Lucas.
B Se x é o número de camisas de Lucas e y é o número de camisas de Mateus, então x e y são números primos entre si.
C Os dois irmãos ganharam juntos mais de 12 camisas.
D O número que representa a quantidade de camisas que Mateus ganhou é um número divisor de 63.

60 O trinômio $y = x^2 - 14x + k$, onde k é uma constante real positiva, tem duas raízes reais distintas. A maior dessas raízes pode ser:

A 4
B 6
C 11
D 14
E 17

Texto complementar

No Livro *O homem que calculava*, Malba Tahan narra algumas histórias com uma lógica muito interessante Leia a última delas, adaptada do capítulo XXXIII.

Art_by_Danko/Shutterstock.com

O califa tinha cinco sobrinhas: duas tinham olhos negros e três tinham olhos azuis As sobrinhas que tinham olhos negros sempre diziam a verdade, porém as sobrinhas que tinham olhos azuis nunca diziam a verdade.

Beremiz, o calculista, foi desafiado pelo califa a descobrir quais eram as cores dos olhos de cada uma das sobrinhas. Ele poderia escolher três das sobrinhas e fazer apenas uma pergunta para cada escolhida e, a partir das três respostas, deveria descobrir as cores dos olhos das garotas.

Assim, elas foram posicionadas lado a lado, todas com seus rostos cobertos por véus, e o calculista fez a primeira pergunta para a garota que estava na extrema esquerda dele: “De que cor são os seus olhos?” A resposta foi dada em chinês, língua inacessível para o calculista Algumas sobrinhas do califa não eram árabes O calculista protestou, mas, apesar de seu protesto, lhe foi negada a tradução da resposta, no entanto teve a garantia de que as respostas seguintes deveriam ser dadas em árabe. Porém, só lhe restavam duas perguntas. Como ele conseguiria descobrir as cores dos olhos de todas as sobrinhas com apenas duas perguntas e duas respostas? Será que a primeira resposta não serviu de nada?

Sem esboçar desânimo, o calculista interpelou a segunda sobrinha na ordem em que estavam postas nestes termos: “Qual foi a resposta que a sua companheira acabou de proferir?”. A sobrinha respondeu com clareza: “As palavras dela foram ‘os meus olhos são azuis’”. Essa resposta aparentemente ainda não esclarecia o que quer que fosse. O que Beremiz pretendia com essas perguntas tão vagas? É nesse

momento que entra a lógica de um calculista em ação. Preste atenção à terceira pergunta

A terceira pergunta foi feita para a sobrinha que estava no centro: "De que cor são os olhos dessas duas jovens à sua direita, que acabo de interrogar?". A resposta foi: "A primeira tem os olhos negros e a segunda tem os olhos azuis!" Após alguns minutos de reflexão, Beremiz respondeu:

"A primeira sobrinha (à direita) tem olhos negros; a segunda tem os olhos azuis; a terceira tem os olhos negros e as duas últimas têm olhos azuis!".

Após erguerem se os véus, verificou-se, para espanto de todos os presentes, que as sobrinhas tinham os olhos das cores informadas e na ordem indicada pelo calculista. Mas como ele fez tanto com tão pouco? Ele fez três perguntas, mas apenas as duas últimas respostas foram inteligíveis; a primeira resposta veio em chinês. A explicação será sintetizada da forma que o livro aborda:

Para a primeira pergunta só havia uma resposta – "os meus olhos são negros" –, pois independentemente da índole da sobrinha, sendo sincera ou mentirosa, ela responderia a mesma coisa. Sendo assim, não importaria se a primeira sobrinha respondesse em chinês, em alemão, em inglês ou mesmo se fosse muda Como a primeira resposta era fixa ("meus olhos são negros"), a segunda resposta ("os olhos dela são azuis"), era certamente uma mentira. Nesse momento, o calculista já sabia que a primeira sobrinha tinha olhos negros (sincera) e a segunda tinha olhos azuis (mentirosa) A terceira resposta ("a primeira tem os olhos negros e a segunda tem os olhos azuis!"), provou que a terceira sobrinha falara a verdade, ou seja, tinha olhos negros. Por dedução, as duas últimas sobrinhas tinham olhos azuis.

Resumindo

Propriedade distributiva da multiplicação

$$A \cdot (B + C) \equiv A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C \equiv A \cdot C + B \cdot C$$

$$(A + B) \quad (X + Y) \equiv A \quad X + A \quad Y + B \quad X + B \quad Y$$

Principais identidades do 2º grau

$$(A + B)^2 \equiv A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

$$(A - B)^2 \equiv A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

$$A^2 \quad B^2 \equiv (A + B) \cdot (A \quad B)$$

$$(A + B + C)^2 \equiv A^2 + B^2 + C^2 + 2 \cdot A \cdot B + 2 \cdot A \cdot C + 2 \cdot B \cdot C$$

Trinômio do 2º grau

$$x^2 \quad Sx \equiv P \quad (x \quad x_1) \cdot (x \quad x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

Principais identidades do 3º grau

$$(A + B)^3 \equiv A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$$

$$A^3 + B^3 \equiv (A + B) \cdot (A^2 - A \cdot B + B^2)$$

$$(A \quad B)^3 \equiv A^3 \quad 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 \quad B^3$$

$$A^3 \quad B^3 \equiv (A \quad B) \cdot (A^2 + A \cdot B + B^2)$$

Equações do 1º grau

Uma vez escritas na forma $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, as equações do 1º grau apresentam solução única igual a $\frac{-b}{a}$.

$$ax + b = 0,\ a \neq 0 \Leftrightarrow S = \left\{ \ \frac{b}{a} \right\}$$

Equações do 2º grau

Uma vez escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, as equações quadráticas podem apresentar até duas soluções distintas. Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, as soluções (ou raízes) da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas pelas expressões:

$$x_1 = \frac{b\Delta \ \sqrt{\ }}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Soma e produto das raízes da equação do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \quad \frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Discussão das raízes da equação de 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow x_1 \text{ e } x_2 \text{ são números reais diferentes} \\ \Delta = 0 \Leftrightarrow x_1 \text{ e } x_2 \text{ são números reais iguais} \\ \Delta < 0 \Leftrightarrow x_1 \text{ e } x_2 \text{ não são números reais} \end{cases}$$

Quer saber mais?

Sites

- Faça alguns exercícios de fatoração algébrica:
  <https://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-fatoracao-expressoes-algebricas.htm>.
- Veja outros exemplos de modelagem por equações algébricas:
  <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/resolucao-problemas-envolvendo-equacoes-fracionarias.htm>.
- Leia um pouco da história das equações do 2º grau:
  <http://www.matematica.br/historia/requacoes.html>.
  <http://matematicajatai.com/rematFiles/2 2010/eq2grau pdf>.

Exercícios complementares

1 Col. Naval 2016 O conjunto solução da equação $x+1=\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+4x+1}}$ em $\mathbb{R}$, conjunto dos números reais, é

A $\mathbb{R}$

B $[\ 1, \infty\ [$.

C $\mathbb{R} - [\ 1, \infty[$

D $[0, \infty[$.

E $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right[$.

2 Col. Naval Considere o sistema abaixo nas variáveis reais x e y, sendo a e b reais.

$$\begin{cases} 375y^2x \quad 125y^3 \quad 375yx^2 + 125x^3 = 125b \\ y^2 + x^2 + 2xy = a^2 \end{cases}$$

Nessas condições, qual será o valor de $(x^2 - y^2)^6$?

A a^3b^6

B a^8b^6

C a^6b^2

D a^3b^6

E a^4b^6

3 Efomm 2019 Seja $f(k) = k^2 + 3k + 2$ e seja W o conjunto de inteiros {0, 1, 2, ..., 25}. O número de elementos de W, tais que f(W) deixa resto zero, quando dividido por 6, é:

A 25

B 22

C 21

D 18

E 17

4 PUC-SP 2018 A senha de um cadeado é formada por 3 algarismos distintos, ABC, escolhidos entre os algarismos 3, 4, 5, 6 e 7.
Sabendo que B > A > C, e que $B^2 - A^2 = 13$, nessas condições o valor de A · C é certamente

A um número primo.

B divisível por 5.

C múltiplo de 3.

D quadrado perfeito.

5 Col. Naval 2017 Sejam a, b e c números reais tais que $a^2+b^2+c^2 + 4a \quad 2b \quad 2c \quad 6 \quad 0$. Sobre a, b e c são feitas as seguintes afirmações:

I. $a^b < b^a$.

II $c^{b^a} = 1$.

III. $b^{(-a)} = (-c)^b$.

IV. $a > b > c$.

Sendo assim, é correto afirmar que a quantidade de afirmativas verdadeiras é

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

6 IME 2015 Encontre as soluções reais da equação:

$$\sqrt{x+\sqrt{4x\ 4}} = \sqrt{x+\sqrt{4x\ \ 4}} \quad \sqrt{x\ \ 3}$$

7 A expressão $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3\ \ \sqrt{5}}\ \ \sqrt{3\ \ \sqrt{5}}}$ representa um número inteiro Que número é esse?

8 Sendo x, y, z e w números reais considere as expressões:

$A = x + 2y + 3z + 4w$

$B = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$

Determine o valor máximo da diferença A B.

9 Determine todos os valores reais e não nulos de m, para os quais a equação

$$\frac{\left(\dfrac{m-x}{m+x}\right)+\left(\dfrac{m+x}{m\ \ x}\right)}{2} = \frac{\left(\dfrac{m^2+m\sqrt{2}+1}{m+x}\right)\left(\dfrac{m^2-m\sqrt{2}+1}{m\ \ x}\right)}{m^2}$$

não admite solução.

FRENTE 2

10 Encontre todos os possíveis valores inteiros de x e y tais que $x > y$ e $x + y + 2xy = 5$.

11 Verifique se são equações ou identidades as sentenças a seguir:

a) $(x-1)^3 + 3x^2 = x(x^2+3) - 1$

b) $\left(x+\sqrt{5}\right)^2 = x^2 + 5$

c) $x^4 + 11x^2 = 6x^2\left(x + \frac{1}{x}\right)$

12 Unifesp (Adapt.) Calcule o valor da soma:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}}$$

13 Unesp 2011 Transforme o polinômio $P(x) = x^5 +$ $^{?} - \quad -x \quad 1$ em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 3º grau.

14 PUC-Rio 2017 Considere a parábola de equação $y = x^2 + x \quad 1$

a) Encontre os pontos de interseção da parábola com a reta de equação $y = x + 1$.

b) Encontre b para o qual a parábola intercepta a reta de equação $y = x + b$ em um único ponto.

c) Encontre as retas que passam pelo ponto (1, 0) e que interceptam a parábola em um único ponto.

15 UEL 2017 Leia o texto a seguir.

> Por que não dividir um segmento unitário em duas partes iguais? A resposta é que, simplesmente, com a igualdade não existe diferença, e sem diferença não há universo perceptivo. O "número de ouro" é uma razão constante derivada de uma relação geométrica que os antigos chamavam de "áurea" ou de divisão perfeita, e os cristãos relacionaram este símbolo proporcional com o Filho de Deus.
>
> Adaptado de: LAWLOR, R. *Mitos - Deuses - Mistérios - Geometria Sagrada*. Madrid: Edições del Prado, 1996. p 46

O número de ouro, denotado pela letra grega ϕ, é definido como a única raiz positiva da equação a seguir.

$$x^2 = x + 1$$

Com base no texto e na definição do número de ouro, atribua V (verdadeiro) ou F (falso) às afirmativas a seguir

- ( ) $2\phi = 1 + \sqrt{5}$
- ( ) O número de ouro ϕ pode ser expresso como um quociente de números inteiros não nulos.
- ( ) Os números ϕ, $\phi + 1$, $2\phi + 1$ estão em progressão geométrica de razão ϕ
- ( ) $\phi^{-1} = \phi - 1$
- ( ) ϕ não pode ser expresso através de uma equação, por ser derivado de uma relação geométrica.

Assinale a alternativa que contém, de cima para baixo, a sequência correta.

A V, V, V, F, F.
B V, F, V, V, F.
C V, F, F, F, V.
D F, V, V, F, V.
E F, V, F, V, F.

16 Fuvest 2016 O Sistema Cantareira é constituído por represas que fornecem água para a Região Metropolitana de São Paulo. Chama-se de "volume útil" do Sistema os 982 bilhões de litros que ficam aci ma do nível a partir do qual a água pode ser retirada sem bombeamento. Com o uso de técnicas mais elaboradas, é possível retirar e tratar parte da água armazenada abaixo desse nível. A partir de outubro de 2014, a Sabesp passou a contabilizar uma parcela de 287 bilhões de litros desse volume adicional, denominada "reserva técnica" ou "volume morto", e chamou de "volume total" a soma do volume útil com a reserva técnica. A parte do volume total ainda disponível para consumo foi chamada de "volume armazenado".

O primeiro índice usado pela Sabesp para divulgar o nível do Sistema, após o início do uso da reserva técnica, foi o percentual do volume armazenado em relação ao volume útil (e não ao volume total). Chama-se este percentual de índice 1.

a) Calcule o valor que terá o índice 1 quando as represas estiverem completamente cheias, supondo que a definição de "volume armazenado" não tenha mudado.
A partir de abril de 2015, a Sabesp passou a divulgar outros dois índices, além do índice 1 (veja o Quadro). Note que o índice 3 pode assumir valores negativos e valerá 100% quando as represas do Sistema estiverem completamente cheias.

b) No momento em que o índice 1 for 50%, que valores terão os índices 2 e 3?

c) Qual é o valor do índice 2 no momento em que o índice 3 é negativo e vale 10%?

QUADRO

$$\text{Índice } 1 = \frac{\text{volume armazenado}}{\text{volume útil}} \times 100\%$$

$$\text{Índice } 2 = \frac{\text{volume armazenado}}{\text{volume total}} \times 100\%$$

$$\text{Índice } 3 = \frac{(\text{volume armazenado}) - (\text{volume da reserva técnica})}{\text{volume útil}} \times 100\%$$

17 **EPCar 2017** Sobre a equação

$$\frac{2}{x+\sqrt{2\quad x^2}}+\frac{2}{x\quad\sqrt{2\quad x^2}}=x,$$ respeitando sua validade no universo dos números reais, analise as afirmativas.

I. Possui duas raízes irracionais.
II. Não possui raízes negativas.
III. Possui conjunto solução com um único elemento.

Pode-se afirmar, então, que

A todas são verdadeiras.
B apenas a I é falsa.
C todas são falsas.
D apenas a III é verdadeira.

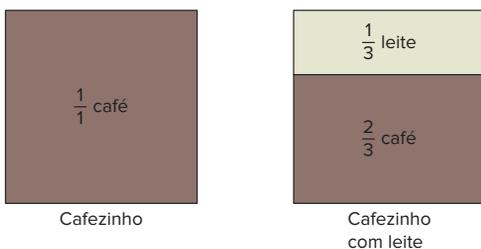
18 **Unicamp 2017** Diversas padarias e lanchonetes vendem o "cafezinho" e o "cafezinho com leite". Uma pesquisa realizada na cidade de Campinas registrou uma variação grande de preços entre dois estabelecimentos, **A** e **B**, que vendem esses produtos com um volume de 60 mL, conforme mostra a tabela abaixo.

Produto	A	B
Cafezinho	R$ 2,00	R$ 3,00
Cafezinho com leite	R$ 2,50	R$ 4,00

a) Determine a variação percentual dos preços do estabelecimento **A** para o estabelecimento **B**, para os dois produtos.

b) Considere a proporção de café e de leite servida nesses dois produtos conforme indica a figura abaixo. Suponha que o preço cobrado se refere apenas às quantidades de café e de leite servidas. Com base nos preços praticados no estabelecimento B, calcule o valor que está sendo cobrado por um litro de leite.

Cafezinho

Cafezinho com leite

19 **AFA 2020** Três amigas: Tereza, Ana e Kely entram juntas numa loja de chocolates. A tabela abaixo indica a quantidade de caixas e o tipo de trufas que cada uma comprou na loja.

	Trufas de morango	Trufas de nozes	Trufas de coco
Tereza	3	7	1
Ana	4	10	1
Kely	1	1	1

Com as compras, Tereza gastou 315 reais e Kely gastou 105 reais

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) O valor da caixa de trufas de coco é o dobro do valor da caixa de trufas de nozes.
( ) Ana gastou o quádruplo do que Kely gastou.
( ) As três juntas gastaram menos de 800 reais.

Sobre as proposições, tem-se que

A todas são verdadeiras
B apenas uma é falsa.
C apenas duas são falsas.
D todas são falsas.

20 **Fuvest** Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?

A 3
B 4
C 5
D 6
E 7

21 **Unifesp 2017** O gasto calórico no exercício da atividade física de corrida é uma função de diversas variáveis, porém, a fórmula simplificada pode dar uma estimativa desse gasto.

Gasto calórico (em calorias por hora) = velocidade da corrida (em km/h) × massa do indivíduo (em kg)

Considere que, no exercício da corrida, o consumo de oxigênio, que em repouso é de 3,5 mL por quilograma de massa corporal por minuto, seja multiplicado pela velocidade (em km/h) do corredor.

a) Turíbio tem massa de 72 kg e pratica 25 minutos de corrida por dia com velocidade constante de 8 km/h. Calcule o gasto calórico diário de Turíbio com a prática dessa atividade.

b) Seja c o consumo de litros de oxigênio em uma hora de corrida de um indivíduo de massa m (em kg) em velocidade constante v (em km/h). Calcule o valor da constante $\frac{c}{m\cdot v}$ na prática de uma hora de corrida desse indivíduo.

22 **ITA 2019** Considere as seguintes afirmações:

I. se n é um número natural, então $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\quad+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}$.

II. se x é um número real e $x^3+x+1=0$, então $x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^6}=0$.

III. se a, b e c são números reais positivos que formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética

FRENTE 2

É (são) VERDADEIRA(S)

A apenas I.
B apenas I e II.
C apenas I e III.
D apenas II e III.
E todas.

23 ITA 2018 Se x é um número real que satisfaz $x^3 = x + 2$, então x^{10} é igual a

A $5x^2 + 7x + 9$
B $3x^2 + 6x + 8$
C $13x^2 + 16x + 12$
D $7x^2 + 5x + 9$
E $9x^2 + 3x + 10$

24 IME 2019 Aristeu e seu irmão nasceram nos séculos XX e XXI, respectivamente. Neste ano, 2018, os dois já fizeram aniversário e a idade de cada um deles é a soma dos três últimos dígitos do ano de seu respectivo nascimento Qual é a soma das idades dos dois irmãos?

A 23
B 26
C 29
D 32
E 39

25 IME 2018 Se X e Y são números naturais tais que $X^2 \quad Y^2 = 2017$, o valor de $X^2 + Y^2$ é:

A 2 008 010 **C** 2 034 145 **E** 2 052 061
B 2 012 061 **D** 2 044 145

26 IME 2017 Assinale a alternativa verdadeira:

A $\sqrt{2016} \quad < \sqrt{2015} \quad < \sqrt{2017} \quad \sqrt{2016} \quad \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$
B $\sqrt{2017} \quad < \sqrt{2016} \quad < \sqrt{2016} \quad \sqrt{2015} \quad \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$
C $\sqrt{2017} \quad < \sqrt{2016} \quad \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2016} \quad \sqrt{2015}$
D $\sqrt{2016} \quad < \sqrt{2015} \quad \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2017} \quad \sqrt{2016}$
E $\left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2017} \quad \sqrt{2016} < \sqrt{2016} \quad \sqrt{2015}$

27 Fuvest Para a fabricação de bicicletas, uma empresa comprou unidades do produto A, pagando R$ 96,00, e unidades do produto B, pagando R$ 84,00. Sabendo-se que o total de unidades compradas foi de 26 e que o preço unitário do produto A excede em R$ 2,00 o preço unitário do produto B, determine o número de unidades de A que foi comprado.

28 IME Se r_1 e r_2 são raízes reais distintas de $x^2 + px + 8 = 0$, é correto afirmar que:

A $|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$
B $|r_1 + r_2| < \sqrt{2}$
C $|r_1| \geq 2$ e $|r_2| \geq 2$
D $|r_1| \geq 3$ e $|r_2| \leq 1$
E $|r_1| < 1$ e $|r_2| < 2$

29 IME Resolva a equação $\sqrt{5 - \sqrt{5 - x}} = x$, sabendo-se que $x > 0$.

30 IME Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + (m \quad 15)x + m =$ $= 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m.

31 IME O par ordenado (x, y), com x e y inteiros positivos, satisfaz a equação $5x^2 + 2y^2 = 11(xy \quad 11)$. O valor de $x + y$ é:

A 160 **C** 81 **E** 11
B 122 **D** 41

32 Ibmec-SP Sejam a e b números reais positivos.

a) Resolva na variável t a equação $t + (b \quad a) = \frac{ab}{t} \quad 0$

b) Resolva na variável x a equação $x + a \quad b \quad \frac{ab}{x - a} = a.$

33 ITA O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é:

A 2 499
B 2 501
C 2 500
D 3 600
E 4 900

34 ITA 2016 Se x é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ é igual a

A 285.
B 286.
C 287.
D 288.
E 289.

35 ITA 2013 A soma de todos os números reais x que satisfazem a equação

$$8^{\sqrt{x+1}} + 44\left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19\left(4^{\sqrt{x+1}}\right)$$

é igual a

A 8.
B 12.
C 16.
D 18.
E 20.

36 ITA 2011 O produto das raízes reais da equação $|x^2 + 3x \quad 2| = |2x \quad 3|$ é igual a

A 5 **D** 2
B 1 **E** 5
C 1

37 ITA 2016 Determine todos os valores de $m \in \mathbb{R}$ tais que a equação $(2 \quad m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

38 **ITA** A expressão $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^5 \quad (2\sqrt{3} \quad \sqrt{5})^5$ é igual a

- A $2\,630\sqrt{5}$
- B $2\,690\sqrt{5}$
- C $2\,712\sqrt{5}$
- D $1584\sqrt{15}$
- E $1604\sqrt{15}$

39 **IME 2016** Seja a equação $n^2 - 7m^2 = (5m - 2n)^2 + 49$. Determine todos os pares inteiros (m, n) que satisfazem a esta equação

40 **IME 2015** Seja $P(x) = x^2 + ax + b$. Sabe-se que P(x) e P(P(P(x))) têm uma raiz em comum. Pode-se afirmar que para todo valor a e b

- A $P(-1)P(1) < 0$
- B $P(-1)P(1) = 0$
- C $P(\quad 1) + P(1) = 2$
- D $P(0)P(1) = 0$
- E $P(0) + P(1) = 0$

41 **IME 2014** Qual é o menor número?

- A $\pi \cdot 8!$
- B 9^9
- C $2^{2^{2^2}}$
- D 3^{3^3}
- E $2^{13} \quad 5^3$

42 **IME 2013** Considere as inequações abaixo:

I. $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

II $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$

III. $\left(a^2 \quad b^2\right) \geq (a \quad b)^4$

Esta(ão) correta(s), para quaisquer valores reais positivos de a, b e c, a(s) inequação(ões)

- A II apenas.
- B I e II apenas.
- C I e III apenas.
- D II e III apenas.
- E I, II e III.

43 **IME 2012** Seja a, b e c números reais e distintos. Ao simplificar a função real, de variável real,

$$f(x)=a^2\frac{(x \quad b)(x \quad c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x \quad c)(x \quad a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x \quad a)(x \quad b)}{(c-a)(c-b)},$$

obtém-se f(x) igual a:

- A $x^2 \quad (a + b + c)x + abc$
- B $x^2 + x - abc$
- C x^2
- D $\quad x^2$
- E $x^2 \quad x + abc$

44 **IME** Considere o sistema

$$\begin{cases} xy+x \quad =y \quad 5 \\ x^3y^2-x^2y^3-2x^2y+2xy^2=6 \end{cases}$$, onde x e y são números

inteiros. O valor de x^3+y^2+x2+y é:

- A 14
- B 18
- C 20
- D 32
- E 38

45 **AFA 2016** Considere as expressões:

$A = 26^2 \quad +24^2 \quad +23^2 \quad 21^2 + 20^2 \quad 18^2 \quad \ldots \quad 5^2 \quad 3^2$ e
$B = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}\cdot\ldots$

O valor de $\frac{A}{B}$ é um número compreendido entre

- A 117 e 120
- B 114 e 117
- C 111 e 114
- D 108 e 111

46 **ITA** Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor “flex” (que funciona com álcool e com gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor “flex” sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 567 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

- A 246.
- B 252.
- C 260.
- D 268.
- E 284.

47 **UEPG 2017** Fabio fez compras em duas lojas. Na 1ª loja, gastou a metade do que tinha na carteira, mais R$ 3,00 de estacionamento. Na 2ª loja, gastou a terça parte do que restou na carteira, mais R$ 5,00 de estacionamento. Se ele ainda ficou com R$ 53,00 na carteira, assinale o que for correto.

01 Ele tinha mais de R$ 200,00 na carteira.
02 Na 2ª loja, ele gastou 20% do que tinha inicialmente.
04 Na 1ª loja, ele gastou mais de R$ 85,00.
08 No total, ele gastou menos de R$ 130,00.

Soma:

48 **IME** Seja x um número real ou complexo para o qual $\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$ O valor de $\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)$ é:

- A 1
- B 2
- C 3
- D 4
- E 5

49 **IME** Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes da equação $y^{\frac{3}{2}} + 5y + 2y^{\frac{1}{2}} + 8 = 0$

A 5
B 2
C 21
D $5^{\frac{1}{2}}$
E 0,5

50 Se a equação a(2x + 3) + 3bx = 12x + 5 possui infinitas soluções para x, determine os valores de a e b.

51 Se a, b, c são constantes positivas, resolva a equação $\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3 \cdot$

52 Se os números positivos a, b, c satisfazem abc = 1, resolva a equação em x:

$$\frac{2ax}{ab+a+1} + \frac{2bx}{bc+b+1} + \frac{2cx}{ca+c+1} = 1$$

53 Mostrar que $\frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1+x} \quad \sqrt{1 \quad x}} = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2 \quad x}}$,

$\forall x \in [-1,1], x \neq 0$

54 O valor da expressão:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+2} + \ldots + \frac{1}{10+\sqrt{99}}, \text{ é:}$$

A 10
B –9
C $\frac{1}{9}$
D 9
E 10

55 **ITA** Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ podemos afirmar que

A x = 2 não é raiz de *p*.
B *p* só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais.
C *p* admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira.
D *p* só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras.
E *p* admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais.

56 **ITA 2019** Considere as seguintes afirmações:

I Se x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^3 \quad 2x^2 + x + 2 = 0$, então $y_1 = x_2x_3$, $y_2 = x_1x_3$ e $y_3 = x_1x_2$ são as raízes da equação $y^3 \quad y^2 \quad 4y \quad 4 = 0$

II. A soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

III $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

É (são) VERDADEIRA(S)

A apenas I
B apenas II.
C apenas III.
D apenas II e III.
E todas.

57 Sendo x e y dois números reais positivos quaisquer, considere a expressão: $E = \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}$.

a) Use o fato de que $E^2 \geq 0$ quaisquer que sejam x e y, para obter o valor mínimo da soma $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
b) Prove que $(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \geq 4$ para quaisquer x e y reais positivos.
c) Encontre o valor mínimo da expressão $F = x^{-1} + (2\,020 \quad x)^{-1}$

58 Considere o conjunto J de todos os números irracionais da forma $x = a + b\sqrt{2}$ em que a e b são números inteiros e b ≠ 0. Um elemento x do conjunto J é denominado unidade de J se, e somente se, $\frac{1}{x}$ também é elemento do conjunto J.

a) Mostre que o número $x = 3 \quad 2\sqrt{2}$ é uma unidade do conjunto J.
b) Mostre que o número $x = 5 + 3\sqrt{2}$ é uma unidade do conjunto J.
c) Encontre os valores de y para os quais $x = y + 5\sqrt{2}$ é uma unidade de J

59 Sendo **S** o conjunto solução da equação $(k-1)x^2 - 2(k-13)x + (11-k) = 0$ na variável x, em que o parâmetro **k** é um número real, determine:

a) Todos os valores de **k** tais que **S** é um conjunto unitário.
b) O conjunto **S** para cada valor de **k** encontrado no item anterior.

60 Mostre que a equação $x^3 - 6 = \sqrt[3]{x+6}$ admite apenas uma solução real

AndreyPopov/iStockphoto.com

Fernando Branco - AeroCam/Shutterstock.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

3

Razões e proporções

Os valores absolutos de uma grandeza nem sempre são suficientes para que se compreenda realmente sua magnitude. Considere o número 300 e tente decidir se ele deve ser tratado como um valor alto ou baixo, grande ou pequeno.

Se esse 300 for o valor da taxa de colesterol em miligramas por decilitro (mg/dL) de um indivíduo, então ele deve ser considerado bem alto, se comparado ao limite de 200 mg/dL recomendado pelas autoridades médicas.

Mas se 300 for a quantidade diária de calorias na dieta de uma pessoa, então ele deve ser considerado bem baixo, em relação às 3500 calorias diárias recomendadas

O estudo das razões e proporções permite compreender o valor de uma grandeza de forma relativa, estabelecendo parâmetros de comparação próprios, que permitem avaliações mais precisas a respeito da magnitude dos números

Comparando números

O princípio da tricotomia é uma característica própria do conjunto dos números reais. Segundo esse princípio, dados os números reais x_1 e x_2, só há três situações a se considerar:

O símbolo = indica uma relação de igualdade. Os símbolos < e > indicam relações de ordem e podem ser lidos em qualquer sentido.

Relação de ordem	Leitura da esquerda para a direita	Leitura da direita para a esquerda
$x_1 < x_2$	x_1 é menor do que x_2	x_2 é maior do que x_1
$x_1 > x_2$	x_1 é maior do que x_2	x_2 é menor do que x_1

Por esse motivo, dependendo do sentido da leitura, fica estabelecida uma ordem crescente ou decrescente, qualquer que seja o símbolo usado para representar a relação.

Com apenas três situações, a negação de qualquer uma dessas relações equivale à reunião das outras duas. Assim, para a negação de uma relação de ordem deve-se considerar também a relação de igualdade.

- O contrário de $x_1 < x_2$ abrange tanto $x_1 > x_2$ quanto $x_1 = x_2$ e é representado por $x_1 \geq x_2$
- O contrário de $x_1 > x_2$ abrange tanto $x_1 < x_2$ quanto $x_1 = x_2$ e é representado por $x_1 \leq x_2$.

Por fim, para a negação da igualdade basta considerar ambas as relações de ordem

- O contrário de $x_1 = x_2$ abrange tanto $x_1 < x_2$ quanto $x_1 < x_2$ e é representado por $x_1 \neq x_2$.

Exercício resolvido

1 Considere as seguintes relações numéricas:

I. $3 \leq 5$ II. $4 \geq 4$ III. $2 \geq 6$

É correto afirmar que:

A todas as afirmações são verdadeiras.
B apenas a afirmação I é verdadeira.
C apenas a afirmação II é verdadeira.
D apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
E todas as afirmações são falsas.

Resolução:

I $3 \leq 5$ é a negação de $3 > 5$, que é falso Logo I é verdadeira

II. $4 \leq 4$ é a negação de $4 > 4$, que é falso. Logo II é verdadeira.

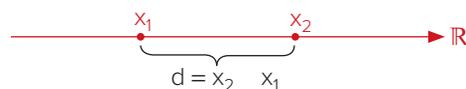
III. $2 \geq 6$ é a negação de $2 < 6$, que é verdadeiro. Logo III é falsa

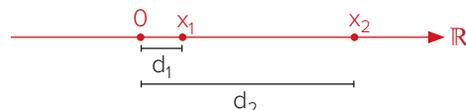
Alternativa: D.

Nosso estudo avança de modo a se obter de valores reais x_1 e x_2, outros números capazes de informar e formar escalas comparativas entre as infinitas possibilidades em que $x_1 \neq x_2$

Esses terceiros números, destinados a avaliar o quanto x_1 **não é igual a** x_2, são o que chamamos de razões matemáticas. Assim, por princípio, a razão entre dois números reais deve informar algo sobre a não igualdade de dois números reais, permitindo que se saiba algo a respeito deles, mesmo sem saber quais são os seus valores

Basicamente, há duas operações matemáticas capazes de obter razões a partir de diferentes números reais x_1 e x_2, a subtração e a divisão.

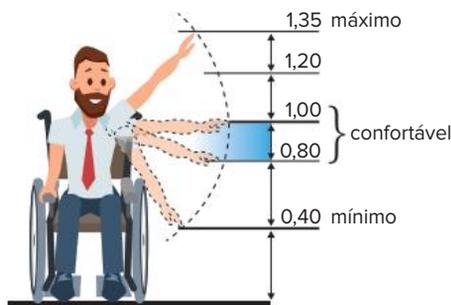
O resultado da subtração é literalmente a diferença dos números x_1 e x_2. O resto, resíduo ou diferença de dois números informa o quão distante x_1 e x_2 estão localizados no eixo real.

Subtraindo os anos de nascimento e morte de uma pessoa, por exemplo, obtém-se o seu tempo de vida, o que permite inferências a seu respeito mesmo que não se saiba em que ano ela nasceu e em que ano morreu.

Além da literalidade da diferença, há outra operação cujo resultado permite inferências sobre valores não necessariamente conhecidos. Trata-se da operação de divisão. O quociente, resultado da divisão entre os números x_1 e x_2, permite outra forma de comparação numérica dada em termos de multiplicidade.

O que ocorre aqui, de fato, é uma comparação da dis tância do número zero ao número x_1 com a distância do número zero ao número x_2. Comparando-se essas distâncias, é possível saber, por exemplo, se uma quantia vale o dobro da outra, ou, o triplo, a metade, três quartos, 25% etc.

Esse tipo de comparação permite tantas possibilidades matemáticas informativas a respeito de números diferentes que, no estudo da matemática, o termo razão está mais frequentemente associado ao quociente de uma divisão, do que à diferença de uma subtração.

Exercício resolvido

2 **Enem 2012** Num projeto da parte elétrica de um edifício residencial a ser construído, consta que as tomadas deverão ser colocadas a 0,20 m acima do piso, enquanto os interruptores de luz deverão ser colocados a 1,47 m acima do piso. Um cadeirante, potencial comprador de um apartamento desse edifício, ao ver tais medidas, alerta para o fato de que elas não contemplarão suas necessidades Os referenciais de

alturas (em metros) para atividades que não exigem o uso de força são mostrados na figura seguinte.

Uma proposta substitutiva, relativa às alturas de tomadas e interruptores, respectivamente, que atenderá àquele potencial comprador é

A 0,20 m e 1,45 m
B 0,20 m e 1,40 m.
C 0,25 m e 1,35 m.
D 0,25 m e 1,30 m.
E 0,45 m e 1,20 m

Resolução

De acordo com a imagem, o cadeirante consegue alcançar uma altura x, em metros, tal que:
$0,40 < x < 1,35$
Como $0,40 < 0,45$ e $1,20 < 1,35$, a alternativa E é a única proposta que atenderá ao comprador
Alternativa: E.

Comparação por subtração

Dados os números reais x_1 e x_2, da relação de igualdade matemática, há apenas dois casos a se considerar:

- Eles têm o mesmo valor: $x_1 = x_2$.
- Eles não têm o mesmo valor: $x_1 \neq x_2$.

Algebricamente, a operação de subtração permite expressar cada caso de outra maneira:

- $x_1 = x_2 \iff x_1 \quad x_2 = 0$
- $x_1 \neq x_2 \iff x_1 \quad x_2 \neq 0$

Dizer que x_1 e x_2 são iguais de fato equivale a dizer que não há diferença entre x_1 e x_2, mas também é correto, nesse caso, dizer que a diferença entre x_1 e x_2 é zero

Lembrando que, em termos matemáticos, diferença é o nome dado ao resultado de uma subtração, que não se trata de uma operação comutativa, quando os números x_1 e x_2 não são iguais podem ser consideradas duas diferenças distintas:

- $x_1 \quad x_2$
- $x_2 - x_1$

A letra grega Δ (delta maiúscula) é bastante usada para representar diferenças entre números reais, e, como as duas diferenças possíveis são opostas, quando uma delas é igual a Δ, a outra é igual a $\ \Delta$.

A diferença entre dois valores específicos de uma quantidade indicada por x (ou indicada por y) também costuma ser denominada variação de x (ou variação de y). Além disso, tais variações são representadas algebricamente por Δx e Δy.

Variação orientada e absoluta

A variação de uma quantidade x que assume os valores x_1 e x_2 pode ser calculada de duas maneiras distintas: $(x_1 \quad x_2)$ ou $(x_2 \quad x_1)$, dependendo da situação em que se aplica.

Imagine estar numa sala com o ar-condicionado regulado para 22 °C e depois ter que sair para a rua, em um dia ensolarado, a uma temperatura de 30 °C.

Nessa situação, tem-se $x_1 = 22$ °C e $x_2 = 30$ °C, e a variação térmica enfrentada é de + 8 °C. Isso significa, portanto, sentir a temperatura aumentar em 8 °C:

$$\Delta x = x_2 \quad x_1 = 30\ °C \quad 22\ °C = 8\ °C$$

Já para uma pessoa que veio da rua e entrou na sala, a variação térmica é 8 °C, pois a sensação é de que a temperatura diminui 8 °C:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = 22\ °C - 30\ °C = -8\ °C$$

A variação absoluta de uma quantidade é definida como sendo o módulo das variações orientadas ou relativas:

$$|\Delta x| = |x_1 \quad x_2| = |x_2 \quad x_1|$$

Portanto, em ambas as situações, pode-se dizer que houve uma variação absoluta de 8 °C na temperatura dos ambientes citados.

Note que o conhecimento da variação de 8 °C nas temperaturas é suficiente para se ter uma noção do choque térmico enfrentado por quem muda de um ambiente para o outro, mesmo sem conhecer a temperatura exata de cada ambiente

Exercício resolvido

3 **Enem 2011** O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21 mm; 68,102 mm; 68,001 mm; 68,02 mm e 68,012 mm.
Para colocar o pistão no motor que está sendo consertado, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que ele precisa.
Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro

A 68,21 mm
B 68,102 mm
C 68,02 mm
D 68,012 mm
E 68,001 mm.

Resolução:

Quanto mais próximos são dois números reais, menor é a diferença absoluta entre eles.
Calculando as diferenças absolutas, em mm, dos valores disponíveis para o valor procurado:

68,210   68,000 = 0,210
68,102   68,000 = 0,102
68,020   68,000 = 0,020
68,012   68,000 = 0,012
68,001 – 68,000 = 0,001

Como 0,001 < 0,012 < 0,020 < 0,102 < 0,210, a menor diferença é 0,001.
Alternativa: E

Saiba mais

Conceitos básicos de Matemática Financeira

Lucro nominal

Se um comerciante compra uma mercadoria e a revende por um valor maior, a diferença positiva entre os valores da compra e da venda é chamada de lucro nominal.

Venda > Compra ⇒ Lucro = Venda   Compra

Prejuízo nominal

Se um comerciante compra uma mercadoria e a revende por um valor menor, a diferença positiva entre os valores da venda e da compra é chamada de prejuízo nominal

Venda < Compra ⇒ Prejuízo = Compra – Venda

No caso das empresas, as entradas de capital financeiro contabilizadas em um determinado período totalizam o que chamamos de receita da empresa. Em contrapartida, empresas arcam com uma grande diversidade de custos: matéria-prima, salários, aluguel, impostos etc.

Assim, quando a receita supera os custos em determinado período, tem-se:

Lucro = Receita   Custos

Quando os custos superam a receita em um determinado período, tem-se:

Prejuízo = Custos – Receita

cifotart/iStockphoto.com

! Atenção

Em termos algébricos, lucros e prejuízos nominais são variações absolutas de valores monetários diferentes. Também se pode entender o prejuízo como sendo um lucro negativo e vice-versa.

Variação temporal

Quando a variação decorre dos valores assumidos por x_1 e x_2 ao longo do tempo, de modo que x_2 ocorre após x_1, é comum designá-los valores final e inicial respectivamente

Em acordo com a própria natureza do tempo, a variação deve ser considerada do seguinte modo:

$$\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$$

Exercícios resolvidos

Texto para as próximas duas questões.

A população atual de um país já atingiu a marca dos 700 milhões e, segundo pesquisas, para o reequilíbrio dos índices de natalidade e mortalidade, a média mundial de filhos por mãe teria que baixar de 2,5 para 2,1 Se isso acontecer, a estabilização demográfica será alcançada em aproximadamente um século, quando a população do país terá chegado a 1 bilhão de pessoas

hobbit/Shutterstock.com

4 De acordo com o texto, o aumento estimado da população desse país, até que se atinja a estabilização demográfica será de:

A 100 milhões de pessoas.
B 300 milhões de pessoas
C 400 milhões de pessoas.
D 700 milhões de pessoas.
E 1 bilhão de pessoas.

Resolução:

Atualmente: $x_{inicial} = 700000000$ pessoas
Um século depois: $x_{final} = 1000000000$ pessoas
Assim, a variação na população será:
$\Delta x = x_{final} \quad x_{inicial} =$
$\Delta x = 1000000000 - 700000000 = 300000000$
Alternativa: B.

5 Qual deve ser a variação da média de filhos por mãe, para o reequilíbrio dos índices de natalidade e mortalidade?

A 2,4   **C** 0,1   **E** –0,4
B 0,4   **D** 0,2

Resolução:

Atualmente: $y_{inicial} = 2,5$ filhos por mãe
Um século depois: $y_{final} = 2,1$ filhos por mãe
Assim:
$\Delta y = y_{final} \quad y_{inicial} = 2,1 \quad 2,5 = -0,4$ filho por mãe
Alternativa: E

Para responder às próximas duas questões considere a tabela a seguir, que apresenta dados sobre a evolução de preços do barril de petróleo em certa localidade

Ano	Preço
1967	U$ 3
1979	U$ 22
2005	U$ 40
2011	U$ 100

6 Qual o aumento no preço do barril de petróleo durante todo o período considerado na tabela?

A U$ 97
B U$ 90
C U$ 70
D U$ 9
E U$ 7

Resolução:

Em 1967 o preço, em dólares, era $\text{Preço}_{\text{inicial}} = 3$
Em 2011 o preço, em dólares, chegou a $\text{Preço}_{\text{final}} = 100$.
Assim, a variação no preço durante o período considerado na tabela foi de:
$\Delta\text{Preço} = \text{Preço}_{\text{final}} \quad \text{Preço}_{\text{inicial}} = 100 \quad 3 = 97$ dólares
Alternativa: A

7 Em quanto tempo o preço do petróleo subiu de 22 para 100 dólares o barril?

A 78 anos
B 44 anos
C 32 anos
D 17 anos
E 6 anos

Resolução:

O preço estava em 22 dólares em $t_{\text{inicial}} = 1979$.
O preço chegou a 100 dólares em $t_{\text{final}} = 2011$.
Assim: $\Delta t = t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}} = 2011 - 1979 = 32$ anos.
Alternativa: C.

Atenção

Propriedades da subtração

A subtração não é uma operação comutativa.

$$a \neq b \Leftrightarrow a \quad b \neq b \quad a$$

Para incorporar essa propriedade, representa se a diferença absoluta (desprovida de sinal) pelo módulo da diferença, assim:

$$|a - b| = |b - a|$$

A subtração também não é uma operação associativa.

$$(a - b) - c \neq a - (b - c)$$

Para contornar a ausência dessa propriedade, pode-se aplicar alguma das seguintes identidades:

$$(a - b) - c = a - b - c$$
$$a \quad (b \quad c) = a \quad b + c$$
$$(a - b) - c = a - (b + c)$$
$$a \quad (b \quad c) = (a + c) \quad b$$

Comparação por quociente

Voltemos ao fato de que dados os números reais x_1 e x_2 diferentes de zero:

- ou eles têm o mesmo valor: $x_1 = x_2$
- ou eles não têm o mesmo valor: $x_1 \neq x_2$

Agora a operação de divisão permite expressar algebricamente cada caso de outra maneira:

- $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = 1$
- $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} \neq 1$

Assim, desde que seus valores não sejam nulos, dizer que x_1 e x_2 são iguais equivale a dizer que sua razão por quociente é unitária.

Lembrando que a divisão não é uma operação comutativa, quando os números x_1 e x_2 não são iguais a zero nem iguais um ao outro, há dois quocientes diferentes possíveis: $\dfrac{x_1}{x_2}$ e $\dfrac{x_2}{x_1}$.

Letras como **q** e **k** são frequentemente utilizadas para representar razões por meio de quocientes de números reais e, como as duas razões possíveis são recíprocas, quando uma delas é indicada por **k**, a outra fica indicada por $\mathbf{k}^{-1}$. Exemplos na tabela:

k	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{4}$	0,5	4	2,5	100	80%
$\mathbf{k^{-1}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{7}$	2	0,25	0,4	0,01	125%

Saiba mais

Progressões aritméticas e geométricas

Uma sequência numérica crescente ou decrescente, em que a diferença de dois termos consecutivos é constante, é denominada Progressão Aritmética (PA). Em uma PA, a razão é definida como sendo a constante que se obtém pela subtração de dois termos consecutivos:

$$(a_1, a_2, a_3, \quad , a_{n \quad 1}, a_n) \text{ é uma PA } \Rightarrow$$
$$\text{Razão} = a_2 \quad a_1 = a_3 \quad a_2 = \dots \quad a_n \quad a_{n \quad 1}$$

Exemplos:

a) (4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,) é uma PA de razão 2, pois:
6 4 = 8 6 = 10 8 = 12 10 = 14 12 = 16 14 = 2

b) (30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65) é uma PA de razão 5, pois:
35 30 = 40 35 = 45 40 = 50 45 = 55 50 = 60 55 = = 65 60 = 5.

c) (600, 500, 400, 300, 200, 100, 0) é uma PA de razão –100, pois:
500 – 600 = 400 – 500 = 300 – 400 = 200 – 300 = 100 – 200 = = 0 – 100 = –100.

Uma sequência numérica em que é constante o quociente de dois termos consecutivos denomina-se Progressão Geométrica (PG). Em uma PG, a razão é definida como sendo a constante que se obtém na divisão de dois termos consecutivos:

$$(a_1, a_2, a_3, \quad , a_{n-1}, a_n) \text{ é uma PG} \Rightarrow \text{Razão} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \quad = \frac{a_n}{a_{n \quad 1}}$$

Exemplos:

a) (4, 8, 16, 32, 64, 128) é uma PG de razão 2, pois:
$\frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = \frac{128}{64} = 2.$

b) (2, 10, 50, 250, 1250, 6 250) é uma PG de razão 5, pois:
$\frac{10}{2} = \frac{50}{10} = \frac{250}{50} = \frac{1250}{250} = \frac{6250}{1250} = 5.$

c) (2, –6, 18, –54, 162) é uma PG de razão 3, pois:
$\frac{-6}{2} = \frac{18}{-6} = \frac{-54}{18} = \frac{162}{-54} = \quad 3$

d) (48, 24, 12, 6, 3) é uma PG de razão 0,5, pois:
$\frac{24}{48} = \frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = 0{,}5.$

Razões simples

Os quocientes de duas grandezas de mesma espécie são denominados razões simples, sejam essas grandezas geométricas, físicas, químicas etc.

Razões simples podem ser obtidas efetuando-se a divisão, sem resto, entre valores de dois comprimentos, duas áreas, dois volumes, duas massas, duas forças, dois preços, duas densidades, duas populações e muito mais.

As razões simples são valores adimensionais, ou seja, que não possuem unidade. Elas indicam apenas as relações de multiplicidade existente entre as grandezas divididas Quando o maior valor é dividido pelo menor, a relação de multiplicidade (k > 1) obtida entre grandezas geométricas pode ser interpretada como sendo a quantidade de vezes que o menor valor cabe no maior:

- A razão $\frac{48\text{ m}}{12\text{ m}} = 4$ indica, por exemplo, que cabem **quatro** veículos com 12 m de comprimento em uma garagem com 48 m de comprimento.
- A razão $\frac{20\text{ m}^2}{0{,}5\text{ m}^2} = 40$ indica, por exemplo, que para cobrir uma superfície de 20 m^2 de área são suficientes **quarenta** pisos de cerâmica com 0,5 m^2 cada um.
- A razão $\frac{700\text{ mL}}{200\text{ mL}} = 3{,}5$ indica, por exemplo, que o conteúdo em uma garrafa com 700 mL enche **três e meio** copos de 200 ml

! Atenção

Propriedades e operações com frações

I. Simplificação de frações.
II. Adição e subtração de frações.
III Multiplicação de frações.
IV. Fração de frações.

Exercícios resolvidos

8 A tabela a seguir apresenta dados sobre a evolução dos preços do barril de petróleo em certa localidade

Ano	Preço
1967	U$ 3
1979	U$ 22
2005	U$ 40
2011	U$ 100

Quantos barris de petróleo poderiam ser adquiridos em 1967 pelo preço de um único barril em 2011?

A 66
B 60
C 33
D 30
E 6

Resolução:

Para responder a essa pergunta, basta calcular o quociente entre o preço de 2011 e o preço em 1967, mas como essa razão não é expressa por um número inteiro $\left(\frac{100}{3} = 33{,}333\right)$, é comum que se dê como resposta um valor inteiro aproximado, ou seja, poderiam ser adquiridos 33 barris

Alternativa: C.

9 **Enem** A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercú rios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos

Revista Veja. Ano 41, no 25, 25 jun. 2008 (adaptado).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

A 406
B 1334
C 4002
D 9338
E 28014

Resolução:

Geometricamente, as informações apresentadas nes sa questão são razões entre os volumes de alguns planetas, e o que se solicita também é outra razão simples entre esses volumes, afinal não seria fisica mente possível colocar um planeta dentro do outro Como nenhum volume é fornecido explicitamente, recomenda se a modelagem algébrica Assim, representar os volumes dos planetas Mercúrio, Terra, Marte, Júpiter e Netuno, respectivamente, pelas siglas Me, Te, Ma, Ju e Ne, permite expressar as razões da das no enunciado da seguinte maneira:

Marte é o segundo menor e nele cabe o equivalente a três Mercúrios: $Ma = 3 \cdot Me \Leftrightarrow \frac{Ma}{Me} = 3$

Terra é o único com vida e comporta o equivalente a sete Martes: $Te = 7 \cdot Ma \Leftrightarrow \frac{Te}{Ma} = 7$

Netuno é o quarto maior e nele cabe o equivalente a 58 Terras: $Ne = 58 \cdot Te \Leftrightarrow \frac{Ne}{Te} = 58$

Júpiter, o maior dos planetas, comporta o equivalente a 23 Netunos: $Ju = 23 \cdot Ne \Leftrightarrow \frac{Ju}{Ne} = 23$

Assim, a razão solicitada de quantas Terras podem ser comportadas por Júpiter deve ser o valor da fração $\frac{Ju}{Te}$

Para obter esse valor, basta analisar as razões $\frac{Ne}{Te}$ e $\frac{Ju}{Ne}$, pois nessa multiplicação ocorre o cancelamento do volume do planeta Netuno. Assim:

$$\frac{\cancel{Ne}}{Te} \cdot \frac{Ju}{\cancel{Ne}} = \frac{Ju}{Te} \Leftrightarrow 58 \cdot 23 = \frac{Ju}{Te} \Leftrightarrow \frac{Ju}{Te} = 1\,334$$

Alternativa: B.

O conceito de taxa

Quando se calcula uma razão simples, dividindo o menor valor pelo maior, a relação de multiplicidade (k < 1) obtida entre grandezas geométricas pode ser interpretada como sendo uma taxa unitária Taxas unitárias indicam qual parte do maior valor é representada pelo menor valor Como se o maior dos valores fosse adotado para ser a unidade de comparação:

- A razão $\frac{1{,}40 \text{ m}}{4{,}20 \text{ m}} = \frac{1}{3}$ indica, por exemplo, que um poste com 1,4 m tem apenas **um terço** da altura de um poste com 4,2 m.
- A razão $\frac{80 \text{ cm}^2}{200 \text{ cm}^2} = 0{,}4$ indica, por exemplo, que uma folha de papel com 80 cm^2 cobre apenas **quatro décimos** de um mural de 200 cm^2.
- A razão $\frac{90 \text{ mL}}{750 \text{ mL}} = 0{,}12$ indica, por exemplo, que 90 mL de água ocupam apenas **12 centésimos** de uma garrafa com 750 mL de capacidade.

Razões da parte para o todo são taxas que podem ser expressas por números racionais na forma fracionária ou decimal, havendo ainda uma terceira forma bastante frequente de representação, que é a forma percentual. As formas decimais e percentuais muitas vezes admitem aproximações:

- $\frac{1}{3} = 0{,}333... \cong 33\%$
- $\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$
- $\frac{3}{25} = 0{,}12 = 12\%$

No estudo da demografia são muito comuns os dados na forma de quociente. Quando se trata do quociente entre populações, as taxas demográficas obtidas são razões simples.

Fazendo algumas aproximações, pode-se considerar que em meados de 2010 a população da China tenha alcançado 1,4 bilhão de habitantes e, nesse mesmo período, a população mundial tenha atingido a incrível marca de 7 bilhões de habitantes. A razão entre as populações da China e do mundo é $q = \frac{1\,400\,000\,000}{7\,000\,000\,000}$ que, em sua forma irredutível, equivale a $q = \frac{1}{5}$. Desse valor, conclui-se que em meados de 2010 a China era povoada por **um** de cada **cinco** habitantes do planeta ou que, a cada **cinco** habitantes do planeta, **um** vivia na China.

Embora o decimal 0,2 represente o mesmo número que a fração $\frac{1}{5}$, fica estranho afirmar, por exemplo, que a China era povoada por 0,2 de cada habitante do planeta. Aqui se percebe a utilidade da representação percentual, que pode ser obtida multiplicando-se por 100 a taxa e acrescentando-se o símbolo % ao resultado:

$$0{,}2 = 0{,}2 \cdot 100\% = 20\%$$

É mais comum transmitir a razão dessas populações usando a taxa percentual, pois a afirmação de que a China era povoada por 20% dos seres humanos é menos abstrata que a anterior, pois se pode imaginar, em termos de números inteiros, que 20 de cada 100 habi tantes do planeta viviam na China, em meados de 2010.

Saiba mais

Razões simples no estudo da Química

Muitas razões simples são usadas para indicar a composição de misturas. Em Química, o termo "título" é usado para nomear razões simples obtidas por quocientes de massas ou de volumes. Tanto o "título em massa" quanto o "título em volume" costumam ser apre sentados como taxas percentuais

Outra razão simples usada na Química é a fração molar que resulta da divisão da quantidade de matéria do soluto pela quantidade de matéria da solução A quantidade de matéria é geralmente expressa em número de mols

1 mol equivale a $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas

Razões compostas

Quando se comparam quantidades de espécies diferentes, como distância e período de tempo ou massa e volume, por exemplo, a comparação deve sempre ser feita na forma de quociente e seu resultado é uma razão composta.

Nesses casos, embora a razão obtida não indique relação de multiplicidade, muitas delas podem ser interpretadas como taxas médias de variação por unidade de tempo ou como concentrações médias por unidade de espaço. Por isso, as razões compostas sempre devem vir acompanhadas de suas unidades específicas, como m/s (metros por segundo) ou g/mL (gramas por mililitro), por exemplo.

Taxas periódicas

As razões compostas por quocientes, entre uma gran deza qualquer não temporal por uma quantidade de tempo, são bastante informativas e têm amplo uso no estudo de diversas ciências. Essas taxas periódicas são conhecidas, entre outros conceitos, como velocidades e vazões

Sejam y_1 e y_2 dois valores reais de uma determinada grandeza e x_1 e x_2 dois instantes quaisquer no tempo, tais que y_1 e y_2 são os respectivos valores da grandeza y nos instantes $x_1 < x_2$.

- A variação da grandeza y no período considerado é:

$$\Delta y = y_2 \quad y_1$$

- A duração do período considerado é:

$$\Delta x = x_2 \quad x_1$$

- A taxa de variação média da grandeza y no período considerado é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 \quad y_1}{x_2 - x_1}$$

FRENTE 2

Exercícios resolvidos

10 A tabela a seguir apresenta dados sobre a evolução de preços do barril de petróleo em certa localidade

Ano	Preço
1967	U$ 3
1979	U$ 22
2005	U$ 40
2011	U$ 100

A taxa de variação anual média do preço do barril de petróleo no período de 1979 a 2005 foi de, aproximadamente,

A 7 centavos de dólar por ano.
B 77 centavos de dólar por ano.
C 7 dólares por ano.
D 7,7 dólares por ano.
E 70 centavos de dólar por ano.

Resolução:

As grandezas relacionadas na tabela são de espécies diferentes: temporal e monetária.

A grandeza temporal é dada em anos: $x_1 = 1979$ e $x_2 = 2005$.

A variação de grandeza temporal é: $\Delta x = x_2 - x_1 = 2005 - 1979 = 26$ anos.

A grandeza monetária está em dólares: $y_1 = 22$ e $y_2 = 40$.

A variação de grandeza monetária é: $\Delta y = y_2 - y_1 = 40 - 22 = 18$ dólares.

A partir das variações das grandezas, temporal e monetária, a taxa de variação anual média do preço do barril de petróleo resulta do quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, assim:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{18}{26} \cong 0{,}6923 \text{ dólares por ano}$$

É importante observar que a taxa periódica encontrada, de aproximadamente 70 centavos de dólar por ano, é apenas uma média e não significa que o aumento ocorreu com esse mesmo valor ano após ano

Alternativa: E.

11 Uma embarcação que partiu da Inglaterra com destino à África do Sul percorreu sua trajetória numa média de 510 léguas a cada 3 dias Considerando que uma légua marítima equivale a 6,6 quilômetros, determine qual o valor da velocidade média, em quilômetros por hora, da embarcação nessa viagem.

Resolução:

Se uma légua marítima equivale a 6,6 km, 510 léguas marítimas equivalem a $510 \cdot 6{,}6 \text{ km} = 3366 \text{ km}$

Como um dia tem 24 horas, temos que 3 dias têm $3 \cdot 24 \text{ h} = 72 \text{ h}$.

Assim, a velocidade média *v* dessa embarcação na referida viagem foi: $v = \frac{3366 \text{ km}}{72 \text{ h}} = 46{,}75 \text{ km/h}$

Concentrações como razões compostas

No estudo da Química, o termo concentração indica a composição de uma mistura. Seus valores são razões que podem ser obtidas por quocientes de grandezas diferentes, como massa ou quantidade de matéria, divididas por alguma grandeza de espaço, como volume ou capacidade

No estudo da Física há uma grandeza chamada densidade que também expressa concentração de massa, não de uma mistura, mas sim de um único corpo A densidade é uma razão composta obtida pelo quociente entre a massa de um determinado corpo pelo seu próprio volume

Múltiplos e submúltiplos das principais unidades de medida são amplamente usados para apresentar as unidades desse tipo de razão composta.

Concentrações em massa podem ser expressas em miligramas por litro (mg/L) ou gramas por centímetro cúbico (g/cm^3), por exemplo. Concentrações por quantidade de matéria são geralmente expressas em mols por litro. No Sistema Internacional, a unidade de densidade é o quilograma por metro cúbico (kg/m^3), mas é bastante comum encontramos densidades expressas em gramas por centímetro cúbico (g/cm^3) ou gramas por mililitro (g/mL).

No estudo da Economia, o conceito de concentração de renda local é uma razão composta obtida pelo quociente de uma grandeza monetária por uma grandeza de área.

No estudo da Geografia, o conceito de concentração faz referência às populações de determinados locais. Densidade demográfica é o nome dado à razão composta obtida pelo quociente entre uma população e a área que ela ocupa.

Exercícios resolvidos

12 **Enem 2016** Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras

Disponível em: www.blog saude gov.br Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é a

A A.
B B.
C C.
D D.
E E.

Resolução:

A concentração é dada pela razão entre a massa de fibras e a massa de pão, que é $\frac{2}{50}, \frac{5}{40}, \frac{5}{100}, \frac{6}{90}$ e $\frac{7}{70}$ para as marcas A, B, C, D e E, respectivamente. Note que $\frac{5}{40}$ é a única maior que 0,1 e, portanto, é a maior, ou seja, a marca escolhida deve ser a B.
Alternativa: B.

13 **Enem 2016** Para garantir a segurança de um grande evento público que terá início às 4 h da tarde, um organizador precisa monitorar a quantidade de pessoas presentes em cada instante. Para cada 2000 pessoas se faz necessária a presença de um policial. Além disso, estima-se uma densidade de quatro pessoas por metro quadrado de área de terreno ocupado. Às 10 h da manhã, o organizador verifica que a área de terreno já ocupada equivale a um quadrado com lados medindo 500. Porém, nas horas seguintes, espera se que o público aumente a uma taxa de 120000 pessoas por hora até o início do evento, quando não será mais permitida a entrada de público.
Quantos policiais serão necessários no início do evento para garantir a segurança?

A 360
B 485
C 560
D 740
E 860

Resolução:

Às 10 horas da manhã, o organizador verificou que a área ocupada equivalia a um quadrado de lado 500 m. Logo, a área do quadrado é:

$$A = 500 \cdot 500 = 25 \cdot 10^4 \text{ m}^2$$

Como a densidade estimada é de 4 pessoas por metro quadrado, conclui se que, às 10 horas da manhã, o número de pessoas era de:

$$N = 4 \cdot 25 \cdot 10^4 = 10^6 \text{ pessoas}$$

Nas horas seguintes, o número de pessoas aumenta a uma taxa de 120000 pessoas por hora. Portanto, o número de pessoas às 16 horas é de:

$$10^6 + 6 \cdot 120000 = 1720000 \text{ pessoas}$$

Para cada 2000 pessoas, deve haver 1 policial, logo:

$$\frac{1720000}{2000} = 860 \text{ policiais}$$

Alternativa: E

Proporção

Toda relação de igualdade entre duas frações estabelece uma proporção. Assim, as proporções são as sentenças matemáticas do tipo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Uma leitura possível é "**a** está para **b** assim como **c** está para **d**".

Em termos algébricos, há equivalência entre uma razão $\left(\frac{a}{b}\right)$ situada no primeiro membro da igualdade e a razão $\left(\frac{c}{d}\right)$ situada no segundo membro. Essa proporção obedece à seguinte nomenclatura:

I. a é o termo antecedente da 1ª razão;
II. b é o termo consequente da 1ª razão;
III c é o termo antecedente da 2ª razão;
IV. d é o termo consequente da 2ª razão.

Além disso:

V. a e d são os termos extremos da proporção;
VI b e c são os termos médios da proporção.

Características básicas

Toda proporção se presta a informar equivalências comparativas entre os valores de duas grandezas, calcu lando se suas razões por meio do quociente Proporções são expressas por sentenças do tipo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, em que dos quatro números reais **a**, **b**, **c** e **d** envolvidos, os números **b** e **d** devem ser diferentes de zero.

Em $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com $b \cdot d \neq 0$, tem se que:

- $a = 0 \Leftrightarrow c = 0$
- $|a| = |b| \Leftrightarrow |c| = |d|$
- $|a| < |b| \Leftrightarrow |c| < |d|$
- $|a| > |b| \Leftrightarrow |c| > |d|$

Se a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é formada por razões simples de números positivos, cujo quociente é maior que uma unidade ($q > 1$), então ela pode ser interpretada da seguinte maneira:

"**b** cabe em **a** tantas vezes quantas **d** cabe em **c**".

Simplificações

A equação gerada por uma proporção pode ser simplificada dividindo-se ambos os termos antecedentes por um mesmo número real não nulo, produzindo assim uma nova relação de proporcionalidade.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \div n}{b} = \frac{c \div n}{d}$$

A equação $\frac{12}{x} = \frac{20}{y}$, por exemplo, pode ser simplificada dividindo-se por 4 cada um dos termos antecedentes, ou seja: $\frac{12 \div 4}{x} = \frac{20 \div 4}{y} \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{y}$

A mesma equação também pode ser simplificada divi dindo-se ambos os termos consequentes por um mesmo número real não nulo

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b \div n} = \frac{c}{d \div n}$$

A equação $\frac{x}{45} = \frac{y}{35}$, por exemplo, pode ser simplificada dividindo se por 5 cada um dos termos consequentes, ou seja: $\frac{x}{45 \div 5} = \frac{y}{35 \div 5} \Leftrightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{7}$.

Há casos em que a simplificação pode ser obtida por uma multiplicação dos termos antecedentes ou dos termos consequentes por um mesmo número real não nulo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \cdot n}{b} = \frac{c \cdot n}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b \cdot n} = \frac{c}{d \cdot n}$$

A equação $\frac{2,5}{x} = \frac{0,75}{y}$, por exemplo, pode ser simplificada multiplicando se por 4 cada um dos termos antecedentes: $\frac{2,5 \cdot 4}{x} = \frac{0,75 \cdot 4}{y} \Leftrightarrow \frac{10}{x} = \frac{3}{y}$.

Produto cruzado

Em uma proporção, o produto dos termos extremos equivale ao produto dos termos médios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Representações

As oito maneiras diferentes de se representar a proporção entre números a, b, c e d geram quatro diferentes razões:

Proporção 1	Proporção 2	Razão
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$	k
$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$	k^{1}
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$	k'
$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$	$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$	k'^{-1}

Exercícios resolvidos

14 **Enem 2011** Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

Época 26 abr 2010 (adaptado)

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.
De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

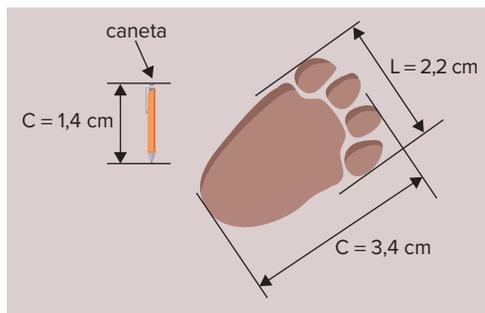
A 4 mil.
B 9 mil.
C 21 mil.
D 35 mil.
E 39 mil

Resolução:

Do enunciado, temos que a proporção de mulheres internadas para a de homens na mesma situação (em milhares) é $\frac{32}{28}$, ou seja, $\frac{8}{7}$. Sendo M (em milhares) o número de homens na nova proporção, temos:

$$\frac{32+8}{M} = \frac{8}{7} \Leftrightarrow 8 \cdot M = 40 \cdot 7 \Leftrightarrow M = \frac{280}{8} = 35$$

Alternativa: D.

15 **Enem 2015** Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada O comprimento da caneta (c), a lar gura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema

A largura e o comprimento reais da pegada, em centí metros, são, respectivamente, iguais a

A 4,9 e 7,6.
B 8,6 e 9,8.
C 14,2 e 15,4.
D 26,4 e 40,8.
E 27,5 e 42,5.

Resolução:

A razão entre o comprimento real da caneta e o de sua foto é: $\frac{16,8}{1,4} = 12$.

Isso significa que as medidas das pegadas são iguais ao que está indicado nas fotos multiplicado por 12:

$$2,2 \cdot 12 = 26,4 \text{ cm}$$
$$3,4 \cdot 12 = 40,8 \text{ cm}$$

Alternativa: D.

Propriedades

Novas razões

Da proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, com $b \cdot d \neq 0$, uma terceira razão equivalente à $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ pode ser obtida somando-se os dois termos antecedentes e os dois termos consequentes das razões originais, desde que as somas não sejam nulas. Assim, se $a + b \neq 0$ e $b + d \neq 0$, tem-se que:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

Demonstração:

Da propriedade do produto cruzado na proporção ori ginal, tem-se:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d=b \cdot c$$

Adicionando o produto $c \cdot d$ aos dois membros da equação:

$$a \cdot d=b \cdot c \Leftrightarrow a \cdot d+c \cdot d=b \cdot c+c \cdot d$$

Fatorando as expressões em cada membro da equação:

$$a \cdot d+c \cdot d=b \cdot c+c \cdot d \Leftrightarrow (a+c) \cdot d=(b+d) \cdot c$$

Como d e (b + d) são diferentes de zero, dividindo-se ambos os membros da equação por $(b + d) \cdot d$ e simplificando cada razão, teremos:

$$\frac{(a+c) \cdot d}{(b+d) \cdot d}=\frac{(b+d) \cdot c}{(b+d) \cdot d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$$

Esse procedimento pode ser executado inúmeras vezes, gerando sempre novas razões equivalentes às razões anteriores:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{2a+c}{2b+d}=\frac{3a+2c}{3b+2d}=\ldots$$

Também é possível aplicar essa propriedade a proporções formadas por três ou mais razões:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$$

Novas proporções

De uma proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, com $b \cdot d \neq 0$, novas proporções podem ser obtidas somando-se os consequentes aos antecedentes de cada razão. As razões relacionadas nessa nova proporção não devem ter o mesmo valor das razões originais.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

Para demonstrar essa proposição basta somar 1 aos dois membros da equação e efetuar a soma das frações:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

Outra forma de se obter novas proporções é somando-se os antecedentes aos consequentes de cada razão.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$$

Essa propriedade também pode ser aplicada inúmeras vezes, produzindo uma infinidade de proporções. Assim, quaisquer que sejam os números não nulos m, n, p e q, satisfazendo $p \cdot a+q \cdot b \neq 0$ e $p \cdot c+q \cdot d \neq 0$, tem-se:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{n \cdot a+m \cdot b}{p \cdot a+q \cdot b}=\frac{n \cdot c+m \cdot d}{p \cdot c+q \cdot d}$$

Porcentagens

As primeiras formas percentuais de representação de razões e proporções surgiram na Antiguidade romana, quando o ostensivo modo de vida dos imperadores era sustentado pelos impostos cobrados de cada cidadão

Na época e local, as transações comerciais eram ta xadas pelo estado em termos de razões centesimais de forma padronizada. Por exemplo, as riquezas herdadas por uma pessoa, no caso de morte de um parente, eram ta xadas em "XIII *per centus*", forma antiga para o que hoje representamos como 13%.

O que não deve ter mudado muito daquela época para a atual são as formas como as porcentagens são calcu ladas. Uma dessas formas consiste em dividir o valor do bem transferido em uma centena de partes iguais e tomar exatamente treze dessas partes.

Para calcular, por exemplo, a porcentagem de 13% so bre uma riqueza herdada de 46 mil *aureus* (moeda romana usada entre os séculos II a C. e III d.C), divide-se 46000 por 100 e multiplica-se o quociente obtido por 13, obtendo-se:

$$\begin{cases} 46000 : 100 = 460 \\ 460 \cdot 13 = 5980 \end{cases}$$

Assim, tem se que a quantia de 5980 *aureus* repre senta 13% de 46 mil *aureus*.

Outra forma de fazer isso é dividir 13 por 100, obtendo o que chamamos de taxa unitária, e multiplicar essa taxa pelo valor principal de 46 mil *aureus*: $\begin{cases} 13 : 100 = 0,13 \\ 0,13 \cdot 46000 = 5980 \end{cases}$

Exercícios resolvidos

16 Calcule as seguintes porcentagens:

a) 7% de R$ 180,00

b) 15% de 540 L

c) 25% de 400 pessoas

Resolução:

a) $\frac{7}{100} \cdot 180 = 0,07 \cdot 180 = \text{R\$ } 12,60$

b) $\frac{15}{100} \cdot 540 = 0,15 \cdot 540 = 81 \text{ L}$

c) $\frac{25}{100} \cdot 400 = 0,25 \cdot 400 = 100 \text{ pessoas}$

FRENTE 2

17 Dos 750 alunos de um colégio, 420 são garotas. Qual a porcentagem de rapazes nesse colégio?

Resolução:

O número de rapazes é 750   420 = 330.

A porcentagem de rapazes é $\frac{330}{750} = \frac{11}{25} = 0,44 = 44\%$

18 Se dois quintos da mesada de Aline equivalem a 20% da mesada de Beatriz, então:

A a mesada de Aline é igual ao dobro da mesada de Beatriz.
B a mesada de Beatriz é igual ao dobro da mesada de Aline.
C a mesada de Aline é igual ao triplo da mesada de Beatriz.
D a mesada de Beatriz é igual ao triplo da mesada de Aline.
E a metade da mesada de Aline é igual ao dobro da mesada de Beatriz

Resolução:

Sendo A e B os respectivos valores das mesadas de Aline e Beatriz, do enunciado temos que $\frac{2}{5} \cdot A = 20\% \cdot B$.

Como $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, temos: $\frac{2}{5} \cdot A = \frac{1}{5} \cdot B \Leftrightarrow 2A = B$.

Portanto, a mesada de Beatriz é igual ao dobro da mesada de Aline.
Alternativa: B.

Apresentação de taxas

O valor de uma grandeza, razão simples ou razão composta, pode ser representado de forma exata ou de forma aproximada. Em muitos casos, para representar alguns valores de forma exata, é necessário que sejam usadas frações ou mesmo números irracionais. Porém, para as aproximações, usa-se apenas a forma decimal dos números racionais, muitas vezes com somente duas casas, como é o caso da notação financeira.

Os países de língua latina herdaram a prática centesimal dos antigos romanos, enquanto alguns países de língua inglesa aos poucos foram mudando sua forma de representação e adaptando-se a esse padrão decimal de representação, mas ainda hoje os norte-americanos referem-se à sua moeda de 25 centavos como sendo de um quarto de dólar $\left(\frac{1}{4} = 0,25\right)$.

O valor dessa moeda é apenas uma pequena parte do dólar. Sendo assim, esse valor representa uma taxa dessa unidade monetária.

- Na forma fracionária, a taxa de $\frac{1}{4}$ indica que a moeda possui apenas **uma** das **quatro** partes iguais que somam um dólar
- Na forma decimal, o numeral 0,25 é denominado taxa unitária e indica que a moeda possui 25 centésimos da unidade monetária.

O numeral 0,25 também indica que essa moeda tem 25% do valor de um único dólar. Aqui a representação 25% é denominada taxa percentual

O símbolo **%** indica a divisão de uma quantia em exatamente 100 partes iguais.

Escreve-se o símbolo % à direita de um valor numérico como forma alternativa para a representação de uma fração centesimal, ou seja, $25\% = \frac{25}{100}$.

As formas mais usadas para a representação das partes de um todo são as taxas unitárias e as taxas percentuais. As taxas unitárias são números racionais compreendidos no intervalo entre os números 0 e 1. Note que $0 < 0,25 < 1$. As taxas percentuais são números racionais compreendidos entre 0 e 100, seguidos do símbolo de porcentagem (%). Note que $0\% < 25\% < 100\%$.

Encontra-se a taxa unitária dividindo-se o valor absoluto da parte de uma quantia pelo seu valor total. Considere, por exemplo, que em uma sala de aula há 92 alunos e que apenas 23 são rapazes. A taxa unitária de rapazes nessa sala é expressa por $\frac{23}{92} = 0,25$.

Uma taxa unitária pode ser transformada em taxa per centual se for multiplicada por 100. Ao fazer isso, deve-se acrescentar o símbolo da porcentagem à notação:

$$0,25 = 100 \cdot 0,25\ \% = 25\%$$

Uma taxa percentual pode ser transformada em taxa unitária se for dividida por 100. Ao fazer isso, deve-se eli minar o símbolo da porcentagem:

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

Calcula-se uma porcentagem de determinado valor multiplicando-se o valor total dessa grandeza pela taxa per centual e, depois, dividindo-se o produto obtido por 100. Por exemplo, para se calcular quantos alunos correspondem a 25% de 92 alunos, fazemos $\frac{25}{100} \cdot 92 = \frac{2300}{100} = 23$ alunos.

Calcula se uma porcentagem de outra porcentagem multiplicando-se a taxa unitária correspondente a uma das porcentagens pela taxa percentual correspondente a outra. Por exemplo:

30% de 70%: $0,3 \cdot 70\% = 0,7 \cdot 30\% = 21\%$
60% de 50%: $0,6 \cdot 50\% = 0,5 \cdot 60\% = 30\%$

Exercício resolvido

19 Escreva em forma de porcentagem os resultados dos seguintes cálculos:

a) $(90\%)^2$
b) $\sqrt{81\%}$
c) 90% de 80%

Resolução:

a) $(90\%)^2 = \left(\frac{90}{100}\right)^2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100} = 81\%$

b) $\sqrt{81\%} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10} = \frac{90}{100} = 90\%$

c) 90% de 80%: $0,9 \cdot 80\% = 72\%$

Taxas unitária e percentual

Chamam-se taxas unitárias às razões simples, que são obtidas por quocientes entre as partes de uma determinada quantia e o valor total dessa quantia.

$$\text{Taxa unitária} = \frac{\text{parte}}{\text{todo}}$$

Chamam-se taxas percentuais os numerais que precedem o símbolo % nas representações padronizadas das razões simples como frações centesimais Sendo assim:

$$\text{Taxa percentual} = 100 \cdot \text{Taxa unitária}$$

Exercícios resolvidos

20 Represente as seguintes porcentagens como taxas unitárias.

a) 22%
b) 20%
c) 2%
d) 200%
e) 2,2%
f) 0,2%

Resolução:

a) 22% = 22 : 100 = 0,22
b) 20% = 20 : 100 = 0,20 = 0,2
c) 2% = 2 : 100 = 0,02
d) 200% = 200 : 100 = 2
e) 2,2% = 2,2 : 100 = 0,022
f) 0,2% = 0,2 : 100 = 0,002

21 Represente as seguintes taxas unitárias como porcentagens.

a) 0,75
b) 0,7
c) 0,05
d) 0,075
e) 1,5
f) 3

Resolução:

a) $0,75 = 0,75 \cdot 100\% = 75\%$
b) $0,7 = 0,7 \cdot 100\% = 70\%$
c) $0,05 = 0,05 \cdot 100\% = 5\%$
d) $0,075 = 0,075 \cdot 100\% = 7,5\%$
e) $1,5 = 1,5 \cdot 100\% = 150\%$
f) $3 = 3 \cdot 100\% = 300\%$

22 **Enem** Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% deles foram completamente curados Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.
Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de:

A 16%.
B 24%
C 32%.
D 48%.
E 64%.

Resolução:

Chamando de p o número de pacientes inicialmente submetidos ao tratamento tradicional, usando-se a representação das taxas unitárias tem-se que a expressão $0,4 \cdot p$ representa o número de pacientes inicialmente curados e a expressão $0,6 \cdot p$ representa o número de pacientes divididos em dois grupos e, como esses grupos devem ter a mesma quantidade de pacientes, a expressão $0,3 \cdot p$ representa essa quantidade.
Assim, de acordo com o enunciado, o número de pacientes curados pelos tratamentos inovadores pode ser expresso por:

$$0,35 \cdot 0,3 \cdot p + 0,45 \cdot 0,3 \cdot p = (0,35 + 0,45) \cdot 0,3 \cdot p = \\ = 0,8 \cdot 0,3 \cdot p = 0,24 \cdot p$$

Portanto, os tratamentos inovadores proporcionaram a cura de 24% dos pacientes inicialmente submetidos ao tratamento tradicional.
Alternativa: B.

23 **UFV** Uma indústria tem matriz na capital e duas filiais, I, II no interior do estado. Na matriz trabalham 45% dos funcionários e na filial I, 30%. Uma porcentagem de 36% dos funcionários da indústria optou por um determinado plano de saúde Sabendo-se que 25% dos funcionários da capital e 30% dos funcionários da filial I optaram por esse plano, a porcentagem dos funcionários da filial II que também optaram pelo plano é:

A 67%
B 63%
C 59%
D 51%

Resolução:

Chamando de p a porcentagem dos funcionários da filial II que também optaram pelo plano, do enunciado temos que:

$$25\% \cdot 45\% + 30\% \cdot 30\% + p \cdot (100\% = 45\% \quad 30\%) \quad 36\%$$
$$0,25 \cdot 0,45 + 0,30 \cdot 0,30 + p \cdot (1 - 0,45 - 0,30) = 0,36$$
$$0,1125 + 0,09 + 0,25 \cdot p = 0,36$$
$$0,25 \ p \quad 0,36 \quad 0,2025$$
$$p = \frac{0,1575}{0,25}$$
$$p = 0,63 = 63\%$$

Alternativa: B

24 Uma liga metálica de 50 kg é composta de 40% de chumbo e 60% de estanho. Quantos quilogramas de chumbo devem ser acrescentados a essa liga para que a porcentagem de estanho se reduza a apenas 30%?

Resolução:

A massa atual de chumbo na liga é de 40% dos 50 kg, ou seja, $0,4 \cdot 50 = 20$ kg
Se a porcentagem de estanho deve se reduzir a 30% então, a porcentagem de chumbo deve, necessariamente,

FRENTE 2

subir para 100% 30% = 70%. Assim, sendo x a massa, em kg, de chumbo que deve ser acrescentada:

$$\frac{20+x}{50+x} = \frac{70}{100}$$
$$100(20+x) = 70(50+x)$$
$$2000+100x = 3500+70x$$
$$100x = 70x \quad 3500 \quad 2000$$
$$30x = 1500$$
$$x = 50$$

Portanto, devem ser acrescentados 50 kg de chumbo a essa liga.

! Atenção

Taxa de lucro/prejuízo

Há duas maneiras distintas de se expressar a taxa de lucro (ou pre juízo) obtido em uma transação comercial do tipo compra e venda

Uma delas é calculada tendo como referência o preço de compra ou custo, e a outra, tendo como referência o preço de venda. Veja como a formação das frações que representam essas razões simples segue literalmente cada designação

$$\text{Taxa de lucro sobre o valor de compra} = \frac{\text{Lucro}}{\text{Valor de compra}}$$

$$\text{Taxa de lucro sobre o valor de venda} = \frac{\text{Lucro}}{\text{Valor de venda}}$$

Exercício resolvido

25 Em uma transação comercial, um produto que custou R$ 400,00 para o comerciante foi vendido por R$ 500,00.

a) Qual é o valor do lucro nominal nesta transação comercial?

b) Qual é a taxa percentual de lucro sobre o preço de custo?

c) Qual é a taxa percentual de lucro sobre o preço de venda?

Resolução:

a) Lucro nominal: R$ 500,00 R$ 400,00 = R$ 100,00

b) Taxa de lucro sobre o preço de custo:

$$\frac{\text{R\$ } 100,00}{\text{R\$ } 400,00} = 0,25 = 25\%$$

c) Taxa de lucro sobre o preço de venda:

$$\frac{\text{R\$ } 100,00}{\text{R\$ } 500,00} = 0,2 = 20\%$$

Aumentos e reduções

A variação de uma grandeza, em um determinado período, é dada pela diferença entre o valor da grandeza ao final do período e o seu valor no início do período.

Considere o período em que uma determinada grandeza teve:

- Valor inicial: V_I
- Valor final: V_F

Assim, o valor nominal da variação dessa grandeza é: $\Delta V = V_F \quad V_I$.

Quando positiva, a variação de uma grandeza é chamada de aumento nominal e, quando negativa, é chamada de redução nominal.

- $\Delta V > 0$ indica que houve aumento no valor da grandeza observada.
- $\Delta V < 0$ indica que houve redução no valor da grandeza observada.

Quando, no período considerado, tem-se $\Delta V = 0$, não se deve concluir que o valor da grandeza se manteve constante. É bem provável que os aumentos e reduções ocorridos durante o período anularam-se uns aos outros, fazendo o valor final da grandeza coincidir com o seu valor inicial ($V_F = V_I$).

! Atenção

No estudo da Matemática Financeira, o valor final resultante de um ou mais aumentos também é chamado de montante acumulado.

As variações nos valores de grandezas também podem ser informadas por taxas percentuais ou unitárias, sejam elas referentes a aumentos ou reduções. Nesses casos costuma se tomar como referência o valor inicial da gran deza que sofreu a variação.

Se $\Delta V > 0$, a taxa unitária de aumento é dada pela razão simples: $\frac{\Delta V}{V_I}$.

$$\frac{\Delta V}{V_I} = \frac{V_F \quad V_I}{V_I} = \frac{V_F}{V_I} \quad \frac{V_I}{V_I} = \frac{V_F}{V_I} \quad 1$$

Se $\Delta V < 0$, a taxa unitária de redução é dada pela razão simples: $\frac{\Delta V}{V_I}$.

Se $\Delta V = 0$, a taxa de variação também é nula

Exercícios resolvidos

Leia a notícia a seguir para responder às próximas duas questões:

Piauí apresenta crescimento de 4,32% na geração de novos empregos

O Caged (Cadastro Geral de Empregados e Desempregados) divulgou recentemente dados referentes ao saldo de emprego e desemprego no Estado do Piauí, acumulados nos 12 meses do ano passado O resultado foi positivo em relação ao mesmo período de 2013, vez que o montante de postos de trabalho foi de 11 692, correspondendo a um aumento de 4,32%.

Segundo os dados do CAGED, em janeiro de 2014 foram eliminados 135 empregos cele tistas, equivalentes a uma redução de 0,05% em relação ao estoque de assalariados com carteira assinada do mês anterior

26 Tomando como base as informações da notícia, pode-se concluir que o número de postos de trabalho no estado do Piauí, criados durante o período considerado, foi de, aproximadamente:

A 480 postos.
B 570 postos.
C 660 postos.
D 750 postos.
E 840 postos.

Resolução:

O primeiro parágrafo dessa notícia informa a ocorrência de um aumento percentual de 4,32% no número de postos de trabalho, e como o termo montante sempre faz referência ao valor final da grandeza em questão,

é correto concluir que: $\begin{cases} V_F = 11\,692 \\ \dfrac{\Delta V}{V_I} = 4,32\% \end{cases}$

Como $\Delta V = V_F \quad V_I$, pode-se concluir que:

$$\frac{V_F \quad V_I}{V_I} = 0,0432.$$

Substituindo-se V_F por 11692, obtém-se a equação:

$$\frac{11\,692 \quad V_I}{V_I} = 0,0432$$
$$11\,692 - V_I = 0,0432 \cdot V_I$$
$$11\,692 = 0,0432 \cdot V_I + V_I$$
$$11\,692 = 1,0432 \cdot V_I$$
$$V_I = \frac{11\,692}{1,0432} \cong 11\,208$$

Portanto, de acordo com a notícia, no início do período considerado, o número de postos de trabalho no estado do Piauí foi de, aproximadamente, 11 208.
Além disso, também é correto concluir que o aumento nominal no número de postos de trabalho no período considerado de 2013 a 2014 foi $\Delta V = V_F \quad V_I =$ $= 11\,692 \quad 11\,208 = 484$, o que torna consistente o argumento de que no estado Piauí foram criados 484 novos empregos durante esse período.
Alternativa: A.

27 Ainda com base nas informações da notícia, o número de empregos celetistas, no estado do Piauí, em janeiro de 2013 era de

A 330 mil.
B 300 mil
C 270 mil
D 240 mil.
E 210 mil.

Resolução:

O segundo parágrafo da notícia informa a ocorrência de uma redução nominal de 135 empregos celetistas no período de um único mês, e que essa redução representa um percentual de 0,05% em relação aos meses de dezembro de 2013 e janeiro de 2014.

Dessas informações, é correto concluir que no período de um mês: $\begin{cases} \dfrac{\Delta V}{V_I} = 0,05\% \\ \Delta V = 135 \end{cases}$.

Assim, substituindo-se ΔV por 135 na primeira equação do sistema, tem-se que:

$$\frac{135}{V_I} = \frac{0,05}{100}$$
$$0,05 \cdot V_I = 135 \cdot 100$$
$$V_I = \frac{13500}{0,05} = 270000$$

Portanto, da notícia é correto concluir que havia 270 mil empregos celetistas no Piauí em janeiro de 2013.
Alternativa: C.

Fator de correção

O montante ou valor final que resulta de um único aumento de taxa p% é expresso por:

$$V_F = V_I + p\% \cdot V_I$$

Fatorando essa expressão tem-se $V_F = (1 + p\%) \cdot V_I$.

O montante ou valor final que resulta de uma única redução de taxa p% é expresso por:

$$V_F = V_I - p\% \cdot V_I$$

Fatorando essa expressão tem-se $V_F = (1 \quad p\%) \cdot V_I$.

As expressões do tipo $\left(1 \pm \dfrac{p}{100}\right)$ presentes nas fórmulas $V_F = \left(1 \pm \dfrac{p}{100}\right) \cdot V_I$, do montante acumulado, são chamadas de fatores de correção. Assim:

- Para aumentos de p%, tem-se um fator de aumento $F_A = 1 + \dfrac{p}{100}$
- Para reduções de p%, tem-se um fator de redução $F_R = 1 \quad \dfrac{p}{100}$.

Assim, com o auxílio desses fatores de correção, o montante final pode ser calculado efetuando-se uma única multiplicação:

$$V_F = V_I \cdot F$$

Esses fatores de correção podem ser facilmente encontrados se considerarmos que, inicialmente, qualquer valor é igual a 100% de si mesmo Depois, basta somar ou subtrair as taxas percentuais p e efetuar a divisão por 100. Veja nos quadros a seguir como encontrar os fatores de correção para uma taxa de 30%

Aumento de 30%	Redução de 30%
F > 1	**0 < F < 1**
Valor inicial → 100% +	Valor inicial → 100% −
Aumento → 30%	Aumento → 30%
130% ⇒ F = 1,3	70% ⇒ F = 0,7

FRENTE 2

Exercícios resolvidos

28 Escreva os fatores de correção referentes a:

a) um aumento de 30%
b) um aumento de 8%
c) um aumento de 300%
d) um desconto de 20%
e) um desconto de 80%
f) um desconto de 8%
g) um desconto de 1,25%

Resolução:

a) $F = 1 + 30\% = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$
b) $F = 1 + 8\% = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$
c) $F = 1 + 300\% = 1 + 3 = 4$
d) $F = 1 \quad 20\% = 1 \quad 0{,}2 = 0{,}8$
e) $F = 1 \quad 80\% = 1 \quad 0{,}8 = 0{,}2$
f) $F = 1 \quad 8\% = 1 \quad 0{,}08 = 0{,}92$
g) $F = 1 - 1{,}25\% = 1 - 0{,}0125 = 0{,}9875$

29 Determine se são referentes a aumentos ou reduções os fatores de correção a seguir e identifique suas taxas percentuais.

a) 1,23 c) 1,2 e) 0,9
b) 1,03 d) 2,1 f) 0,25

Resolução:

a) Como $F > 1$ tem-se: $1 + p\% = 1{,}23 \Leftrightarrow p\% = 0{,}23 = 23\%$.
O fator de correção 1,23 representa um aumento de 23%

b) Como $F > 1$ tem-se: $1 + p\% = 1{,}03 \Leftrightarrow p\% = 0{,}03 = 3\%$.
O fator de correção 1,03 representa um aumento de 3%.

c) Como $F > 1$ tem-se: $1 + p\% = 1{,}2 \Leftrightarrow p\% = 0{,}2 = 20\%$.
O fator de correção 1,2 representa um aumento de 20%.

d) Como $F > 1$ tem-se: $1 + p\% = 2{,}1 \Leftrightarrow p\% = 1{,}1 = 110\%$.
O fator de correção 2,1 representa um aumento de 110%

e) Como $F < 1$ tem-se: $1 \quad p\% = 0{,}9 \Leftrightarrow p\% = 0{,}1 = 10\%$.
O fator de correção 0,9 representa uma redução de 10%.

f) Como $F < 1$ tem-se: $1 \quad p\% = 0{,}25 \Leftrightarrow p\% = 0{,}75 = 75\%$.
O fator de correção 0,25 representa uma redução de 75%.

30 **Fuvest** A função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mercadoria é:

A $f(x) = x \quad 3$
B $f(x) = 0{,}97x$
C $f(x) = 1{,}3x$
D $f(x) = \quad 3x$
E $f(x) = 1{,}03x$

Resolução:

Como o fator de correção de um desconto de 3% é 0,97 temos que $f(x) = 0{,}97x$.
Alternativa: B.

31 Uma mercadoria recebeu um aumento de 35%, passando a custar R$ 702,00. Determine:

a) Qual era o preço dessa mercadoria antes do aumento?
b) Qual será o preço dessa mercadoria se receber um desconto de 35% sobre o seu valor atual?

Resolução:

a) Sendo P, o preço antes do aumento, temos:

$$1{,}35 \cdot P = 702 \Leftrightarrow P = \frac{702}{1{,}35} \Leftrightarrow P = 520$$

O preço da mercadoria antes do aumento era de R$ 520,00.

b) Aplicando um desconto de 35%, sobre o valor atual, temos: $(1 - 0{,}35) \cdot 702 = 0{,}65 \cdot 702 = 456{,}30$.
Se receber um desconto de 35% sobre o valor atual, a mercadoria custará R$ 456,30.

32 **UFMG** O preço de venda de determinado produto tem a seguinte composição: 60% referentes ao custo, 10% referentes ao lucro e 30% referentes a impostos
Em decorrência da crise econômica, houve um aumen to de 10% no custo desse produto, porém, ao mesmo tempo, ocorreu uma redução de 20% no valor dos impostos.
Para aumentar as vendas do produto, o fabricante decidiu, então, reduzir seu lucro à metade.

É **CORRETO** afirmar, portanto, que, depois de todas essas alterações, o preço do produto sofreu **redução** de

A 5%
B 10%
C 11%
D 19%

Resolução:

Sendo V o preço inicial e V' o preço final dessa mer cadoria, temos:

$$\begin{array}{llllll}
V' = & \text{Custo de produção} & + & \text{Lucro} & + & \text{Imposto} \\
V' = & 60\% \cdot v & + & 10\% \cdot V & + & 30\% \cdot V \\
 & \downarrow^{(+10\%)} & & \downarrow^{(-50\%)} & & \downarrow^{(-20\%)} \\
V' = & 1{,}1 \cdot 0{,}60 \cdot V & + & 0{,}5 \cdot 0{,}10 \cdot V & + & 0{,}8 \cdot 0{,}30 \cdot V \\
V' = & 0{,}66 \cdot V & + & 0{,}05 \cdot V & + & 0{,}24 \cdot V = 0{,}95 \cdot V
\end{array}$$

Logo, o preço do produto sofreu uma redução de 5% no seu valor.

Alternativa: A.

33 Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo igual a X. Porém, ele prepara a tabela de preços de venda

acrescentando 40% ao preço X, pois sabe que o cliente gosta de obter desconto no momento da compra. Qual, dentre as alternativas a seguir, apresenta o maior desconto que ele pode conceder a um cliente, sobre o preço de tabela, de modo a não ter prejuízo?

A 40%
B 35%
C 28%
D 25%
E 18%

Resolução:

Sendo T o preço de tabela, temos que $T = 1,4 \cdot X$.
Sendo D o valor nominal do maior desconto possível, temos que $T - D = X$.
Logo, $D = 0,4 \cdot X$ e, portanto, o desconto percentual sobre o preço de tabela é $\frac{D}{T} = \frac{0,4 \cdot X}{1,4 \cdot X} \cong 28,57\%$.
Alternativa: C.

Em situações em que o valor inicial V_I de uma grandeza sofre dois ou mais aumentos e/ou reduções sucessivas, o produto dos fatores de correção associados pode ser usado para se determinar uma única taxa de variação que seja equivalente à aplicação de todas as outras

Indicando por (F_1, F_2, F_3, ...) a sequência dos fatores de correção correspondentes aos aumentos ou reduções ocorridas, o montante final, após a incidência de todos eles, será dado por:

$$V_F = V_I \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot ... \Leftrightarrow \frac{V_F}{V_I} = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot ...$$

Indicando por F o fator de correção equivalente a todas essas alterações:

$$V_F = V_I \cdot F \Leftrightarrow F = \frac{V_F}{V_I}$$

Das equações anteriores, tem-se que $F = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot ...$.

Sendo **p** a taxa percentual de variação equivalente a todas as possíveis alteração no valor da grandeza estudada, tem se:

$$1 + \frac{p}{100} = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{100} = (F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \quad) \Leftrightarrow$$
$$= 00 \cdot [(F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot ...) - 1]$$

Analisando essa expressão, da propriedade comu tativa da multiplicação, pode-se concluir que tanto a taxa equivalente quanto o valor final de uma grandeza, após a ocorrência de diversos aumentos e/ou reduções, não depende da ordem de ocorrência dos aumentos e/ou reduções individuais.

Exercícios resolvidos

34 Enem 2012 Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	taxa de glicose maior que a 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que a 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes melito	taxa de glicose maior que a 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse labora tório e comprovou que estava com hiperglicemia Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL Seu médico pres creveu um tratamento em duas etapas Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular sua taxa de glicose após as duas redu ções, o paciente verificou que estava na categoria de:

A hipoglicemia
B normal
C pré-diabetes
D diabetes melito
E hiperglicemia.

Resolução:

Os fatores de correção referentes às reduções ocorridas são:

$F_1 = 100\% - 30\% = 70\% = 0,7$

$F_2 = 100\% - 10\% = 90\% = 0,9$

Assim, pode-se calcular o valor final da taxa de glicose após as etapas do tratamento efetuando-se o produto:

$$V_F = F_1 \cdot F_2 \cdot V_I = 0,7 \cdot 0,9 \cdot 300 \text{ mg/dL} = 189 \text{ mg/dL}$$

Portanto, o paciente estava na categoria de diabetes melito.
Alternativa: D.

35 Enem 2013 A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: www arq.ufsc.br. Acesso em: 3 mar 2012

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%.

Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em:

A 4%
B 20%
C 36%
D 64%
E 96%

Resolução:

A área de um retângulo é igual ao produto entre as medidas de seus lados perpendiculares Então, sendo x e y as medidas desses lados, a área inicial desse retângulo fica expressa por:

$$A_I = x \cdot y$$

Como todos os lados do retângulo sofreram uma redução de 20% e o fator de correção referente a essa redução é F = 100% – 20% = 80% = 0,8, pode-se concluir que a área final desse retângulo fica expressa por:

$$A_F = 0{,}8 \cdot x \cdot 0{,}8 \cdot y$$
$$A_F = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot x \cdot y$$
$$A_F = 0{,}64 \cdot A_I$$

Então, interpretando-se corretamente o fator de correção 0,64 da área desse retângulo, pode-se concluir que houve uma redução de 36% no valor dessa grandeza
Alternativa: C.

Propriedades dos fatores de correção

Sendo F o fator de correção da alteração no valor de uma grandeza:

- **F > 1** indica que ocorreu um aumento no valor da grandeza;
- **F < 1** indica que ocorreu uma redução no valor da grandeza;
- **F = 1** indica que a grandeza continua com seu valor inicial;
- Não existe fator de correção negativo.

Sendo F_A e F_R os respectivos fatores de correção de um aumento e de um desconto de mesma taxa percentual p%, temos que $F_A + F_R = 2$.

Demonstração:

$$F_A + F_R = 1 + \frac{p}{100} + 1 - \frac{p}{100} = 2$$

Um aumento e um desconto sucessivos de mesma taxa percentual p% não se anulam, gerando sempre uma redução de $\left(\frac{p^2}{100}\right)\%$.

$$F_A \cdot F_R = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 \quad \frac{p}{100}\right) = 1 \quad \frac{p^2}{10000} = \quad 1 \quad \frac{p^2}{100}\%$$

Para que um aumento percentual anule uma redução percentual, os fatores de correção associados devem ser recíprocos (inversos multiplicativos) um do outro, ou seja, $F_R = \frac{1}{F_A}$. Nesse caso:

$$F_A \cdot F_R = 1$$

Então, sendo que p_A e p_R são as respectivas taxas de aumento e redução percentual capazes de se anular quando aplicadas sucessivamente:

$$F_A \cdot F_R = 1 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{p_A}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{p_R}{100}\right) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{100 + p_A}{100}\right) \cdot \left(\frac{100 - p_R}{100}\right) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (100 + p_A) \cdot (100 \quad p_R) = 10\,000 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 100 + p_A = \frac{10\,000}{100 - p_R} \Leftrightarrow p_A = \frac{10\,000}{100 - p_R} \quad 100$$

Exercícios resolvidos

36 **Fuvest** Aumentando-se os lados a e b de um retângulo de 15% e 20% respectivamente, a área do retângulo é aumentada de

A 35%
B 30%
C 3,5%
D 3,8%
E 38%

Resolução:

$$\begin{cases} F_1 = 1 + 15\% = 1{,}15 \\ F_2 = 1 + 20\% = 1{,}20 \end{cases} \Rightarrow F_1 \cdot F_2 = 1{,}15 \cdot 1{,}20 = 1{,}38$$

Portanto, a área sofreu um aumento de 38%.
Alternativa: E.

37 Uma montadora recebeu um enorme pedido de veículos das concessionárias de automóveis Para suprir a demanda, teve de aumentar em 20% o seu quadro de funcionários. Nos meses seguintes à entrega do pedido, a montadora não recebeu nenhum outro pedido de tal porte e a direção da empresa decidiu por demitir certa porcentagem de seus empregados à época, ficando com a mesma quantia de funcionários anterior ao grande pedido A porcentagem de empregados demitidos é de, aproximadamente,

A 20
B 18,5
C 16,7
D 15
E 14,3

Resolução:

O fator de correção do aumento é $F_A = 1 + 20\% = 1{,}2$
Sendo p a taxa percentual de redução, tem-se: $F_R = 1 \quad p\%$.
Como as alterações se anulam, temos que $F_A \cdot F_R = 1$, logo:

$$1{,}2 \cdot (1 - p\%) = 1 \Leftrightarrow 1 - p\% = \frac{1}{1{,}2} \Leftrightarrow 1 - p\% \cong 0{,}833 \Leftrightarrow$$
$$\cong p\% \quad \Leftrightarrow 0{,}833 \cong \quad \% \cong 0{,}167 \quad 16{,}7\%$$

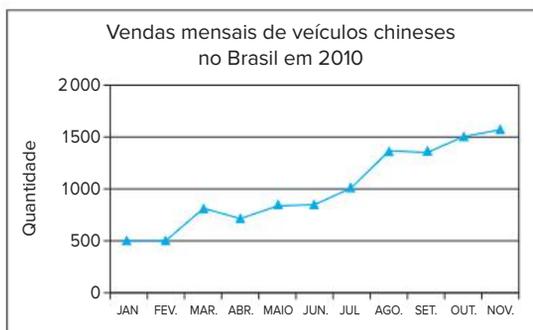
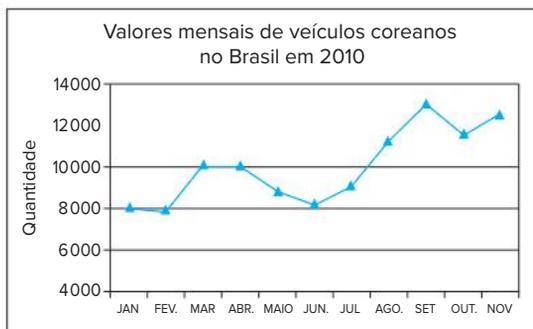
Alternativa: C.

Revisando

1 **Enem 2015** Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm. Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de

A 2,099.
B 2,96.
C 3,021.
D 3,07.
E 3,10.

2 Uma pesquisa mostra que as vendas de importados da Ásia, em especial da China e Coreia do Sul, cresceram bem mais que o mercado como um todo, de janeiro a novembro de 2010. Os chineses, apesar de volumes relativamente baixos, cresceram 220% este ano e os coreanos 56%. Os gráficos mostram a evolução das vendas dos dois países aqui:

Fonte: http://www.contagiros.com.br/vendas–de–carros–chineses–aumentaram–220–e–coreanos–56–somente–em–2010/

De acordo com os gráficos é correto afirmar que no Brasil o número de carros chineses vendidos em outubro de 2010 ficou próximo

A do triplo do número de carros coreanos vendidos no mesmo mês.
B do quíntuplo do número de carros coreanos vendidos no mesmo mês.
C da metade do número de carros coreanos vendidos no mesmo mês.
D de um quarto do número de carros coreanos vendidos no mesmo mês.
E de um oitavo do número de carros coreanos vendidos no mesmo mês.

3 Os refrescos da marca Bolha Bola são vendidos em latas de três tipos diferentes A tabela a seguir mostra o preço e a capacidade de cada tipo de lata de Bolha Bola em um mesmo supermercado.

Tipo	Capacidade	Preço
Pequena	350 mL	R$ 3,00
Média	473 mL	R$ 4,00
Grande	550 mL	R$ 5,00

Uma pessoa vai ao supermercado comprar refres cos da marca Bolha–Bola pretendendo gastar exatos R$ 60,00. A melhor opção de compra para que essa pessoa leve para casa a maior quantidade de refresco é composta:

A apenas de latas pequenas.
B apenas de latas médias.
C apenas de latas grandes.
D algumas latas pequenas e algumas médias.
E algumas latas médias e algumas grandes.

4 A tabela a seguir apresenta, com dados de 2007, as populações aproximadas e os valores das áreas territoriais de cinco países europeus:

	Área (em km²)	População (em milhões de pessoas)
Irlanda	70280	4,2
Moldávia	33843	4,4
Croácia	56542	4,5
Noruega	324220	4,7
Geórgia	69700	4,9

Qual desses países tinha a menor densidade demográfica em 2007?

5 Um comerciante adquire uma mercadoria pela quantia de R$ 9.000,00 e a vende por R$ 10.500,00. Calcule:

a) O lucro nominal do comerciante.

b) A taxa de lucro sobre o preço de compra.

c) A taxa de lucro sobre o preço de venda.

6 Em uma fundição há uma peça de 500 g que é feita de uma liga metálica que contém principalmente cobre e estanho, mas também contém materiais como zinco, chumbo e alumínio, embora em menor quantidade.

Panksvatouny/iStockphoto.com

Se essa liga é composta por 70% de cobre e 20% de estanho, então:

a) Qual a massa de cobre na liga?

b) Qual a massa de estanho na liga?

c) Qual a taxa percentual de participação dos outros metais na liga?

Se essa peça fosse derretida e fundida com mais 300 g de cobre e 200 g de estanho, quais seriam as novas taxas percentuais de participação:

d) do cobre na nova liga?

e) do estanho na nova liga?

f) dos outros metais na nova liga?

7 Em um barril havia uma mistura de água e vinho com 20% de água, quando alguém acrescentou 20 litros de água para que o barril ficasse completamente cheio. Se depois disso a mistura ficou com 25% de água, responda:

a) Quais são as taxas percentuais de vinho na mistura antes e depois do barril ficar cheio?

b) Quantos litros da mistura havia inicialmente no barril e qual a capacidade total do barril?

c) Qual a quantidade de vinho presente nessa mistura?

8 O Sr João quer instalar uma fonte de água no centro do canteiro retangular de flores que há em seu jardim. Como a fonte irá ocupar uma área atualmente florida, o Sr João resolveu aumentar o comprimento do canteiro em 20% e a largura em 30% para compensar a área do canteiro que será subtraída após a instalação da fonte

a) Qual o aumento percentual na área do retângulo que delimita o canteiro do Sr. João?

b) Qual a taxa percentual da área do novo retângulo que será ocupada pela fonte?

9 Estimativas nacionais da porcentagem de população que vive abaixo do nível de pobreza são baseadas em pesquisas de subgrupos, com os resultados pon derados pelo número de pessoas em cada grupo Definições de pobreza variam consideravelmente entre as nações. Por exemplo, os países ricos ge ralmente empregam padrões mais generosos de pobreza do que as nações pobres A tabela a seguir apresenta as populações de cinco diferentes países e a respectiva porcentagem de indivíduos abaixo do nível de pobreza

País	População (milhões de habitantes)	População abaixo donível de pobreza (%)
África do Sul	52,98	50
Brasil	200,4	21
Estados Unidos	313,9	15
Japão	127,3	16
Peru	30,38	31

Fonte de referência: http://www.indexmundi.com.

Responda as perguntas a seguir de acordo com os dados da tabela:

a) Qual dos países tem o maior número de habitantes vivendo abaixo do nível de pobreza?

b) Qual dos países tem o menor número de habitan tes vivendo abaixo do nível de pobreza?

c) Qual o número aproximado de pessoas que vivem abaixo do nível de pobreza nos países sul-americanos da tabela?

d) Qual dos países tem a maior porcentagem da população fora do grupo de pessoas que vivem abaixo do nível de pobreza?

e) Qual dos países tem o maior número de habitantes fora do grupo das pessoas que vivem abaixo do nível de pobreza?

f) Qual a diferença entre o número aproximado de sul africanos e peruanos que estão fora do grupo das pessoas que vivem abaixo do nível de pobreza?

10 A tabela a seguir apresenta a distribuição dos alunos de uma sala de aula do curso Pré-vestibular do Sistema de En sino Poliedro. Essa distribuição leva em consideração o sexo e a maioridade dos alunos.

	Homens	Mulheres
Menores de idade	12	18
Maiores de idade	36	14

Determine as taxas percentuais de:

a) homens entre os alunos da sala.

b) maiores de idade entre os alunos da sala

c) maiores de idade entre os homens da sala.

d) homens entre os alunos maiores de idade.

e) homens maiores de idade entre os alunos da sala

Exercícios propostos

1 "Mesmo sem registrar nenhum incidente grave com voo de linha, o ano de 2012 teve o maior número de acidentes aéreos no século 21, segundo informa relatório do Cenipa (Centro de Investigação e Prevenção de Acidentes Aeronáuticos). O documento traz apenas os dados da aviação civil nos últimos 11 anos, o que torna impossível a comparação com anos anteriores ao novo século."

De acordo com os dados do Cenipa, o ano que registrou a maior diferença no número de acidentes aéreos em relação ao ano anterior foi:

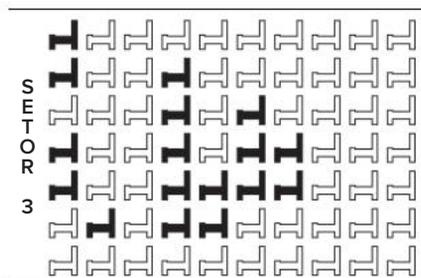
A 2012
B 2011
C 2007
D 2006
E 2010

2 A tabela a seguir apresenta os anos de nascimento e morte de alguns dos mais importantes matemáticos da história.

René Descartes	1596-1650
Isaac Newton	1643-1727
Leonhard Euler	1707-1783
Carl Friedrich Gauss	1777-1856
Jules Poincaré	1854-1912

Qual desses matemáticos morreu mais jovem?

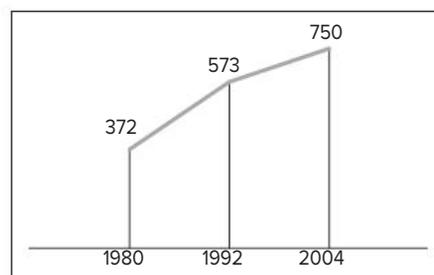
A René Descartes
B Isaac Newton
C Leonard Euler
D Carl Friedrich Gauss
E Jules Poincaré

3 **Enem 2013** Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.

A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

A $\frac{17}{70}$ B $\frac{17}{53}$ C $\frac{53}{70}$ D $\frac{53}{17}$ E $\frac{70}{17}$

4 **Enem 2018** O artigo 33 da lei brasileira sobre drogas prevê a pena de reclusão de 5 a 15 anos para qual quer pessoa que seja condenada por tráfico ilícito ou produção não autorizada de drogas Entretanto, caso o condenado seja réu primário, com bons anteceden tes criminais, essa pena pode sofrer uma redução de um sexto a dois terços.
Suponha que um réu primário, com bons antece dentes criminais, foi condenado pelo artigo 33 da lei brasileira sobre drogas.
Após o benefício da redução de pena, sua pena poderá variar de

A 1 ano e 8 meses a 12 anos e 6 meses.
B 1 ano e 8 meses a 5 anos.
C 3 anos e 4 meses a 10 anos.
D 4 anos e 2 meses a 5 anos.
E 4 anos e 2 meses a 12 anos e 6 meses.

5 **Enem** O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, conside rando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear

Favela Tem Memória. *Época*. nº 621, 12 abr. 2010 (adaptado)

Se o padrão na variação do período 2004/2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o nú mero de favelas em 2010 é 968, então o número de favelas em 2016 será

A menor que 1150.
B 218 unidades maior que em 2004
C maior que 1150 e menor que 1200.
D 177 unidades maior que em 2010.
E maior que 1200.

6 **Enem 2018** Os tipos de prata normalmente vendidos são 975, 950 e 925. Essa classificação é feita de acordo com a sua pureza Por exemplo, a prata 975 é a substância constituída de 975 partes de prata pura e 25 partes de cobre em 1000 partes da substância. Já a prata 950 é constituída de 950 partes de prata pura e 50 de cobre em 1000; e a prata 925 é constituída de 925 partes de prata pura e 75 partes de cobre em 1000. Um ourives possui 10 gramas de prata 925 e deseja obter 40 gramas de prata 950 para produção de uma joia
Nessas condições, quantos gramas de prata e de cobre, respectivamente, devem ser fundidos com os 10 gramas de prata 925?

A 29,25 e 0,75
B 28,75 e 1,25
C 28,50 e 1,50
D 27,75 e 2,25
E 25,00 e 5,00

7 **Enem 2018** Uma empresa de comunicação tem a tarefa de elaborar um material publicitário de um estaleiro para divulgar um novo navio, equipado com um guindaste de 15 m de altura e uma esteira de 90 m de comprimento. No desenho desse navio, a representação do guindaste deve ter sua altura entre 0,5 cm e 1 cm, enquanto a esteira deve apresentar comprimento superior a 4 cm. Todo o desenho deverá ser feito em uma escala 1 : X.
Os valores possíveis para X são, apenas,

A $X > 1500$
B $X < 3000$.
C $1500 < X < 2250$.
D $1500 < X < 3000$.
E $2250 < X < 3000$.

8 **Enem 2016** Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água
Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização.
Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes períodos, em dia, como segue:

- Filtro 1 (F1): 18 mg em 6 dias;
- Filtro 2 (F2): 15 mg em 3 dias;
- Filtro 3 (F3): 18 mg em 4 dias;
- Filtro 4 (F4): 6 mg em 3 dias;
- Filtro 5 (F5): 3 mg em 2 dias.

Ao final, descarta–se o filtro com a maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho.

Disponível em: www.redebrasilatual.com.br. Acesso em: 12 jul. 2015 (adaptado).

O filtro descartado é o

A F1
B F2.
C F3.
D F4
E F5.

9 **Enem 2018** Numa atividade de treinamento realizada no Exército de um determinado país, três equipes – Alpha, Beta e Gama – foram designadas a percorrer diferentes caminhos, todos com os mesmos pontos de partida e de chegada.

- A equipe Alpha realizou seu percurso em 90 minutos com uma velocidade média de 6,0 km/h.
- A equipe Beta também percorreu sua trajetória em 90 minutos, mas sua velocidade média foi de 5,0 km/h.
- Com uma velocidade média de 6,5 km/h, a equipe Gama concluiu seu caminho em 60 minutos

Com base nesses dados, foram comparadas as distân cias d_{Beta}; d_{Alpha} e d_{Gama} percorridas pelas três equipes.
A ordem das distâncias percorridas pelas equipes Alpha, Beta e Gama é

A $d_{Gama} < d_{Beta} < d_{Alpha}$
B $d_{Alpha} = d_{Beta} < d_{Gama}$
C $d_{Gama} < d_{Beta} = d_{Alpha}$
D $d_{Beta} < d_{Alpha} < d_{Gama}$
E $d_{Gama} < d_{Alpha} < d_{Beta}$

10 **Famema 2018** No início de determinado dia, um laboratório dispõe de várias seringas descartáveis para uso. Ao término desse dia, a razão entre o número de seringas não utilizadas e o de utilizadas era $\frac{2}{9}$. Se 15 das seringas utilizadas não tivessem sido usadas nesse dia, a razão entre o número de seringas não utilizadas e o de utilizadas teria sido $\frac{1}{3}$ O número de seringas descartáveis disponíveis no início desse dia era

A 220.
B 180.
C 190
D 200.
E 210.

11 **Enem 2011** Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo

Época. 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acrés cimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção
De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

A 4 mil
B 9 mil
C 21 mil
D 35 mil
E 39 mil

12 **Unicamp 2014** A razão entre a idade de Pedro e a de seu pai é igual a $\frac{2}{9}$ Se a soma das duas idades é igual a 55 anos, então Pedro tem

A 12 anos.
B 13 anos.
C 10 anos.
D 15 anos.

13 **Enem 2013** Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual

O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

O empresário decidiu comprar a empresa

A F.
B G.
C H
D M.
E P.

14 **Enem 2016** O LIRAa, Levantamento Rápido do Índice de Infestação por *Aedes aegypti*, consiste num mapeamento da infestação do mosquito *Aedes aegypti*. O LIRAa é dado pelo percentual do número de imóveis com focos do mosquito, entre os escolhidos de uma região em avaliação.

O serviço de vigilância sanitária de um município, no mês de outubro do ano corrente, analisou o LIRAa de cinco bairros que apresentaram o maior índice de infestação no ano anterior. Os dados obtidos para cada bairro foram:

I. 14 imóveis com focos de mosquito em 400 imóveis no bairro;
II 6 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro;
III. 13 imóveis com focos de mosquito em 520 imóveis no bairro;
IV 9 imóveis com focos de mosquito em 360 imóveis no bairro;
V. 15 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro.

O setor de dedetização do município definiu que o direcionamento das ações de controle iniciarão pelo bairro que apresentou o maior índice do LIRAa.

Disponível em: http://bvsms saude.gov.br Acesso em: 28 out 2015.

As ações de controle iniciarão pelo bairro

A I.
B II.
C III.
D IV.
E V.

15 **Enem 2014** Boliche é um jogo em que se arremessa uma bola sobre uma pista para atingir dez pinos, dispostos em uma formação de base triangular, buscando derrubar o maior número de pinos. A razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina seu desempenho.

Em uma disputa entre cinco jogadores, foram obtidos os seguintes resultados:

- Jogador I Derrubou todos os pinos 50 vezes em 85 jogadas.
- Jogador II Derrubou todos os pinos 40 vezes em 65 jogadas.
- Jogador III Derrubou todos os pinos 20 vezes em 65 jogadas.
- Jogador IV Derrubou todos os pinos 30 vezes em 40 jogadas.
- Jogador V Derrubou todos os pinos 48 vezes em 90 jogadas.

Qual desses jogadores apresentou maior desem penho?

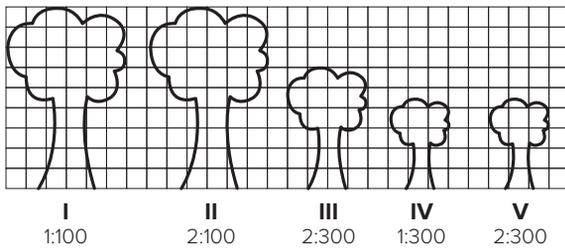
A I
B II.
C III
D IV.
E V

16 **Enem 2013** Um comerciante visita um centro de ven das para fazer cotação de preços dos produtos que deseja comprar Verifica que se aproveita 100% da quantidade adquirida de produtos do tipo A, mas apenas 90% de produtos do tipo B Esse comerciante deseja comprar uma quantidade de produtos, obtendo o menor custo/benefício em cada um deles O quadro mostra o preço por quilograma, em reais, de cada produto comercializado

Produto	Tipo A	Tipo B
Arroz	2,00	1,70
Feijão	4,50	4,10
Soja	3,80	3,50
Milho	6,00	5,30

Os tipos de arroz, feijão, soja e milho que devem ser escolhidos pelo comerciante são, respectivamente,

A A, A, A, A
B A, B, A, B.
C A, B, B, A.
D B, A, A, B.
E B, B, B, B.

17 **Enem 2012** Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.

Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

A I
B II
C III
D IV
E V

18 **Enem 2011** Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km^2 de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Disponível em: http://www wwf.org.br Acesso em: 23 abr 2010

Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km^2, é de

A 250
B 25.
C 2,5.
D 0,25.
E 0,025.

19 **Unesp 2016** A taxa de analfabetismo representa a por centagem da população com idade de 15 anos ou mais que é considerada analfabeta A tabela indica alguns dados estatísticos referentes a um município

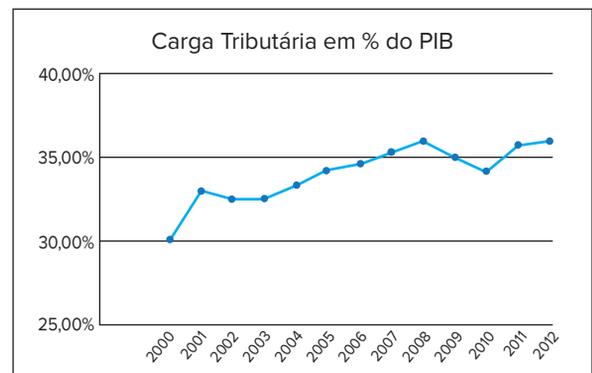
Taxa de analfabetismo	População com menos de 15 anos	População com 15 anos ou mais
8%	2 000	8 000

Do total de pessoas desse município com menos de 15 anos de idade, 250 podem ser consideradas alfabetizadas.
Com base nas informações apresentadas, é correto afirmar que, da população total desse município, são alfabetizados

A 76,1%.
B 66,5%.
C 94,5%.
D 89,0%.
E 71,1%.

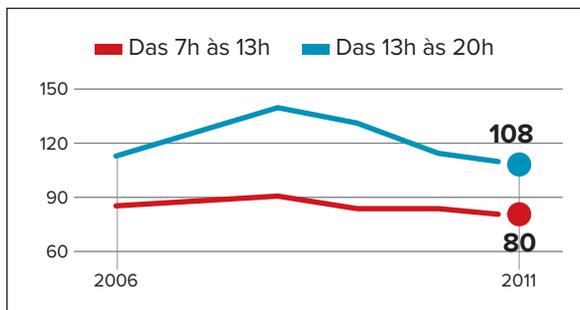
20 **Famema 2017** Um laboratório comprou uma caixa de tubos de ensaio e, ao abri la, constatou que 5% deles apresentavam defeitos e não poderiam ser utilizados Dos tubos sem defeitos, 36 foram utilizados imediata mente, 60% dos demais foram guardados no estoque e os 92 tubos restantes foram colocados nos armários do laboratório. O número total de tubos de ensaio da caixa era

A 240.
B 300.
C 320.
D 260.
E 280.

21 A carga tributária brasileira vem crescendo continua mente Em 1986 ela era de 22,39% do PIB, passando para 29,91% em 1990, 30,03% em 2000, 34,22% em 2010, 36,02% em 2011 e 36,27% do PIB em 2012, diz o estudo.
O gráfico a seguir apresenta a evolução da carga tributária neste século:

Fonte: IBGE

Sabendo que, em 2009, o PIB nacional atingiu a mar ca de 3,24 trilhões de reais, então, de acordo com os dados contidos nesse gráfico, pode-se concluir que a carga tributária em 2009 foi de:

A R$ 1.134.000.000.000,00
B R$ 134.000.000.000,00
C R$ 113.400.000.000,00
D R$ 1134.000.000,00
E R$ 134 000.000,00

22 Atualmente, nas grandes cidades brasileiras, os imensos congestionamentos provocam prejuízos cada vez maiores aos proprietários de veículos.
O gráfico a seguir apresenta a evolução do número médio de quilômetros de congestionamento da cida de de São Paulo nos horários de pico, desde 2006 até 2011.

Fonte: CET-SP

De acordo com as informações do gráfico, em 2011, o número médio de quilômetros de congestionamento do período entre 13 e 20 horas foi:

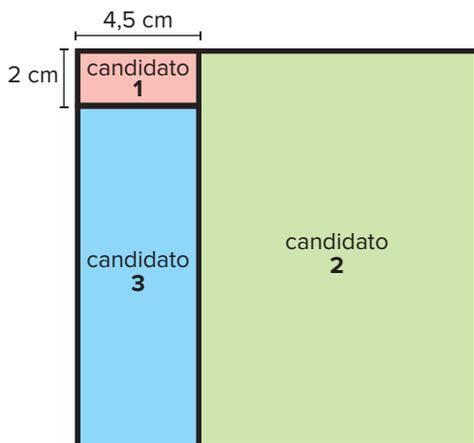
A 20% superior ao do período entre 7 h e 13 h

B 25% superior ao do período entre 7 h e 13 h

C 30% superior ao do período entre 7 h e 13 h.

D 35% superior ao do período entre 7 h e 13 h.

E 40% superior ao do período entre 7 h e 13 h.

23 **Unesp 2018** Os estudantes 1, 2 e 3 concorreram a um mesmo cargo da diretoria do grêmio de uma faculdade da UNESP, sendo que 1 obteve 6,25% do total de votos que os três receberam para esse cargo. Na figura, a área de cada um dos três retângulos representa a porcentagem de votos obtidos pelo candidato correspondente. Juntos, os retângulos compõem um quadrado, cuja área representa o total dos votos recebidos pelos três candidatos

Do total de votos recebidos pelos três candidatos, o candidato 2 obteve

A 61,75%.

B 62,75%

C 62,50%.

D 62,00%

E 62,25%.

24 No final do ano de 2013 a Secretaria Estadual da Fazenda do Rio de Janeiro divulgou uma lista com os valores venais dos veículos registrados no estado que teriam que pagar o IPVA em 2014. Mas o governo não divulgou a tabela com os valores do tributo a pagar obrigando o contribuinte a fazer o cálculo de acordo com o tipo de combustível de seu veículo.

Os veículos movidos à gasolina pagam de imposto o equivalente a 4% de seus valores venais, os veículos com motor *flex* pagam 3%, os veículos movidos a eta nol 2% e os movidos a gás natural apenas 1%.

Marcos teve que pagar o IPVA de seus dois veículos em janeiro deste ano Um dos automóveis, movido a etanol, tinha um valor venal de R$ 8.200,00 e o outro, modelo *flex*, tinha um valor venal de R$ 23.500,00. O valor pago por Marcos foi de:

A R$ 1.089,00

B R$ 986,00

C R$ 869,00

D R$ 705,00

E R$ 649,00

25 Em uma cidade há apenas as academias A e B de modo que, entre os frequentadores, 55% são associados da academia A e 45% da academia B, não havendo ninguém que seja associado das duas aca demias.

Uma campanha de *marketing* promovida pela academia B pretende conquistar 20% dos associados da academia A, fazendo-os mudar de academia

Então, se a campanha for bem-sucedida e, de fato, conquistar os associados pretendidos, e também não houver nenhuma mudança no número de frequenta dores das academias da cidade, a nova porcentagem de associados da academia B será de:

A 51%.

B 56%.

C 59%.

D 62%.

E 65%.

26 **Unesp 2017** Uma companhia de engenharia de trânsito divulga o índice de lentidão das ruas por ela monitoradas de duas formas distintas, porém equivalentes Em uma delas, divulga-se a quantidade de quilômetros congestionados e, na outra, a porcentagem de quilômetros congestionados em relação ao total de quilômetros monitorados.

O índice de lentidão divulgado por essa companhia no dia 10 de março foi de 25% e, no mesmo dia e horário de abril, foi de 200 km Sabe-se que o total de qui lômetros monitorados pela companhia aumentou em 10% de março para abril, e que os dois dados divulgados, coincidentemente, representavam uma mesma quantidade de quilômetros congestionados na cida de. Nessas condições, o índice de congestionamento divulgado no dia 10 de abril foi de, aproximadamente,

A 25%.

B 23%.

C 27%

D 29%.

E 20%.

27 **Unesp 2019** Em um dia de aula, faltaram 3 alunas e 2 alunos porque os cinco estavam gripados. Dos alunos e alunas que foram à aula, 2 meninos e 1 menina também estavam gripados. Dentre os meninos presentes à aula, a porcentagem dos que estavam gripados era 8% e, dentre as meninas, a porcentagem das que estavam gripadas era 5%. Nos dias em que a turma está completa, a porcentagem de meninos nessa turma é de

A 52%.
B 50%.
C 54%.
D 56%.
E 46%.

28 **Unesp 2017** Uma confeitaria vendeu seus dois últimos bolos por R$ 32,00 cada Ela teve lucro de 28% com a venda de um dos bolos, e prejuízo de 20% com a venda do outro No total dessas vendas, a confeitaria teve

A prejuízo de R$ 1,28.
B lucro de R$ 2,56.
C prejuízo de R$ 2,56.
D lucro de R$ 5,12.
E prejuízo de R$ 1,00.

29 O preço dinâmico cobrado pelos aplicativos de transporte urbano funciona de modo que um aumento na demanda por viagens faça o preço subir, para atrair mais motoristas ao local, garantindo que haja transporte para todos os clientes. Consequentemente, quando a oferta de motoristas sobe e o número de chamadas diminui por conta do alto custo da viagem, o preço cai até voltar ao normal.

Assim, o preço de uma corrida em um desses aplicativos é uma grandeza diretamente proporcional ao fator que aparece na tela quando o aplicativo é ligado. Se, por exemplo, a tela indicar 1,8×, as viagens naquela região e naquele momento terão seu preço normal multiplicado por um fator igual a 1,8.

Além disso, as empresas oferecem diversas promoções, como um desconto de 5% na próxima viagem, quando o cliente indica o serviço para um amigo que baixa o aplicativo

Certo dia, uma pessoa que tinha direito a um desconto de 5% chamou um motorista por esse aplicativo em um momento em que a tela indicava o fator dinâmico 1,8×. Nesse dia, a pessoa teve que pagar pela sua viagem um percentual a mais sobre o preço normal, sem desconto nem fator dinâmico Esse percentual foi de:

A 71%
B 75%.
C 80%.
D 7,6%.
E 3%.

30 A notícia a seguir foi postada em 13/04/12 no *site* da Rede Globo:

> **RIO e BRASÍLIA – Citada nos grampos da Operação Morro Claro, a empreiteira número um do Programa de Aceleração do Crescimento (PAC) recebeu, no ano passado, a quantia de 884,4 milhões de reais da União. O volume de recursos do Governo Federal para a Construtora Discriminante cresceu 1 417%, de 2003 até 2011 em valores corrigidos pelo IPCA.**
>
> Fonte: http://oglobo.globo com/pais/ (adaptado)

Para determinar, em milhões de reais, o valor que essa construtora recebeu da União em 2003, basta tomar o número 884,4 e dividi-lo por:

A 241,7
B 1,527
C 142,7
D 14,17
E 15,17

31 **Enem PPL 2019** A ingestão de sódio no Brasil, que já é normalmente alta, tende a atingir os mais elevados índices no inverno, quando cresce o consumo de alimentos calóricos e condimentados. Mas, o sal não é um vilão, ele pode e deve ser consumido diariamente, salvo algumas restrições Para uma pessoa saudável, o consumo máximo de sal de cozinha (cloreto de sódio) não deve ultrapassar 6 g diárias ou 2,4 g de sódio, considerando que o sal de cozinha é composto por 40% de sódio e 60% de cloro.

Disponível em: http://depoisdos25.com. Acesso em: 31 jul. 2012 (adaptado).

Considere uma pessoa saudável que, no decorrer de 30 dias, consuma 450 g de sal de cozinha. O seu consumo médio diário excede ao consumo máximo recomendado diariamente em

A 150%
B 250%
C 275%
D 525%
E 625%

32 Um comerciante compra uma mercadoria por deter minado valor e pretende vendê-la para obter um lucro de 40% sobre o preço de compra. Como seus clientes estão acostumados a obter descontos, o comerciante anuncia a mercadoria em sua vitrine por um preço 30% superior ao que gostaria de vender

MicroStockHub

Passados alguns meses, a mercadoria ainda está na vitrine e o comerciante, chateado com o objeto en calhado, ficará satisfeito se conseguir vendê-la pelo mesmo preço que pagou por ela. Dessa forma, o maior desconto sobre o preço oferecido que o vendedor poderá conceder a um cliente e ainda assim não perder dinheiro na transação está mais próximo de

A 45%.
B 50%.
C 65%.
D 70%.
E 80%

33 A notícia a seguir foi publicada pelo jornal *O Estado de S. Paulo* em 4 de março de 2013:

Preço da terra agrícola subiu 227% em dez anos, quase o dobro da inflação

Puxado pelo aumento das cotações da dobradinha soja/milho no mercado internacional, o preço médio de um hectare de terra destinado ao agronegócio mais que triplicou em dez anos no Brasil, superando de longe a inflação. Além disso, em cinco anos, entre 2008 e 2012, a terra se valorizou num ritmo mais acelerado que o dólar, aplicações de renda fixa, ações e até mesmo o ouro, o "queridinho" dos investidores em períodos de crise

De acordo com essa notícia, sabendo-se qual era o preço médio X do km^2 de terra agrícola há dez anos, para estimar o preço atual do km^2 basta multiplicar X por:

A 1,227
B 1,327
C 2,27
D 3,27
E 227

34 **Enem PPL** No dia 12 de janeiro de 2010, o governo da Venezuela adotou um plano de racionamento de energia que previa cortes no fornecimento em todo o país.
O ministro da Energia afirmou que uma das formas mais eficazes de se economizar energia nos domicílios seria o uso de lâmpadas que consomem 20% menos da energia consumida por lâmpadas normais.

Disponível em: http://www.bbc.co uk Acesso em: 23 abr 2010 (adaptado)

Em uma residência, o consumo mensal de energia proveniente do uso de lâmpadas comuns é de 63 kWh.

Se todas as lâmpadas dessa residência forem trocadas pelas lâmpadas econômicas, esse consumo passará a ser de, aproximadamente,

A 9 kWh
B 11 kWh.
C 22 kWh.
D 35 kWh
E 50 kWh.

35 **Enem 2011** Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retomo financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (Imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

A a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.
B a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.
C o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.
D o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.
E o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

36 **Enem 2013** O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

A R$ 900,00
B R$ 1.200,00
C R$ 2.100,00
D R$ 3.900,00
E R$ 5 100,00

37 Um bloco metálico de 0,8 Kg é de uma liga composta por 69% de cobre, 28% de estanho e 3% de outros metais. Esse bloco será derretido em uma fundição, quando receberá o acréscimo de massas iguais de cobre e de estanho apenas. Qual a massa de estanho que deverá ser acrescentada nessa liga para que a porcentagem de estanho fique em 30%?

A 8 g
B 16 g
C 20 g
D 40 g
E 80 g

38 Aumentando a base de um retângulo em 20% e diminuindo sua altura também em 20% obtém-se um quadrado com uma área 4% menor que a área do retângulo original. Sendo assim, a razão entre a base e a altura do retângulo original era de:

A 1 para 2
B 1 para 3
C 1 para 4
D 2 para 3
E 3 para 4

39 Se 35% de uma quantia A equivalem a 42% de outra quantia B, então qual o aumento percentual deve ser dado ao valor de B para que ele alcance o valor de A?

A 10%
B 14%
C 20%
D 25%
E 33%

40 **Enem 2016** O censo demográfico é um levantamento estatístico que permite a coleta de várias informações. A tabela apresenta os dados obtidos pelo censo demográfico brasileiro nos anos de 1940 e 2000, referentes à concentração da população total, na capital e no interior, nas cinco grandes regiões.

População residente, na capital e interior segundo as Grandes Regiões 1940/2000						
Grandes regiões	População residente					
	Total		Capital		Interior	
	1940	2000	1940	2000	1940	2000
Norte	1632 917	12900704	368 528	3895 400	1264 389	9005 304
Nordeste	14434 080	47741 711	1270 729	10162 346	13163 351	37579 365
Sudeste	18278 837	72412 411	3346 991	18822 986	14931 846	53589 425
Sul	5735 305	25107 616	459 659	3290 220	5275 646	21817 396
Centro-Oeste	1088 182	11636 728	152 189	4291 120	935 993	7345 608

Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1940/2000.

O valor mais próximo do percentual que descreve o aumento da população nas capitais da Região Nordeste é

A 125%.
B 231%.
C 331%.
D 700%.
E 800%.

Texto complementar

Taxas demográficas

Nos estudos de Geografia, as principais taxas demográficas são expressas em porcentagens (%) ou permilagens (‰).

As taxas de natalidade e de mortalidade informam as razões entre o número de nascimentos ou de óbitos a cada mil habitantes de uma determinada região (cidade, país ou continente) no período de um ano Portanto, são ambas expressas em permilagens.

Outra grandeza demográfica muito importante é o **crescimento vegetativo** que resultada da comparação entre as taxas de natalidade e mortalidade por meio da subtração, ou seja, é o excedente da taxa de natalidade para a de mortalidade. O crescimento vegetativo é uma grandeza que costuma ser representada na forma de porcentagem, e não de permilagem, como as taxas subtraídas.

Considere o estudo demográfico de uma determinada região no período de um ano. Sendo **P** a população inicial, **N** o número de nascimentos e **M** o número de óbitos registrados no período considerado, temos que:

- a taxa de natalidade é obtida da razão $\frac{N}{P}$.
- a taxa de mortalidade é obtida da razão $\frac{M}{P}$.

Assim, efetuando essas divisões encontramos os números decimais, que representam as taxas unitárias de natalidade e de mortalidade; porém, como esses índices demográficos devem ser expressos como permilagens, devemos deslocar a vírgula das taxas unitárias exatamente **três casas para a direita**

Por exemplo, se determinado município tinha uma população de 31500 habitantes há exatamente um ano e, durante esse ano, foram registrados 2646 nascimentos, além de 1890 mortes, podemos concluir que:

- a taxa de natalidade do município durante esse ano foi de:

$$\frac{2646}{31500} = 0{,}084 = 84‰.$$

- a taxa de mortalidade do município durante esse ano foi de:

$$\frac{1890}{31500} = 0{,}06 = 60‰.$$

Por fim, o crescimento vegetativo do município nesse ano pode ser encontrado subtraindo-se a taxa de mortalidade da taxa de natalidade e deslocando-se a vírgula exatamente **uma casa para a direita**, a fim de expressar essa grandeza em sua forma percentual:

$$CV = 84‰ - 60‰ = 24‰ = 2{,}4\%$$

Resumindo

Variação de uma grandeza é a diferença entre os valores final e inicial em algum período:

$$\Delta V = V_F \quad V_I$$

Razões simples são valores adimensionais obtidos por quocientes entre grandezas com as mesmas unidades de medida

Razões compostas são obtidas pelo quociente entre grandezas de unidades de medidas diferentes.

Proporção é a igualdade de duas razões obtidas por quociente:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

Propriedades

- O produto dos termos médios equivale ao produto dos termos extremos:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow x_1 = y_2 \quad x_2 \; y_1$$

- Simplifica-se uma proporção dividindo-se ambos os termos antecedentes ou ambos os termos consequentes por um mesmo número real não nulo.
- A razão entre as somas dos antecedentes e a soma dos consequentes de uma proporção é equivalente às razões que compõem a proporção:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

- Novas proporções podem ser obtidas de uma proporção original substituindo-se ambos os antecedentes ou ambos os consequentes de uma proporção pela soma dos termos de suas respectivas razões:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow \frac{x_1 + y_1}{y_1} = \frac{x_2 + y_2}{y_2}$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1 + x_1} = \frac{x_2}{y_2 + x_2}$$

Porcentagens e taxas

Taxa unitária é o quociente da parte sobre o todo.

Taxa percentual é 100 vezes a taxa unitária.

O símbolo **%** indica a fração $\frac{1}{100}$

$$x\% = \frac{x}{100}$$

Todo número real pode ser expresso na forma percentual, basta multiplicá-lo por 100:

$$N = (100 \cdot N)\%$$

Fator de correção

$$\begin{cases} \text{Para aumentos de p\%: } F = 1 + \frac{p}{100}. \\ \text{Para descontos de p\%: } F = 1 - \frac{p}{100}. \end{cases}$$

O valor final de uma grandeza, após uma série de aumentos e/ou reduções percentuais, pode ser obtido multiplicando-se o valor inicial dessa grandeza pelo produto de todos os fatores de correção correspondentes a esses aumentos e/ou reduções, ou seja:

$$V_F = V_I \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \ldots$$

Se um aumento percentual anula uma redução percentual, ou vice-versa, o valor final da grandeza que sofre o aumento e a redução coincide com o valor inicial e os fatores de correção, correspondentes ao aumento e a redução, são tais que:

$$F_A \; F_R \quad 1$$

Quer saber mais?

Sites

- Para conhecer um pouco mais a respeito de razões, proporções e porcentagens, consulte:
  <http://www.somatematica.com.br/fundam/razoes.php>.
  <http://educacao.globo com/matematica/assunto/matematica–basica/razao–e–proporcao.html>.
  <http://www.mat.uc.pt/~mat1043/Proporcionalidade.pdf>.
  <https://www.youtube com/watch?v=5XJ7VF O3Tc>
  <http://www.brasilescola.com/matematica/porcentagem.htm>.
  <http://www.calcularporcentagem.com/>.

Exercícios complementares

1 O taxímetro é um aparelho eletrônico instalado nos táxis que registra o valor cobrado pelo serviço com base na distância percorrida e no tempo gasto no percurso.

Paolo Bona/Shutterstock

No instante em que o passageiro entra no carro, o taxímetro é acionado e exibe, no visor, um valor inicial conhecido como bandeirada. Depois, com o carro em movimento, o taxímetro acrescenta uma parcela para cada quilômetro percorrido, que pode assumir dois valores diferentes, dependendo do dia e do horário Esses valores são chamados de bandeira 1, aplicado de segunda a sábado durante o dia, e de bandeira 2, um pouco mais caro, mas que só é aplicado aos domingos e feriados, ou durante a noite e a madrugada dos demais dias da semana. Além disso, enquanto o carro fica parado, o taxímetro acrescenta ao valor da corrida uma fração de outra tarifa conhecida como hora parada.
A tabela a seguir apresenta as tarifas cobradas nos táxis de quatro municípios da região do Vale do Paraíba, no interior do estado de São Paulo:

	São José dos Campos	Jacareí	Taubaté	Caraguatatuba
Bandeirada	R$ 4,50	R$ 4,00	R$ 3,40	R$ 3,70
Bandeira 1	R$ 2,25	R$ 1,90	R$ 3,10	R$ 2,90
Bandeira 2	R$ 2,90	R$ 2,50	R$ 3,60	R$ 3,70
Hora parada	R$ 18,50	R$ 15,00	R$ 21,60	R$ 25,00

a) De segunda a sexta, o Sr. Antônio, que mora em São José dos Campos, vai de táxi ao trabalho, percorrendo uma distância de 6 km. Porém, o Sr. Antônio conseguiu um emprego novo em Caraguatatuba e está procurando uma casa para alugar nesse município.

b) Desconsiderando-se os gastos com as horas paradas nas corridas de táxi, qual deve ser a distância percorrida de táxi entre a casa nova e o emprego novo do Sr. Antônio aproximadamente, para que seus gastos diários com essas corridas não se alterem?

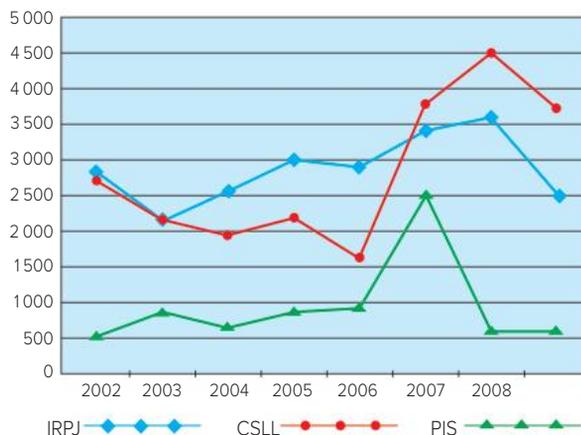
c) No domingo, D. Beatriz, que também mora em São José dos Campos, foi visitar sua irmã, residente em Jacareí, e tomou um táxi que percorreu uma distância de 20 km sem ficar parado tempo suficiente para que a tarifa da hora parada fosse acionada. Mas, por tratar se de uma viagem inter municipal, o taxista cobrou uma taxa extra de 20% sobre o valor indicado no visor do taxímetro.
Na volta, D. Beatriz tomou um táxi de Jacareí até sua casa, que percorreu novamente a distância de 20 km sem ficar parado Mas, dessa vez, a taxa ex tra cobrada pelo taxista foi de 40% sobre o valor indicado no visor do taxímetro Sendo assim, quanto D. Beatriz gastou a menos na viagem de ida?

2 No ano de 2010, a Líbia exportou 1,5 milhão de barris de petróleo por dia. A tabela a seguir mostra a distribuição percentual da exportação do petróleo líbio em relação aos seus principais compradores, em 2010:

Itália	28%	Espanha	10%
França	15%	Grécia	5%
China	11%	Grã-Bretanha	4%
Alemanha	10%	EUA	3%

Os 14% restantes do petróleo exportado pela Líbia, em 2010, tiveram como destino outros países europeus Sabendo que um barril de petróleo tem capacidade de aproximadamente 160 litros, podemos concluir que o volume diário de petróleo que a Líbia exportou para fora da Europa, no ano de 2010, foi de aproximadamente:

A 3 milhões e 360 mil litros.
B 7 milhões e 200 mil litros.
C 26 milhões e 400 mil litros.
D 33 milhões e 600 mil litros
E 40 milhões e 800 mil litros.

3 O gráfico a seguir apresenta, em milhões de reais, os valores totais arrecadados pela União, no período de 2002 a 2009, em consequência da cobrança de três impostos distintos: o IRPJ (Imposto de Renda sobre Pessoa Jurídica), a CSLL (Contribuição Social sobre o Lucro Líquido), que também é cobrada das pessoas jurídicas, e o PIS (Programa de Integração Social), que incide sobre o faturamento bruto das empresas.

De acordo com as informações desse gráfico, é correto afirmar que o período de 2006 a 2007
A foi o único que registrou aumento na arrecadação dos três impostos.
B foi o único em que a arrecadação do IRPJ ultrapassou a arrecadação da CSLL.
C foi quando a arrecadação do PIS ultrapassou a arrecadação da CSLL.
D registrou um aumento na arrecadação total dos três impostos inferior a 5 milhões de reais.
E registrou um aumento na arrecadação total dos três impostos superior a 4 bilhões de reais.

Texto para as próximas duas questões

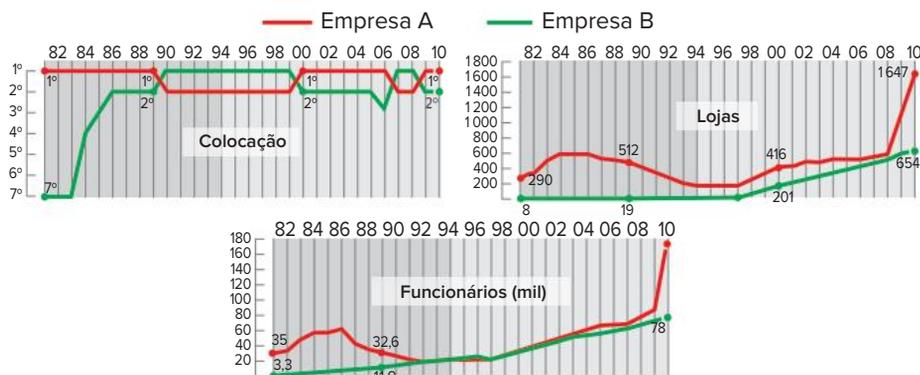
Na farmácia de uma vizinhança pode-se encontrar cloreto de sódio diluído em frascos de soro fisiológico ou ampolas injetáveis. As opções oferecidas pela farmácia são:

Soro fisiológico	Cloreto de sódio injetável
Frasco de 100 mL a 0,9% por R$ 1,15.	Caixa com cinco ampolas de 10 mL a 10% por R$ 0,61.
Frasco de 250 mL a 0,9% por R$ 2,20.	Caixa com cinco ampolas de 10 mL a 20% por R$ 1,61.
Frasco de 500 mL a 0,9% por R$ 4,00	Ampola de 20 mL a 20% por R$ 0,65

4 Tomás precisa de 400 mL de soro fisiológico de cloreto de sódio. A opção mais econômica para a necessidade de Tomás, nessa farmácia, é:
A Comprar 4 frascos de 100 mL.
B Comprar 2 frascos de 250 mL.
C Comprar 1 frasco de 250 mL e 2 frascos de 100 mL.
D Comprar 1 frasco de 500 mL.
E Comprar 3 frascos de 100 mL.

5 Marilena precisa de 80 mL de uma solução de cloreto de sódio diluído a 12,5% e, para isso, foi a essa farmácia comprar ampolas diluídas a 10% e a 20%. Depois, quando chegasse a sua casa, faria a mistura necessária.
Qual a quantia mínima que Marilena pode gastar nessa farmácia na compra do suficiente para fazer a mistura?
A R$ 2,52 B R$ 1,87 C R$ 2,21 D R$ 1,26 E R$ 2,26

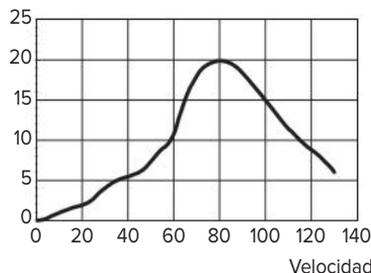
Texto para as próximas três questões.

Depois de se revezarem no *ranking* de maiores varejistas por mais de duas décadas, as empresas A e B negociaram uma fusão durante o primeiro semestre deste ano. Os gráficos a seguir apresentam a colocação no *ranking*, o número de lojas e o número de funcionários dessas empresas desde 1981 até o final de 2010:

6 Observando-se o gráfico do número de funcionários dessas empresas, pode-se concluir que:
A a diferença entre o número das empresas A e B é crescente desde 1997
B de 2004 a 2008 a empresa A não contratou nem demitiu funcionários.
C durante todo o período considerado, a empresa B contratou anualmente mais funcionários do que demitiu.
D em 1986 o número de funcionários da empresa A atingiu um pico que só foi recuperado 20 anos depois.
E o número de funcionários da empresa B praticamente duplicou desde o início do século XXI

7 De acordo com os dados registrados nos três gráficos, durante o mais longo período que a empresa A esteve na segunda colocação,
A a razão funcionários/loja da empresa A foi inferior a da empresa B
B a razão funcionários/loja da empresa A foi superior a da empresa B.
C a razão funcionários/loja de ambas as empresas permaneceu constante
D a razão funcionários/loja de empresa A permaneceu constante
E a razão funcionários/loja de empresa B permaneceu crescente

8 Em cada gráfico, a região com o fundo escurecido indica o período de hiperinflação que o Brasil atravessou até a instauração do Plano Real em 1994. Note que as quedas no número de lojas e funcionários da empresa A cessaram nesse mesmo ano.
Observando os gráficos, pode-se concluir que a partir de 1986 e durante o período de hiperinflação, a empresa A registrou uma diminuição média de aproximadamente:

A 1000 funcionários por loja fechada.
B 400 funcionários por loja fechada.
C 100 funcionários por loja fechada
D 40 funcionários por loja fechada.
E 10 funcionários por loja fechada

9 **Unicamp 2019** A eficiência de um veículo pode ser avaliada pela quantidade de quilômetros que ele é capaz de percorrer com um litro de combustível. Tal eficiência depende de vários fatores, entre eles a velocidade adotada. O gráfico abaixo exibe o número de quilômetros percorridos por litro de combustível, para um determinado veículo, em função da velocidade.

a) Supondo que o veículo trafegue com velocidade constante de 100 km/h, determine quantos litros de combustível ele consome para percorrer 60 km.
b) Considere que o veículo tenha 50 litros de combustível em seu tanque. Determine a sua autonomia máxima, isto é, a maior distância que ele pode percorrer, supondo que ele trafegue a uma velocidade constante.

10 **Unesp 2016** O Ministério da Saúde e os estados brasileiros investigaram 3670 casos suspeitos de microcefalia em todo o país. O boletim de 02 de fevereiro aponta que, desse total, 404 tiveram confirmação de microcefalia ou de outras alterações do sistema central, e outros 709 casos foram descartados. Anteriormente, no boletim de 23 de janeiro, havia 732 casos investigados e classificados como confirmados ou como descartados.

(https://agencia.fiocruz br Adaptado.)

De acordo com os dados do texto, do boletim de 23 de janeiro para o de 02 de fevereiro, o aumento no número de casos classificados, como confirmados ou como descartados, foi de, aproximadamente,

A 52%. C 66%. E 28%.
B 30%. D 48%.

11 O **alqueire** é uma medida agrária, não decimal, ainda usada no Brasil para designar áreas de grandes propriedades rurais. A porção de terra contida em um único alqueire varia de acordo com a legislação de cada es tado. No estado de São Paulo, por exemplo, 1 alqueire equivale, em área, a um terreno quadrado com 110 metros de lado. Já no estado de Minas Gerais, 1 alqueire equivale a uma área de 18 mil metros quadrados.
De acordo com as informações fornecidas, pode-se estimar que em São Paulo a medida de 1 alqueire designa uma área aproximadamente:

A 67% menor que no estado de Minas Gerais.
B 33% menor que no estado de Minas Gerais.
C 16 % menor que no estado de Minas Gerais
D 32% maior que no estado de Minas Gerais.
E 49% maior que no estado de Minas Gerais.

12 Leia a notícia a seguir:

Soja em MT
Como está a evolução da safra em porcentagem.

Colheita de soja avança, mas chuva ainda dificulta.
A safra de soja de Mato Grosso trocou de mão neste ano. Os dados obtidos apontam que 70,5% da safra já foi comercializada, mas apenas 50% da plantação foi colhida. No ano passado, nessa mesma época, os números eram diferentes: enquanto a colheita avançava sobre 77% da área a ser colhida, as vendas estavam em 54,4%.

Fonte fictícia.

Se, no estado do Mato Grosso, a distribuição da quan tidade de soja por hectare plantado é homogênea; então, de acordo com as informações apresentadas na notícia, pode-se concluir que, em 10 de março de 2019, para atingir a quantidade de soja já comerciali zada, ainda era necessário colher   da área que ainda não havia sido colhida.

A 50% C 36,3% E 16,1%
B 41% D 20,5%

13 A porcentagem de gordura corporal (BF ou Body Fat) é a razão entre a quantidade de gordura e a massa total do corpo. Mas como é muito difícil determinar a quantidade exata de gordura em um corpo ainda vivo, há uma fórmula matemática capaz de estimar essa porcentagem a partir do IMC (Índice de Massa Corporal), da idade e do sexo da pessoa.

$$BF = \left[(1{,}2 \cdot IMC) + (0{,}23 \cdot I)\ \ \cdot(10{,}8\ \ S)\ \ 5{,}4\right]\%$$

Nesta fórmula, I indica a idade da pessoa em anos e S é um valor que depende do sexo da pessoa, de modo que S = 1 para homens e S = 0 para mulheres.
Qual a quantidade aproximada de gordura no corpo de uma mulher com 30 anos de idade sabendo que ela pesa 65 kg e possui 22 de IMC?

A 12 kg
B 15 kg
C 18 kg
D 21 kg
E 25 kg

14 **Fuvest 2016** O Sistema Cantareira é constituído por represas que fornecem água para a Região Metropolitana de São Paulo. Chama-se de "volume útil" do Sistema os 982 bilhões de litros que ficam acima do nível a partir do qual a água pode ser retirada sem bombeamento Com o uso de técnicas mais elaboradas, é possível retirar e tratar parte da água armazenada abaixo desse nível A partir de outubro de 2014, a Sabesp passou a contabilizar uma parcela de 287 bilhões de litros desse volume adicional, denominada "reserva técnica" ou "volume morto", e chamou de "volume total" a soma do volume útil com a reserva técnica. A parte do volume total ainda disponível para consumo foi chamada de "volume armazenado"
O primeiro índice usado pela Sabesp para divulgar o nível do Sistema, após o início do uso da reserva técnica, foi o percentual do volume armazenado em relação ao volume útil (e não ao volume total). Chama-se este percentual de Índice 1.

a) Calcule o valor que terá o Índice 1 quando as represas estiverem completamente cheias, supondo que a definição de "volume armazenado" não tenha mudado.
A partir de abril de 2015, a Sabesp passou a divulgar outros dois índices, além do Índice 1 (veja o Quadro). Note que o Índice 3 pode assumir valores negativos e valerá 100% quando as represas do Sistema estiverem completamente cheias.
b) No momento em que o Índice 1 for 50%, que valores terão os Índices 2 e 3?
c) Qual é o valor do Índice 2 no momento em que o Índice 3 é negativo e vale –10%?

QUADRO
$\text{Índice 1} = \dfrac{\text{volume armazenado}}{\text{volume útil}} \times 100\%$
$\text{Índice 2} = \dfrac{\text{volume armazenado}}{\text{volume total}} \times 100\%$
$\text{Índice 3} = \dfrac{(\text{volume armazenado}) - (\text{volume da reserva técnica})}{\text{volume útil}} \times 100\%$

15 **Enem 2016** Densidade absoluta (d) é a razão entre a massa de um corpo e o volume por ele ocupado. Um professor propôs à sua turma que os alunos analisassem a densidade de três corpos: d_A, d_B, d_C. Os alunos verificaram que o corpo A possuía 1,5 vez a massa do corpo B e esse, por sua vez, tinha $\frac{3}{4}$ da massa do corpo C. Observaram, ainda, que o volume do corpo A era o mesmo do corpo B e 20% maior do que o volume do corpo C.
Após a análise, os alunos ordenaram corretamente as densidades desses corpos da seguinte maneira

A $d_B < d_A < d_C$
B $d_B = d_A < d_C$
C $d_C < d_B = d_A$
D $d_B < d_C < d_A$
E $d_C < d_B < d_A$

16 O sangue humano é produzido na medula óssea dos ossos chatos, vértebras, costelas, quadril, crânio e externo. Nas crianças, também os ossos longos como o fêmur produzem sangue.
O sangue é formado por parte líquida (plasma), constituída por água, sais, vitaminas e fatores de coagulação, na qual estão misturadas as partes sólidas: hemácias, leucócitos e plaquetas.
As plaquetas são fragmentos de células que partici pam do processo de coagulação. Elas têm vida curta e circulam numa quantidade que varia de 150 mil a 400 mil por milímetro cúbico de sangue.
Os leucócitos são glóbulos brancos Seu número varia de 5 mil a 10 mil por milímetro cúbico de sangue e sua vida é curta Possuem formas e funções diversas, sempre ligadas à defesa do organismo.
As hemácias são glóbulos vermelhos do sangue Exis tem em torno de 4500000 delas por milímetro cúbico de sangue A sua função é transportar o oxigênio dos pulmões para as células e eliminar o gás carbônico das células, transportando-o para os pulmões
O plasma é um líquido amarelo claro que representa 55% do volume total de sangue Ele é constituído por 90% de água, onde se encontram dissolvidas proteínas, açúcares, gorduras e sais minerais

Fonte: http://www.portalsaofrancisco.com br/alfa/corpo-humano-sistema cardiovascular/sangue.php#ixzz1zd3U1MHO. Acesso em: 04 ago. 2020.

PPK_studio/Shutterstock

De acordo com o texto:

a) Considerando-se a média aritmética das quantidades mínimas e máximas de plaquetas e leucócitos por milímetro cúbico de sangue humano, qual deve ser a razão entre o número de plaquetas e leucócitos no sangue humano?
b) Qual deve ser o número aproximado de hemácias presentes em um litro de sangue humano?
c) Qual a porcentagem, no sangue humano, de substâncias dissolvidas na água do plasma sanguíneo, como proteínas, açúcares, gorduras e sais minerais?

17 **Unifesp 2016** A heparina é um medicamento de ação anticoagulante prescrito em diversas patologias. De acordo com indicação médica, um paciente de 72 kg deverá receber 100 unidades de heparina por quilograma por hora (via intravenosa).

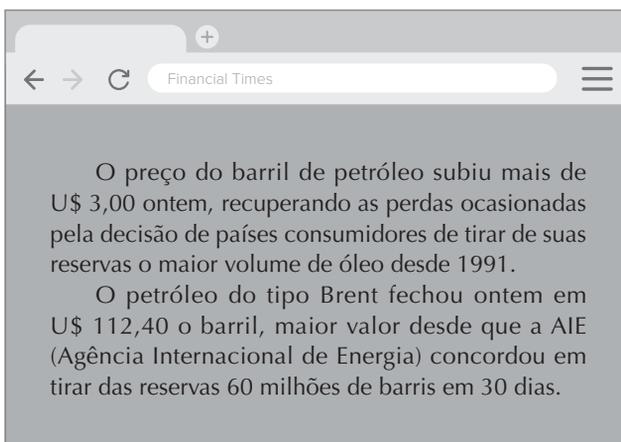
No rótulo da solução de heparina a ser ministrada consta a informação 10 000 unidades/ 50 mL.

a) Calcule a quantidade de heparina, em mL, que esse paciente deverá receber por hora.

b) Sabendo que 20 gotas equivalem a 1 mL, esse paciente deverá receber 1 gota a cada x segundos. Calcule x.

18 O texto a seguir foi extraído de um artigo publicado na edição de 30 de junho de 2011 do *Financial Times*:

O preço do barril de petróleo subiu mais de U$ 3,00 ontem, recuperando as perdas ocasionadas pela decisão de países consumidores de tirar de suas reservas o maior volume de óleo desde 1991.

O petróleo do tipo Brent fechou ontem em U$ 112,40 o barril, maior valor desde que a AIE (Agência Internacional de Energia) concordou em tirar das reservas 60 milhões de barris em 30 dias.

De acordo com as informações apresentadas pelo texto, pode-se concluir que:

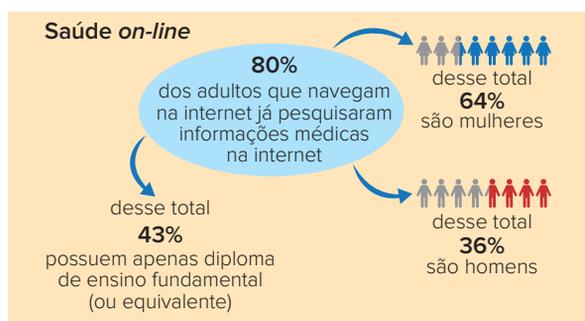
A Cada país consumidor de petróleo tirou de suas reservas 2 milhões de barris por dia

B Todos os países consumidores de petróleo juntos tiraram de suas reservas 2 milhões de barris por dia.

C O preço do barril de petróleo do tipo Brent custava exatamente U$ 109,40 antes do aumento.

D O preço do barril de petróleo do tipo Brent sofreu um aumento de 2,74%.

E O preço do barril de petróleo do tipo Brent sofreu um aumento superior a 2,74%.

19 **Unifesp 2015**

Os resultados apresentados no infográfico foram obtidos a partir de um levantamento informal feito com 1840 adultos, dos quais 210 eram mulheres que nunca haviam navegado na internet, 130 eram homens que nunca haviam navegado na internet, e os demais pesquisados navegam na internet.

a) Dos 1840 adultos, quantos nunca pesquisaram informações médicas na internet?

b) Do grupo das pessoas que navegam na internet e já fizeram pesquisas de informações médicas nesse ambiente, sabe-se que 12,5% das mulheres possuem apenas o diploma de ensino fundamental (ou equivalente) em sua escolarização. Desse mesmo grupo de pessoas, quantos são os homens que possuem apenas o diploma de ensino fundamental (ou equivalente) em sua escolarização?

20 Às vésperas do show mais esperado do ano, os ingressos estavam sendo vendidos na internet por até 100 vezes o seu valor no início das vendas. Qual a porcentagem de aumento sobre o preço inicial ocorrida no período?

A 100%
B 900%
C 9000%
D 9900%
E 10000%

21 **Enem PPL 2019** A conta de telefone de uma loja foi, nesse mês, de R$ 200,00. O valor da assinatura mensal, já incluso na conta, é de R$ 40,00, o qual dá direito a realizar uma quantidade ilimitada de ligações locais para telefones fixos. As ligações para celulares são tarifadas separadamente. Nessa loja, são feitas somente ligações locais, tanto para telefones fixos quanto para celulares. Para reduzir os custos, o gerente planeja, para o próximo mês, uma conta de telefone com valor de R$ 80,00.

Para que esse planejamento se cumpra, a redução percentual com gastos em ligações para celulares nessa loja deverá ser de

A 25%
B 40%
C 50%
D 60%
E 75%

22 Para ocupar as vagas remanescentes de um determi nado curso em que os alunos aprovados na primeira chamada do vestibular fizeram a matrícula em janeiro, uma universidade particular divulgou a lista da segun da chamada no mês de fevereiro

Cada semestre desse curso tem, para o aluno, um custo fixo que é dividido em 6 parcelas mensais de mesmo valor, sendo a primeira paga no ato da matrí cula Mas, no caso dos alunos aprovados na segunda chamada, o valor semestral desse curso foi dividido em 5 parcelas mensais de mesmo valor, pois eles só foram matriculados em fevereiro. Sendo assim, cada parcela paga por um aluno matriculado em fevereiro, em relação ao aluno matriculado em janeiro, é

A 25% maior.
B 20% maior.
C 15% maior.
D 10% maior.
E 5% maior.

23 **Enem 2011** A tabela compara o consumo mensal, em kWh, dos consumidores residenciais e dos de baixa renda, antes e depois da redução da tarifa de energia no estado de Pernambuco.

Como fica a tarifa			
Residencial			
Consumo mensal (kWh)	**Antes**	**Depois**	**Economia**
140	R$ 71,04	R$ 64,75	R$ 6,29
185	R$ 93,87	R$ 85,56	R$ 8,32
350	R$ 177,60	R$ 161,86	R$ 15,74
500	R$ 253,72	R$ 231,24	R$ 22,48
Baixa renda			
Consumo mensal (kWh)	**Antes**	**Depois**	**Economia**
30	R$ 3,80	R$ 3,35	R$ 0,45
65	R$ 11,53	R$ 10,04	R$ 1,49
80	R$ 14,84	R$ 12,90	R$ 1,94
100	R$ 19,31	R$ 16,73	R$ 2,59
140	R$ 32,72	R$ 28,20	R$ 4,53
			Fonte: Celpe

Diário de Pernambuco.28 abr. 2010 (adaptado).

Considere dois consumidores: um que é de baixa renda e gastou 100kWh e outro do tipo residencial que gastou 185 kWh A diferença entre o gasto desses consumidores com 1 kWh, depois da redução da tarifa de energia, mais aproximada, é de

A R$ 0,27
B R$ 0,29.
C R$ 0,32.
D R$ 0,34
E R$ 0,61.

24 Um alerta direcionado aos participantes do Fórum Econômico Mundial de Davos, realizado na Suíça, apontou que em 2016 a parcela da população mundial composta pelos 1% mais ricos acumulará mais da metade da riqueza mundial.

"A escala da desigualdade global está simplesmente excessiva. A diferença entre os ricos e os demais está aumentando em velocidade muito rápida", afirmou, em comunicado, a diretora executiva da Oxfam, Winnie Byanyima

Fonte: http://oglobo.globo.com/economia/parcela-do-1 mais rico-tera-mais-da-metade-da-riqueza-mundial-em 2016 15091872#ixzz3eMz3JCcj

Seja x o valor médio do capital por habitante entre os 1% mais ricos, quando essa parcela da população chegar ao controle de 51% de todo o capital mundial. Então, sendo y o valor médio do capital por habitante entre os 99% dos demais habitantes do planeta, quando isso acontecer, a razão $\frac{x}{y}$ será, aproximadamente, igual a

A 103,04
B 99,02
C 87,12
D 53,04
E 13,40

25 A população de peixes em um viveiro é composta por 60% de machos e de 40% fêmeas Se houvesse uma redução de 20% no número de machos e um au mento de 20% no número de fêmeas, então a nova população do viveiro ficaria:

A menor que a população inicial, mas composta por 45% de machos e de 55% de fêmeas.
B menor que a população inicial, mas composta por 50% de machos e 50% de fêmeas.
C igual à população inicial, mas composta por 40% de machos e 60% de fêmeas.
D igual à população inicial, mas composta por 50% de machos e 50% de fêmeas.
E maior que a população inicial, mas composta por 40% de machos e 60% de fêmeas.

26 O tanque de combustível de um automóvel bicombus tível tem capacidade de 80 litros e contém uma mistura de álcool e gasolina, com 20% de álcool, quando seu dono para em um posto e coloca mais 10 litros de álcool e 20 litros de gasolina. Se depois disso a par ticipação do álcool passa a ser de 28% da mistura, determine quantos litros de combustível faltam para encher totalmente o tanque desse automóvel.

A 15 litros
B 20 litros
C 25 litros
D 30 litros
E 40 litros

27 **Enem 2014** Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90%, dependendo do lote fabricado Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem *P* da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.
De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de *P* é

A [35; 63]
B [40; 63].
C [50; 70].
D [50; 90].
E [70; 90].

28 No mês de fevereiro do ano passado, um comerciante percebeu um aumento significativo na procura por um determinado produto. Por isso, resolveu aproveitar a demanda encomendando, para o mês de dezembro, uma remessa bem maior que a de costume e aumentou o preço desse produto em 30%.
O produto vendeu muito bem no mês de dezembro, mas passado o período de festas do final do ano, as unidades restantes do produto encalharam em seu estoque e, em janeiro desse ano, o comerciante fez uma promoção dando, na compra de cada unidade, um desconto de 30% sobre o preço cobrado em dezembro, passando a vendê-lo por um preço:

A igual ao praticado em novembro do ano anterior.
B 9% superior ao praticado em novembro do ano anterior.
C 9% inferior ao praticado em novembro do ano anterior.
D 19% superior ao praticado em novembro do ano anterior.
E 19% inferior ao praticado em novembro do ano anterior

29 **Enem 2018** Uma empresa deseja iniciar uma campanha publicitária divulgando uma promoção para seus possíveis consumidores. Para esse tipo de campanha, os meios mais viáveis são a distribuição de panfletos na rua e anúncios na rádio local. Considera-se que a população alcançada pela distribuição de panfletos seja igual à quantidade de panfletos distribuídos, enquanto que a alcançada por um anúncio na rádio seja igual à quantidade de ouvintes desse anúncio. O custo de cada anúncio na rádio é de R$ 120,00, e a estimativa é de que seja ouvido por 1500 pessoas. Já a produção e a distribuição dos panfletos custam R$ 180,00 cada 1000 unidades. Considerando que cada pessoa será alcançada por um único desses meios de divulgação, a empresa pretende investir em ambas as mídias.
Considere X e Y os valores (em real) gastos em anúncios na rádio e com panfletos, respectivamente.
O número de pessoas alcançadas pela campanha será dado pela expressão

A $\frac{50X}{4}+\frac{50Y}{9}$
B $\frac{50X}{9}+\frac{50Y}{4}$
C $\frac{4X}{50}+\frac{4Y}{50}$
D $\frac{50}{4X}+\frac{5Y}{9Y}$
E $\frac{50}{9X}+\frac{50Y}{4Y}$

30 Um medicamento, que costumava ter preço tabelado, teve seu preço liberado pelo governo para o mercado farmacêutico em janeiro deste ano. A partir dessa liberação cada farmácia poderia aumentar ou diminuir o preço do medicamento a cada trimestre, de acordo com a demanda de seus clientes.
A demanda por um medicamento no mercado farmacêutico pode variar por muitos motivos, como a época do ano, o bairro onde a farmácia está situada e a oferta de medicamentos de marcas concorrentes.
A tabela a seguir apresenta a variação percentual do preço desse medicamento em três farmácias que efetuaram alterações nos três primeiros trimestres a partir da liberação:

Farmácia	Janeiro	Abril	Julho
X	+10%	–30%	+20%
Y	20%	–10%	+30%
Z	+20%	+10%	–30%

Sabendo que todas as variações percentuais da tabela têm como referência o preço praticado pela farmácia no trimes tre anterior, assinale a alternativa correta:

A Em março o medicamento estava mais caro na farmácia X do que nas farmácias X e Z
B Em maio o medicamento estava mais barato na farmácia X do que nas farmácias Y e Z
C Em julho o medicamento voltou a custar o mesmo nas farmácias X, Y e Z
D Em agosto o medicamento estava mais barato na farmácia X do que nas farmácias Y e Z
E Em setembro o medicamento estava mais caro na farmácia Y do que nas farmácias X e Z

31 Aumentando-se x% no preço de um produto obtemos um valor dez vezes maior do que seria obtido efetuando-se um desconto de x% no preço desse mesmo produto. Assinale a alternativa que apresenta a melhor aproximação para o número x

A 82
B 75
C 50
D 33
E 25

32 **Enem 2015** O HPV é uma doença sexualmente transmissível Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficiente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

- Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.
- Proposta II: vacinação de 55,8% do público alvo
- Proposta III: vacinação de 88,2% do público alvo
- Proposta IV: vacinação de 49% do público alvo
- Proposta V: vacinação de 95,9% do público alvo

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.

Disponível em: www.virushpv.com.br. Acesso em: 30 ago. 2014 (adaptado)

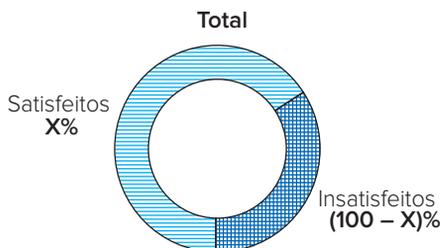
A proposta implementada foi a de número

A I.
B II.
C III.
D IV.
E V.

33 Uma pesquisa de opinião pública sobre o nível de satisfação com o lazer disponível em três capitais de estados brasileiros apresentou os seguintes resultados:

Por região	São Paulo	Porto Alegre	Salvador
Satisfeitos	49%	68%	73%
Insatisfeitos	51%	32%	27%

Por classe	A e B	C e D
Satisfeitos	66%	54%
Insatisfeitos	34%	46%

a) Considerando valores aproximados das populações de São Paulo (12 milhões), Porto Alegre (1,5 milhão) e Salvador (3 milhões), encontre o número inteiro mais próximo do valor de X que torna correto o gráfico de setores a seguir para a tabela “Por região”.

b) Considerando que a totalidade dos habitantes das cidades de São Paulo, Porto Alegre e Salvador faça parte da população economicamente ativa dessas capitais e que essa população seja formada apenas por indivíduos das classes A, B, C e D, faça uma estimativa da porcentagem de participação das classes C e D na população das três capitais juntas.

34 Se o número x é igual a $\left(\sqrt{25\%}\right)\%$ do número y, podemos afirmar que o número y é igual:

A à metade do número x.
B ao dobro do número x.
C a vinte vezes o número x.
D a duzentas vezes o número x.
E a duas mil vezes o número x.

35 Uma jarra contém 1 litro de uma mistura de água com suco de laranja, sendo que os volumes desses líquidos estão na razão de 3 para 4. Outra jarra contém 2 litros de outra mistura desses mesmos líquidos, mas na razão de 3 para 5 Se em um balde forem despejadas as misturas das duas jarras, então a proporção de água para o total da mistura no balde será de:

A $\frac{5}{14}$
B $\frac{11}{14}$
C $\frac{11}{28}$
D $\frac{15}{28}$
E $\frac{5}{8}$

36 **Unicamp 2018** A tabela abaixo exibe o valor das mensalidades do Ensino Fundamental em três escolas particulares nos anos de 2017 e 2018.

ANO	Escola A	Escola B	Escola C
2017	R$ 1.000,00	R$ 1 200,00	R$ 1 500,00
2018	R$ 1150,00	R$ 1.320,00	R$ 1.680,00

a) Determine qual escola teve o maior aumento percentual nas mensalidades de 2017 para 2018
b) Uma família tem três filhos matriculados na **Escola B** Suponha que essa escola ofereça um desconto de 10% na mensalidade para o segundo filho e de 20% para o terceiro filho. Calcule o valor a ser gasto mensalmente com os três filhos em 2018.

37 Dois tipos de exames para a detecção de certo vírus foram aplicados em um grupo de 80 pacientes, dos quais, com certeza, 60 são portadores desse vírus e 20 não são. Os resultados dos exames estão organizados nas tabelas a seguir.

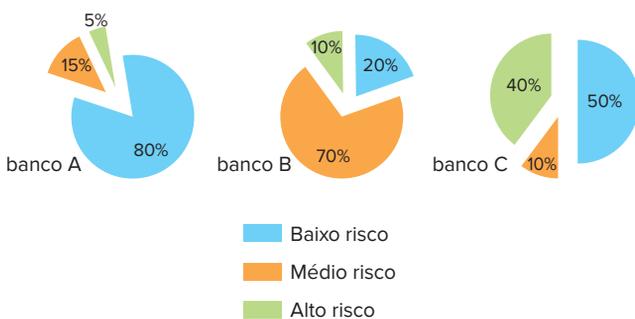
Exame 1	Portador	Não portador	Total
Resultado positivo	42	06	48
Resultado negativo	18	14	32

Exame 2	Portador	Não portador	Total
Resultado positivo	56	07	63
Resultado negativo	04	13	17

Note que em cada exame ocorrem tanto **falsos positivos** (pacientes não portadores do vírus com resultado positivo no exame) quanto **falsos negativos** (pacientes portadores do vírus com resultado negativo no exame).

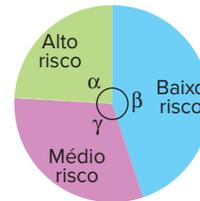
a) Calcule a porcentagem de pacientes portadores do vírus no grupo em estudo.

b) Considerando os resultados positivos em cada exame, qual dos dois exames tem a menor porcentagem de **falsos positivos**? Justifique sua resposta.

38 **Unesp 2016** Os gráficos indicam a diversificação de aplicações para um investimento, por grau de risco, sugeridas por cada um dos bancos A, B e C.

Um investidor decidiu aplicar um capital de R$ 6.000,00, em partes que foram distribuídas pelos três bancos, seguindo a diversificação do grau de risco sugerida por cada banco O capital aplicado foi distribuído da seguinte forma:

- total de R$ 1.000,00 no banco A (considerando os três graus de risco juntos);
- R$ 2.700,00 em investimentos de baixo risco (nos três bancos juntos);
- R$ 1.850,00 em investimentos de médio risco (nos três bancos juntos);
- R$ 1.450,00 em investimentos de alto risco (nos três bancos juntos).

O gráfico a seguir representa a diversificação da aplicação, por grau de risco, juntando os três bancos.

Investimento total de R$ 6.000,00
(bancos A, B e C)

Calcule os montantes de capital que foram investidos nos bancos B e C, e as medidas dos ângulos α, β e γ, indicados no gráfico.

39 **Enem 2015** A expressão “Fórmula de Young” é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

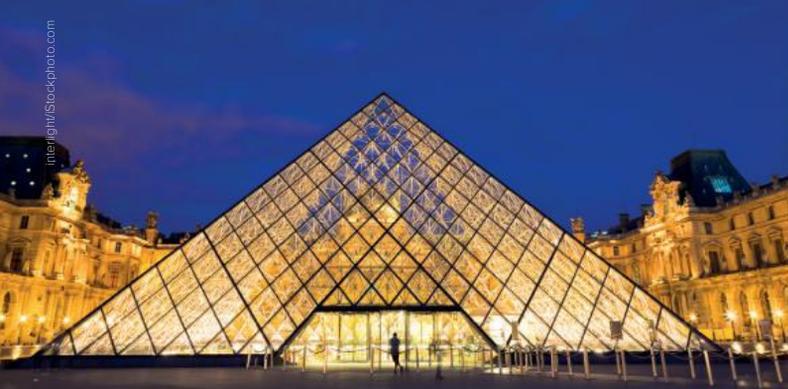
$$\text{dose de criança} = \left(\frac{\text{idade da criança (em anos)}}{\text{idade da criança (em anos)} + 12}\right) \cdot \text{dose do adulto}$$

Uma enfermeira deve administrar um medicamento X a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que, algumas horas antes, foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento Y, cuja dosagem de adulto é 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação Y administrada à criança estava correta. Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento X, em miligramas, igual a

A 15.
B 20.
C 30.
D 36.
E 40.

40 Além do símbolo de porcentagem (%), que indica par tes por centena, existe o símbolo da permilagem (‰), que indica partes por mil

Então, observando que 100% = 1000‰, determine a forma percentual de $\left(\frac{1}{10\%}\right)\% - \left(\frac{1}{10\%}\%\right)\%$

A 9%
B 0%
C 9%
D 99%
E 99%

FRENTE 3

CAPÍTULO 1

Ferramentas básicas da Geometria

O triângulo é a forma mais estável entre os polígonos. Uma de suas principais características é apresentar maior rigidez – em razão disso, muitas estruturas poligonais são construídas a partir de triângulos.

As propriedades métricas e trigonométricas dos triângulos têm sua base no triângulo retângulo, que será o principal objeto de estudo deste capítulo. Assim, partiremos desse tipo de triângulo para abordar o teorema de Pitágoras e suas aplicações, bem como as razões trigonométricas.

Para o bom entendimento das discussões e demonstrações, vamos começar com alguns conceitos básicos de Geometria.

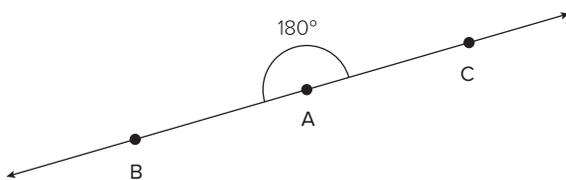
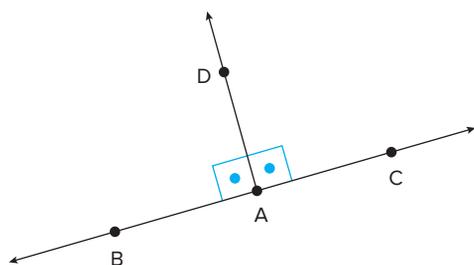
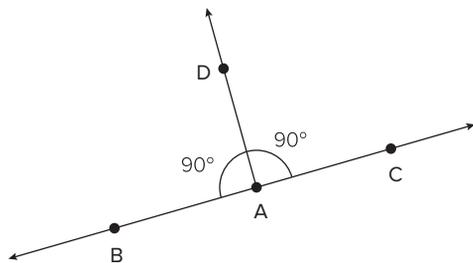
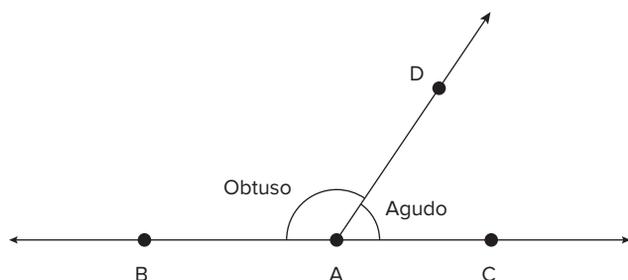
O triângulo retângulo

Noções iniciais

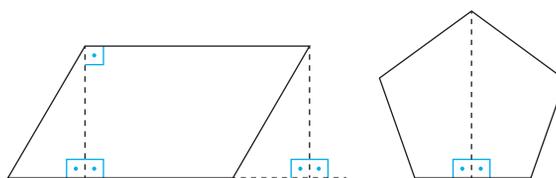
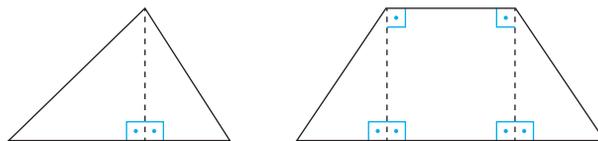
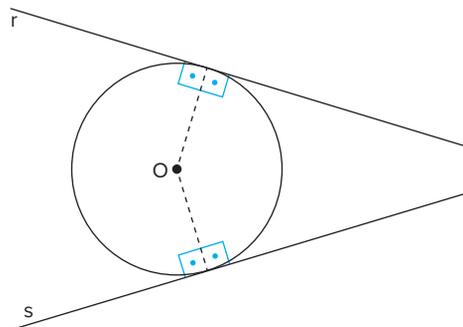
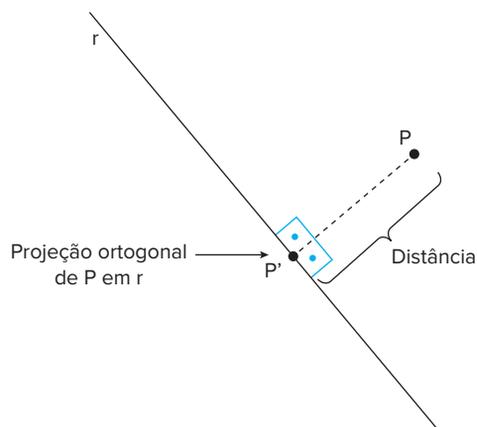
Observando duas retas ou dois segmentos de reta, ao percebermos que não há paralelismo entre elas, surge de imediato a noção de inclinação relativa entre essas figuras. A grandeza dessa inclinação relativa pode ser mensurada com base no conceito de ângulo.

Ângulos e o ângulo reto

As figuras geométricas formadas pela reunião dos pontos de duas semirretas de mesma origem são denominadas ângulos retilíneos. Esses ângulos costumam ser medidos em graus ou radianos

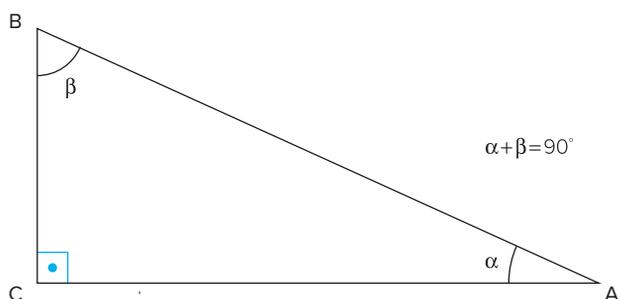
Quando três pontos estão sobre uma mesma reta, eles determinam um ângulo, chamado ângulo raso, cuja medida é 180°.

Todo ângulo raso equivale a dois ângulos retos; desse modo, cada ângulo reto mede 90°.

Os ângulos cujas medidas estão entre 0° e 90° são denominados **agudos**, e aqueles cujas medidas estão entre 90° e 180° recebem o nome de ângulos **obtusos**

Já os ângulos **retos** são aqueles determinados por duas retas concorrentes (têm apenas um ponto em comum) quando os quatro ângulos formados tiverem a mesma medida (forem congruentes) Nesse caso, as retas serão chamadas de perpendiculares

Essa situação pode ser observada em diversas figuras geométricas. Vejamos alguns exemplos:

- Alturas de polígonos como triângulos, trapézios, paralelogramos ou pentágonos estão contidas em retas que são perpendiculares às bases desses polígonos.

- Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que une o centro da circunferência ao ponto onde ocorre a tangência.

- A distância de um ponto P até uma reta *r* é representada por um segmento perpendicular à reta com uma extremidade em P e outra em *r* Nesse caso, a extremidade da distância que está contida na reta *r* é denominada projeção ortogonal do ponto P sobre essa reta

Definição de triângulo retângulo

Triângulos são formas geométricas que possuem três lados e três ângulos. Um importante teorema, conhecido como teorema angular de Tales, diz que as medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo somam sempre o mesmo que um ângulo raso (180°). Assim, supondo que α, β e γ são as medidas dos três ângulos internos de um triângulo, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

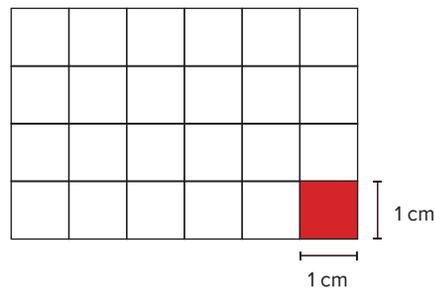
Dizemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos é reto (de medida 90°). Assim, os outros dois ângulos são agudos e suas medidas somam apenas 90°.

Os lados de um triângulo retângulo são chamados de **hipotenusa** e **catetos**. A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e o maior lado do triângulo retângulo. Desse modo, na figura:

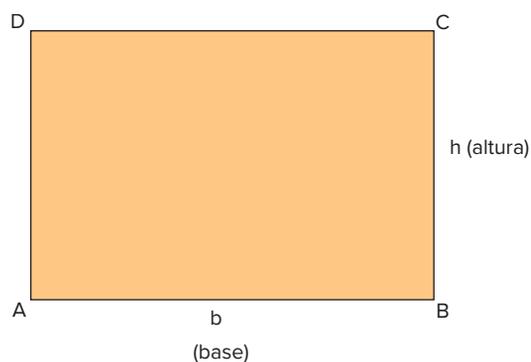
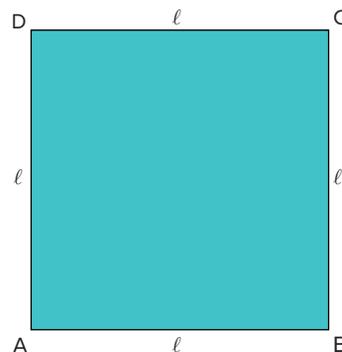
- $\overline{AB}$ é a hipotenusa do triângulo, logo, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são os catetos;
- $\overline{AC}$ é o cateto **oposto** ao ângulo de medida β ou o cateto **adjacente** ao ângulo de medida α;
- $\overline{BC}$ é o cateto **adjacente** ao ângulo de medida β ou o cateto **oposto** ao ângulo de medida α.

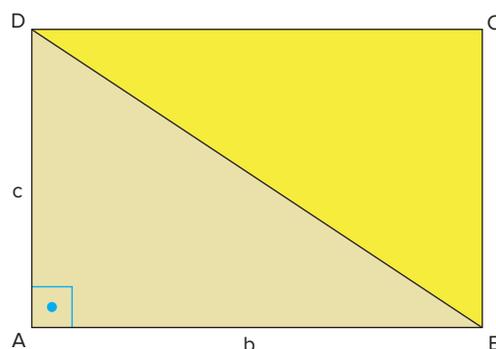
Áreas

Outro conceito que precisaremos recordar é o cálculo de áreas simples, como retângulos, quadrados e triângulos retângulos.

A área pode ser entendida como uma medida de superfície. E, para medir a extensão de uma superfície, criamos uma superfície padrão (unidade de área) e a comparamos com outras superfícies. A superfície padrão mais comum é um quadrado de lado unitário, que passará a ser nossa superfície de área unitária. Cobrimos, assim, a superfície com esse padrão, de maneira que não haja superposição e contamos o número de quadrados unitários. Esse número é a área da superfície. Caso não consigamos cobri-la inteiramente, recorremos a quadrados cada vez menores, que cabem um número inteiro de vezes em nosso quadrado unitário, em um processo de aproximações sucessivas.

O quadrilátero mais simples para medirmos a área é o **retângulo**. Por ter quatro ângulos retos, nós o utilizaremos como referência para o cálculo de área dos outros quadriláteros Veja a figura:

O retângulo da figura tem lados de 4 cm e 6 cm. É fácil ver que cabem $4 \cdot 6 = 24$ quadrados de 1 cm^2 em sua superfície. Por isso, sua área é igual a 24 cm^2.

De acordo com exemplos como esse, vamos definir a área do retângulo de base *b* e altura *h* como o produto $b \cdot h$.

O quadrado é um retângulo de lados congruentes. Assim, a área de um quadrado de lado ℓ é igual a $\ell \cdot \ell = \ell^2$.

Um triângulo retângulo de catetos *b* e *c* e hipotenusa *a* pode ser entendido como metade de um retângulo de lados *b* e *c*. Logo, a área do triângulo retângulo de catetos *b* e *c* pode ser dada por $\frac{b \cdot c}{2}$.

FRENTE 3

O teorema de Pitágoras

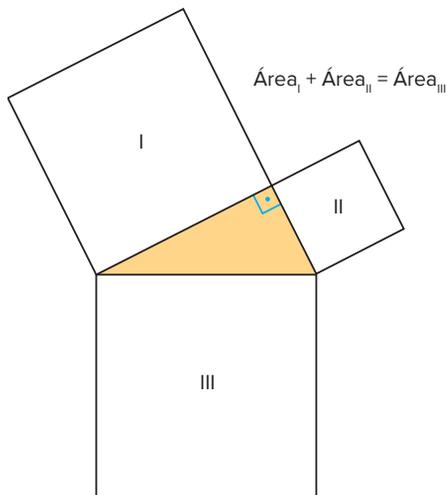
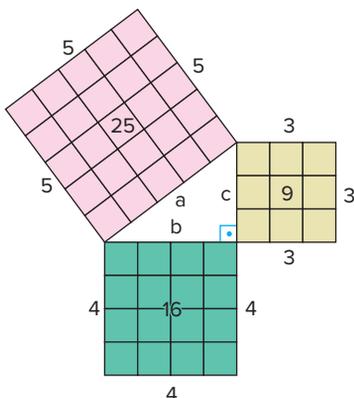
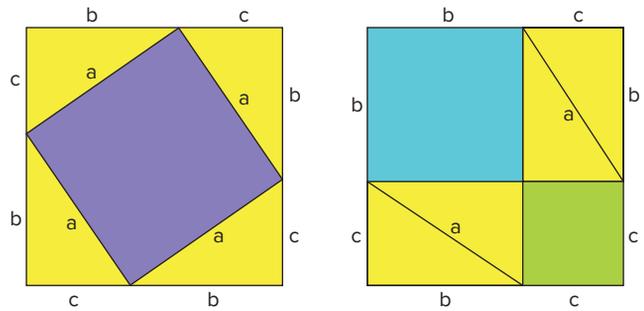
O teorema de Pitágoras diz respeito aos triângulos retângulos, ou seja, aos triângulos que possuem um ângulo reto (90°) Os lados que formam esse ângulo reto são os catetos desse triângulo, e o lado oposto a esse ângulo é a hipotenusa do triângulo. O teorema diz:

> "O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos."

! Atenção

Se a hipotenusa tem medida *a* e os catetos têm medidas *b* e *c*, tem-se:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para entender o teorema de Pitágoras, podemos interpretar esse enunciado da seguinte forma: a área do quadrado cujos lados medem o mesmo que a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem o mesmo que os catetos do triângulo.

A figura a seguir, por exemplo, permite uma verificação do teorema para o caso particular do triângulo de lados 3, 4 e 5 Veja que a área do quadrado de lado a = 5 (medida da hipotenusa) é 25, enquanto as áreas dos quadrados com lados b = 4 e c = 3 (catetos) são, respectivamente, iguais a 16 e 9. Temos que 16 + 9 = 25, ou seja, $b^2 + c^2 = a^2$

Exemplos como esse podem tornar o resultado crível, mas não são uma justificativa geral ou uma demonstração. Há um grande número de demonstrações desse teorema Vejamos uma delas, atribuída ao próprio Pitágoras

Os dois quadrados da figura acima têm lados de medida b + c. Ao remover os triângulos retângulos de catetos *b* e *c* dos dois quadrados (os triângulos em amarelo), as áreas remanescentes devem ser iguais. Do lado esquerdo, sobrou um quadrado de lado *a* (em roxo) e, do lado direito, um quadrado de lado *b* (em azul) e um de lado *c* (em verde) Assim, a área roxa (a^2) é igual à soma das áreas azul (b^2) e verde (c^2).

O primeiro aspecto prático do teorema de Pitágoras é a facilidade com que se pode encontrar a medida de um dos lados de um triângulo retângulo conhecendo as medidas dos outros dois

Para encontrar o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, basta somarmos os quadrados das medidas dos catetos e extrair a raiz quadrada dessa soma. Assim, se os catetos medem 3 cm e 5 cm, por exemplo, a soma dos quadrados de suas medidas é 9 cm² + 25 cm² = = 34 cm² e, portanto, a hipotenusa desse triângulo tem $\sqrt{34}$ cm de comprimento.

Para achar o comprimento de um cateto, basta subtrair mos do quadrado da medida da hipotenusa o quadrado da medida do outro cateto, extraindo, em seguida, a raiz quadrada dessa diferença Assim, se o cateto de um triângulo mede 3 cm e a hipotenusa mede 7 cm, por exemplo, a diferença dos quadrados das medidas desses valores é 49 cm² – 9 cm² = 40 cm² e, por conseguinte, o outro cateto desse triângulo tem $\sqrt{40}$ cm de comprimento, ou seja, $2\sqrt{10}$ cm.

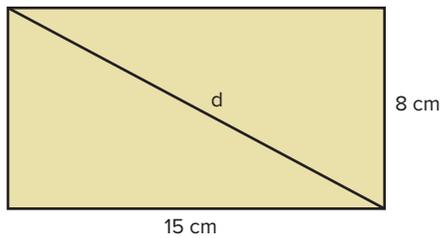
! Atenção

Reciprocamente, o teorema de Pitágoras diz que: "Se, em um triângulo, o quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, então o ângulo oposto ao maior lado é reto".

Assim, podemos concluir que os triângulos cujos lados medem 5 cm, 12 cm e 13 cm ou 1 cm, $\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{3}$ cm são triângulos retângulos, pois $13^2 = 12^2 + 5^2$ e $\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$, por exemplo.

Vejamos alguns exemplos clássicos de aplicações do teorema de Pitágoras

Exercícios resolvidos

1 Calcule a diagonal de um retângulo de lados 8 cm e 15 cm.

Resolução:

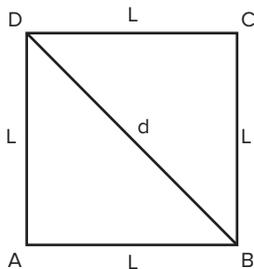
Sendo d > 0, a medida da diagonal desse retângulo é dada por:

$$d^2 = 8^2 + 15^2$$
$$d^2 = 64 + 225$$
$$d^2 = 289$$
$$d = +\sqrt{289} \Rightarrow d = 17$$

A diagonal do retângulo mede 17 cm.

2 Quanto mede a diagonal de um quadrado de lado L?

Resolução:

A diagonal do quadrado o divide em dois triângulos retângulos e isósceles, conforme mostra a figura a seguir

Sendo d > 0 a medida da diagonal do quadrado, apli cando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos, temos:

$$d^2 = L^2 + L^2 \Rightarrow d^2 = 2L^2 \Rightarrow d = +\sqrt{2L^2} \Rightarrow d = L\sqrt{2}$$

A diagonal de um quadrado de lado L mede $L\sqrt{2}$.

3 Quanto mede a altura de um triângulo isósceles de lados 4 cm, 6 cm e 6 cm?

Resolução:

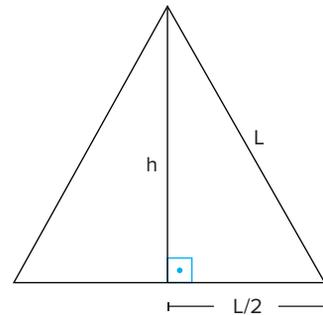
A altura (h) de um triângulo isósceles divide sua base ao meio. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$h^2 + 2^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 36 \quad 4 \Rightarrow h^2 = 32 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = +\sqrt{32} \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$$

A altura de um triângulo isósceles de base 4 cm e lados 6 cm mede $4\sqrt{2}$ cm.

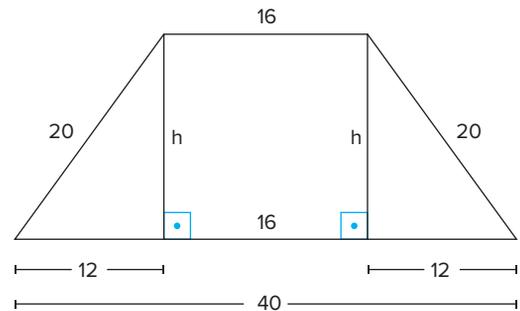
4 Calcule a altura de um triângulo equilátero de lado L.

Resolução:

A altura do triângulo equilátero de lado L divide sua base ao meio. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = L^2 \Leftrightarrow h^2 + \frac{L^2}{4} = L^2 \Leftrightarrow h^2 = L^2 \quad \frac{L^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = \frac{4L^2 \quad L^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow h = +\sqrt{\frac{3L^2}{4}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Um triângulo equilátero de lado L tem altura igual a $\frac{L\sqrt{3}}{2}$.

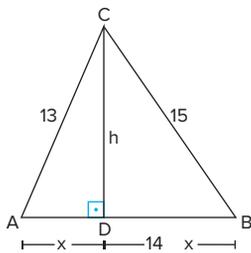
5 Um trapézio isósceles tem bases que medem 16 cm e 40 cm e lados que medem 20 cm. Qual a altura desse trapézio?

Resolução:

Traçando as duas alturas h > 0, conforme a figura, os dois triângulos retângulos nas laterais do trapézio são congruentes, ambos com hipotenusa de 20 cm e um dos catetos de 12 cm.
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + 12^2 = 20^2$$
$$h^2 = 400 \quad 144$$
$$h^2 = 256$$
$$h = +\sqrt{256} \Rightarrow h = 16$$

O trapézio tem 16 cm de altura.

6 Um triângulo escaleno ABC tem lados com as seguin tes medidas: AB = 14 cm, AC = 13 cm e BC = 15 cm. Calcule a altura relativa ao lado AB

Resolução:

Ao traçarmos a altura $\overline{CD}$, de medida h, ela não divide a base $\overline{AB}$ ao meio, pois o triângulo ABC é escaleno. Fazendo AD = x e DB = 14   x, temos:

- no triângulo ADC: $x^2 + h^2 = 13^2 \Leftrightarrow x^2 + h^2 = 169$ (I)
- no triângulo BDC: $(14 - x)^2 + h^2 = 15^2 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (14 - x)^2 + h^2 = 225 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 196 - 28x + x^2 + h^2 = 225$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$196 - 28x + \underbrace{x^2 + h^2}_{169} = 225 \Rightarrow 196 - 28x + 169 = 225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28x = 196 + 169 \quad \Rightarrow 225 \quad \Rightarrow 28x \quad 140 \Rightarrow x = \frac{140}{28} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5$$

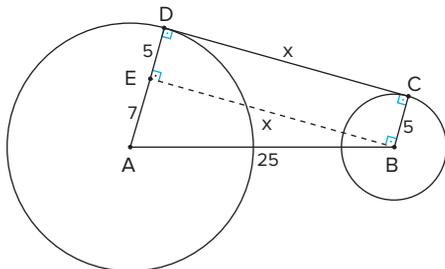
Substituindo o valor encontrado em (I), temos:

$$5^2 + h^2 = 169 \Rightarrow h^2 = 169 \quad 25 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$$

Portanto, a altura relativa ao lado AB mede 12 cm.

7 Problema de tangência. Sejam duas circunferências: a primeira de centro A e raio 12 cm e a segunda de centro B e raio 5 cm. Sabendo que a distância entre os dois centros é AB = 25 cm, calcule o comprimento do segmento tangente **externo** comum às duas circunferências.

Resolução:

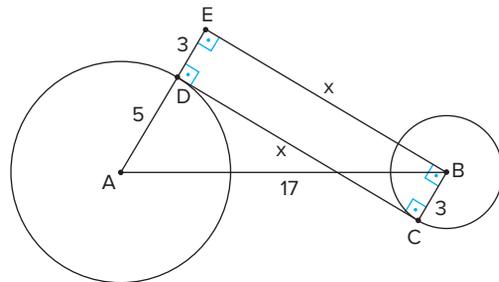
Sejam C e D os pontos de tangência, conforme a figura Queremos calcular CD

Sabemos que, ao ligar o centro ao ponto de tangência, o raio e a reta tangente formam 90° (essa ideia é fundamental na solução dos problemas de tangência). Assim, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ e BC $\perp$ $\overline{CD}$. Tracemos $\overline{BE} \perp \overline{AD}$. No retângulo BCDE, temos: BE = CD = x e ED = BC = 5 cm. Assim, AE = AD   ED = 12   5 = 7 cm.
Sendo x a medida de $\overline{CD}$, em centímetros, no triângulo AEB, encontramos:

$$x^2 + 7^2 = 25^2 \Rightarrow x^2 = 625 - 49 \Rightarrow x^2 = 576 \Rightarrow x = 24$$

Logo, o comprimento do segmento tangente é 24 cm.

8 Problema de tangência. Sejam duas circunferências: a primeira de centro A e raio 5 cm e a segunda de centro B e raio 3 cm. Sabendo que a distância entre os dois centros é AB = 17 cm, calcule o comprimento do segmento tangente **interno** comum às duas circunferências.

Resolução:

Sejam C e D os pontos de tangência, como mostra a figura. Queremos calcular CD.

Sabemos que, ao ligar o centro ao ponto de tangência, o raio e a reta tangente formam 90° Assim, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ e $\overline{BC} \perp \overline{CD}$. Prolonguemos $\overline{AD}$ até E de modo que $\overline{BE} \perp \overline{AD}$. No retângulo BCDE, temos: BE = CD = x e ED = BC = 3 cm
Logo, AE = AD + ED = 5 + 3 = 8 cm No triângulo AEB, obtemos:

$$x^2 + 8^2 = 17^2 \Rightarrow x^2 = 289 \quad 64 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = 15$$

Logo, o comprimento do segmento tangente interno é de 15 cm.

Observação: Nas condições dos exemplos 7 e 8, há dois segmentos tangentes externos congruentes e dois segmentos tangentes internos congruentes

Triângulos pitagóricos

Vimos, nos exemplos anteriores, que alguns triângulos retângulos têm lados com medidas representadas por números inteiros e outros não. Aqueles triângulos retângulos cujos lados são representados por inteiros são chamados de pitagóricos. Quando os lados são números primos entre si, recebem o nome de pitagóricos primitivos, que são:

- o triângulo de lados 3, 4 e 5, pois $5^2 = 3^2 + 4^2$ e mdc(3, 4, 5) = 1;
- o triângulo de lados 5, 12 e 13, pois $13^2 = 5^2 + 12^2$ e mdc(5, 12, 13) = 1.

São pitagóricos não primitivos 6, 8 e 10 e 10, 24 e 26 porque, apesar de satisfazerem o teorema de Pitágoras (verifique!), temos mdc(6, 8, 10) = 2 ≠ 1 e mdc(10, 24, 26) = 2 ≠ 1. Observe que (6, 8, 10) são números proporcionais a (3, 4, 5), o que faz com que os triângulos sejam semelhantes. Dizemos que esses dois triângulos são da família (3, 4, 5), da qual (3, 4, 5) é o primitivo. A mesma observação se aplica a (5, 12, 13) e (10, 24, 26).

Podemos demonstrar que todo triângulo pitagórico primitivo (a, b, c) pode ser obtido pelo procedimento a seguir:

1. Escolhemos dois números inteiros positivos m e n, $m > n$, m e n primos entre si e de paridades diferentes.

2. Determinamos as medidas dos lados da seguinte maneira:

$a = m^2 + n^2$ $b = 2mn$ $c = m^2 - n^2$

A tabela a seguir indica alguns pitagóricos obtidos pelo método dado.

m	n		a	b	c
2	1		5	4	3
3	2		13	12	5
4	1		17	8	15
4	3	⇔	25	24	7
5	2		29	20	21
5	4		41	40	9

O mais famoso dos pitagóricos é o triângulo de medidas 3, 4 e 5.

Exercícios resolvidos

9 Mostre que o único triângulo pitagórico primitivo que tem lados em progressão aritmética é o triângulo 3, 4, 5.

Resolução:

Como os lados do triângulo estão em progressão aritmética, sejam (ℓ r, ℓ, ℓ + r) suas medidas, em que ℓ e *r* são inteiros positivos. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(\ell + r)^2 = \ell^2 + (\ell - r)^2$$
$$\ell^2 + 2\ell r + r^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2\ell r + r^2$$
$$2\ell r + 2\ell r = \ell^2$$
$$4\ell r = \ell^2$$

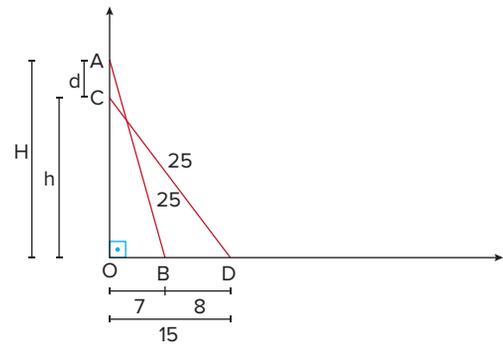
Como $\ell > 0$, simplificando a equação, encontramos: $\ell = 4r$

Assim, os lados do triângulo são 4r r = 3r, 4r e 4r + r = = 5r. Para que mdc(3r, 4r, 5r) = 1, devemos ter r = 1 e o triângulo de lados (3r, 4r, 5r) é o triângulo (3, 4, 5).

Observação: Todos os triângulos semelhantes ao (3, 4, 5), ou seja, com lados (3r, 4r, 5r), com *r* real e positivo, terão os lados em progressão aritmética.

10 **Fuvest** Uma escada de 25 dm de comprimento se apoia num muro do qual seu pé dista 7 dm Se o pé da escada se afastar mais 8 dm do muro, qual o deslocamento verificado pela extremidade superior da escada?

A 4 dm.
B 5 dm.
C 6 dm.
D 7 dm.
E 8 dm

Resolução:

Os triângulos AOB e COD representam as duas posições da escada, e *d* é o desnível que queremos calcular.

No triângulo AOB, temos:

$H^2 + 7^2 = 25^2 \Rightarrow H^2 = 625 \quad 49 \Rightarrow H^2 = 576 \Rightarrow$
$\Rightarrow H = 24$ dm

No triângulo COD, encontramos:

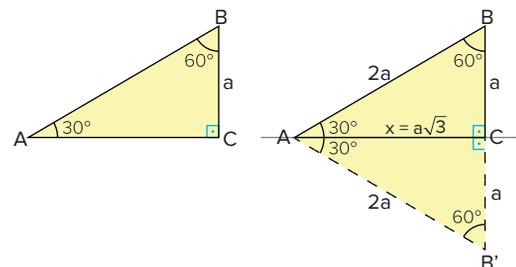
$h^2 + 15^2 = 25^2 \Rightarrow h^2 = 625 - 225 \Rightarrow h^2 = 400 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 20$ dm

Assim, o desnível *d* será: d = 24 20 = 4 dm.

Alternativa: A.

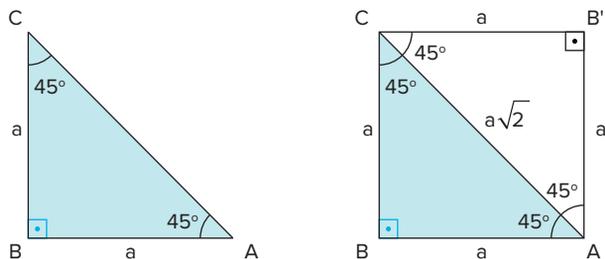
Triângulos notáveis

Alguns triângulos retângulos, por serem tão comuns em problemas, acabaram ganhando o apelido de triângulos notáveis. Aqui, destacaremos dois: o triângulo de ângulos 30°, 60° e 90°; e o triângulo retângulo e isósceles

Observe na figura a seguir o triângulo ABC de ângulos 30°, 60° e 90°, o qual chamaremos, daqui em diante, (30°, 60°, 90°). Em torno do lado $\overline{AC}$, vamos fazer uma rotação de 180° (reflexão), colocando o ponto B na posição B' O triângulo ABB' é equilátero, pois, se BC = a, teremos AB' = AB = 2a e BB' = 2BC = 2a.

Sendo AC = x e aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, teremos:

$$x^2 + a^2 = (2a)^2 \Rightarrow x^2 = 4a^2 \quad a^2 \Rightarrow x^2 = 3a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = +\sqrt{3a^2} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$$

A conclusão a que chegamos é que o triângulo (30°, 60°, 90°) sempre terá os lados proporcionais aos números (1, $a\sqrt{3}$, 2), ou seja, lados de medidas (a, $a\sqrt{3}$, 2a), $a \in \mathbb{R}_+^*$, com a oposto ao ângulo de 30°, $\sqrt{3}a$ oposto ao ângulo de 60° e 2a oposto ao ângulo de 90°

Outro triângulo notável é o triângulo retângulo e isósceles. Veja as figuras seguintes:

O triângulo ABC, retângulo em B, tem os catetos com a mesma medida, digamos *a*, ou seja, AB = BC = a. Assim, os ângulos Â e Ĉ possuem, ambos, medida 45°. Como podemos ver na figura, o triângulo ABC é metade de um quadrado de lado *a*, e sua hipotenusa AC é a diagonal do quadrado, com medida $AC = a\sqrt{2}$.

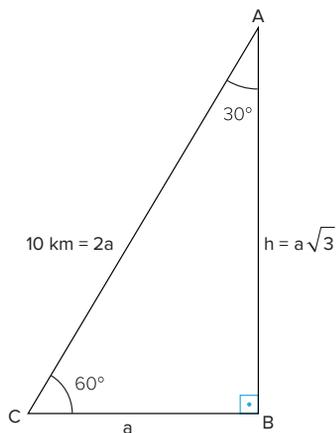
Logo, os lados do triângulo retângulo e isósceles têm medidas proporcionais a $(1, 1, \sqrt{2})$, ou seja, são da forma $(a, a, a\sqrt{2})$.

Vejamos alguns exemplos de aplicação dessas ideias.

Exercícios resolvidos

11 Um avião decola de maneira que a trajetória forme um ângulo de 60° com o solo, supostamente plano e retilíneo Após o deslocamento de 10 km em linha reta, determine a que altura o avião se encontra em relação ao solo.

Resolução:

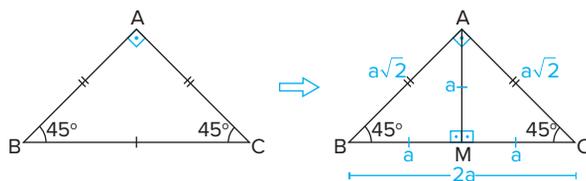
O triângulo ABC da figura a seguir é um triângulo (30°, 60°, 90°), tendo, portanto, $BC = a$, $AB = h = a\sqrt{3}$ e $AC = 2a$.

A medida $AC = 2a$ da hipotenusa corresponde à distância percorrida pelo avião, enquanto AB corresponde à altura em relação ao solo, ou seja, $AB = h = a\sqrt{3}$.

Assim: $\begin{cases} 2a = 10\text{ km} \Rightarrow a = 5\text{ km} \\ h = a\sqrt{3} = 5\sqrt{3}\text{ km} \end{cases}$

Portanto, a altura do avião em relação ao solo após percorrer 10 km é igual a $5\sqrt{3}$ km $\cong$ 8,66 km

12 Determine a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo e isósceles de perímetro igual a 2 cm.

Resolução:

O triângulo ABC da figura a seguir é retângulo e isós celes com hipotenusa $\overline{BC}$.

Ao traçarmos a altura $\overline{AM}$ do triângulo, a hipotenusa BC fica dividida ao meio. Os triângulos ABM e ACM também são retângulos e isósceles.

Sendo a altura $AM = a$, temos: $\begin{cases} BM = AM = a \text{ e } AB = a\sqrt{2} \\ CM = AM = a \text{ e } AC = a\sqrt{2} \\ BC = BM + MC = 2a \end{cases}$

Como o perímetro do triângulo ABC é 2 cm, encon tramos:

$$AC + AB + BC = 2 \Rightarrow a\sqrt{2} + a\sqrt{2} + 2a = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a + 2a\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a + a\sqrt{2} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a\left(1+\sqrt{2}\right) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\text{ cm}$$

Racionalizando, obtemos:

$$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1 \quad \sqrt{2}}{1 \quad \sqrt{2}} = \frac{1 \quad \sqrt{2}}{1^2 \quad \left(\sqrt{2}\right)^2} =$$
$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1 \quad 2} = \frac{1-\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \quad 1\text{ cm}$$

Assim, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo e isósceles de perímetro igual a 2 cm mede $\sqrt{2} \quad 1$ cm.

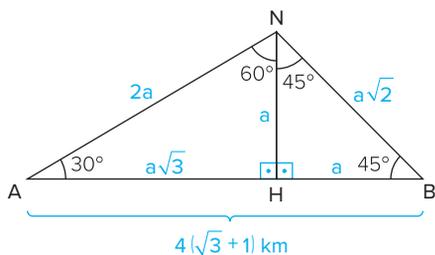
13 Tião está fazendo sua tradicional caminhada matutina em uma praia ideal, supostamente retilínea A trajetória de Tião se dá em linha reta, com velocidade constan te, e paralela ao mar Ao chegar ao ponto A, encontra seu camarada João e ambos avistam um barco firmemente ancorado no ponto N, formando 30° com o prolongamento da trajetória de Tião, que segue então sua trajetória e caminha mais $4(\sqrt{3} + 1)$ km, quando encontra seu camarada Marcão no ponto B. Olhando para o navio que ficou parado, Tião conclui que a linha que o liga ao navio $(\overline{NB})$ e o segmento de reta que acaba de percorrer $(\overline{AB})$ formam um ângulo de 45°. Após fornecer todas essas informações ao camarada Marcão, ele pergunta:

a) Qual a distância do navio à praia? (trajetória de Tião)

b) Quanto mede AN?

c) Quanto mede NB?

Sabendo que Marcão acertou as respostas, determi ne o que ele respondeu

Resolução:

No triângulo ANB, a distância percorrida por Tião é $\overline{AB}$, enquanto a distância do navio até a praia é igual à medida NH = a, da altura relativa a $\overline{AB}$. Observe que os triângulos ANH e BNH são do tipo (30°, 60°, 90°) e (45°, 45°, 90°), respectivamente Dessa maneira, considerando NH = a, temos:

no triângulo ANH: NH = a, AH = $a\sqrt{3}$ e NA = 2a;

no triângulo BNH: NH = a, BH = a e BN = $a\sqrt{2}$.

Assim:

$$AB = 4\left(\sqrt{3}+1\right)$$
$$AH + HB = 4\left(\sqrt{3}+1\right)$$
$$a\sqrt{3} + a = 4\left(\sqrt{3}+1\right)$$
$$a\left(\sqrt{3}+1\right) = 4\left(\sqrt{3}+1\right)$$
$$a = 4$$

Respondendo às perguntas:

a) A distância do navio à praia é igual a 4 km

b) AN = 2a = 8 km.

c) NB = $a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ km $\cong$ 5,66 km.

Observação: O método utilizado nessa resolução é recomendável para resolução também em triângulos de ângulos (30°, 45°, 105°) ou (45°, 60°, 75°)

Saiba mais

As civilizações egípcia, suméria e chinesa já sabiam da existência do resultado conhecido como teorema de Pitágoras pelo menos 12 séculos antes do nascimento do matemático.

No papiro de Moscou (que, apesar do nome dado, por estar no Museu de Moscou, é da civilização egípcia e data de 1890 a.C. aproximadamente), há o cálculo de alturas de trapézio. No papiro de Rhind (ou de Ahmes), datado de 1650 a C., que é cópia de um trabalho anterior, há 74 problemas, dos quais 20 são de Geometria e Trigonometria. Na obra chinesa *K'iu-chang Suan Shu (Aritmética em nove seções)*, que data entre os séculos III e II a.C., já há referências ao resultado. Nessa obra, foram reunidos resultados e práticas consideradas ancestrais pelos chineses da época. Também há cálculos de comprimento e trigonométricos em tábuas de argila *(Plimpton Collection)* da civilização suméria de pelo menos 1600 a.C.

Trecho do Papiro de Rhind.

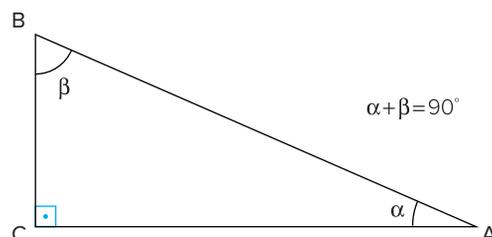
No entanto, foi a escola pitagórica que apresentou a primeira justificativa para o teorema. Pitágoras, se existiu, foi um filósofo e matemático grego natural da Ilha de Samos, onde nasceu por volta do ano 580 a.C. Sua vida é envolta em lendas, até porque toda a documentação sobre sua existência foi destruída. Haveria, inclusive, uma biografia dele escrita por Aristóteles. Sabe-se, porém, que a escola pitagórica realmente existiu. Nela se ensinavam quatro ramos do conhecimento: Aritmética, Música, Geometria e Esférica (Trigonometria) Segundo algumas lendas, Pitágoras era um jovem de extraordinária beleza e inteligência, além de grande força e habilidades atléticas. Foi enviado a Mileto para estudar com Tales, o qual rapidamente percebera que não tinha mais nada a ensinar a Pitágoras. Este saiu, então, em viagem pelo mundo, tendo provavelmente conhecido o Egito, a Índia e a China. Foi contemporâneo de Buda e Confúcio; muitos dos seus ensinamentos filosóficos lembram bastante as religiões orientais.

Ele voltou para o Ocidente, tendo se estabelecido em Crotona (sudoeste da Itália), onde fundou a escola pitagórica. Os pitagóricos fizeram muitas contribuições à Filosofia e à Matemática, entre elas a demonstração do teorema de Pitágoras e a descoberta dos números irracionais.

Devido ao charme e à popularidade desse teorema, muitos matemáticos se preocuparam com sua demonstração. O professor de Matemática Elisha Scott Loomis, da cidade de Cleveland, Ohio, já falecido, reuniu, na segunda edição de seu livro, em 1940, 370 demonstrações do teorema!

O triângulo retângulo e as razões trigonométricas

Como vimos, um dos ângulos de um triângulo retângulo mede 90° e os outros dois são agudos e complementares. Na figura do triângulo ABC a seguir, temos que:

- a hipotenusa do triângulo é $\overline{AB}$;
- o cateto oposto ao ângulo de medida α é $\overline{BC}$;
- o cateto adjacente ao ângulo de medida β também é $\overline{BC}$;
- o cateto adjacente ao ângulo de medida α é $\overline{AC}$;
- o cateto oposto ao ângulo de medida β também é $\overline{AC}$.

As razões trigonométricas **seno**, **cosseno** e **tangente** de ângulos agudos são definidas como quocientes entre os comprimentos de determinados lados de um triângulo retângulo Em relação aos ângulos de medidas α e β no triângulo ABC da figura anterior, encontramos:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\text{cateto adjacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{tg}(\beta) = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{cateto adjacente a } \beta} = \frac{AC}{BC}$$

De acordo com essas razões trigonométricas, obtemos:

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(\alpha) = \cos(\beta) \\ \text{sen}(\beta) = \cos(\alpha) \\ \text{tg}(\alpha) \cdot \text{tg}(\beta) = 1 \end{cases}$$

Como a hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo, os valores de seno e cosseno de ângulos agudos sempre serão positivos e menores que 1. Já a tangente pode assumir qualquer valor real positivo.

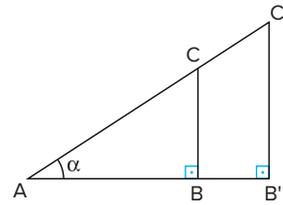
! Atenção

A tangente de um ângulo agudo também é igual à razão entre o seno e o cosseno desse mesmo ângulo:

$$\frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}} =$$

$$= \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}} \cdot \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente a } \theta} =$$

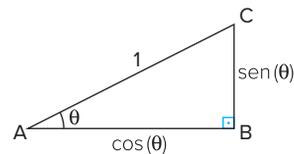
$$= \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \text{tg}(\theta)$$

Se dois triângulos retângulos têm os mesmos ângulos, eles são semelhantes e, portanto, apresentam os lados proporcionais. Observe a figura a seguir:

Os triângulos ABC e AB'C' são semelhantes. Portanto:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \text{sen}(\alpha) \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \cos(\alpha)$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \text{tg}(\alpha)$$

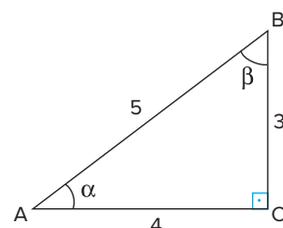
O que percebemos aqui é que, para qualquer par de triângulos semelhantes, os valores das funções trigonométricas de um de seus ângulos agudos são os mesmos para os dois triângulos, pois os lados aumentam proporcionalmente. Isso significa que o valor do seno, do cosseno ou da tangente de um ângulo agudo é uma característica do ângulo, e não do triângulo particular do qual ele faz parte.

Se a hipotenusa de um triângulo retângulo tem medida unitária, então as medidas dos seus catetos coincidirão com o seno e o cosseno de um mesmo ângulo agudo desse triângulo.

$$\text{hipotenusa} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{cateto oposto} = \text{seno} \\ \text{cateto adjacente} = \text{cosseno} \end{cases}$$

A sentença algébrica que expressa o teorema de Pitá goras, nesse triângulo retângulo de hipotenusa unitária, é conhecida como a relação fundamental da Trigonometria

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Essa relação é válida para qualquer ângulo agudo θ (no seu curso de Trigonometria, você verá que essa relação também é válida para todos os ângulos, agudos ou não).

Vejamos o exemplo: no triângulo ABC, de medidas AB = 5 cm, BC = 3 cm e AC = 4 cm, determine as funções trigonométricas dos ângulos agudos

Já vimos que o triângulo 3, 4, 5 é retângulo. Assim, temos:

$$\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta) = \frac{BC}{AB} = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos(\alpha) = \text{sen}(\beta) = \frac{AC}{AB} = \frac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{3\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\text{tg}(\beta) = \frac{AC}{BC} = \frac{4\text{ cm}}{3\text{ cm}} = \frac{4}{3} \cong 1{,}\overline{3}$$

Observe que:

$\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = (0{,}6)^2 + (0{,}8)^2 = 0{,}36 + 0{,}64 = 1$ e $\text{tg}(\alpha) \cdot \text{tg}(\beta) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$

Exercício resolvido

14 Determinado ângulo agudo α tem $\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{3}$ Calcule o valor de tg α.

Resolução:

Sabemos que $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ e que $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, assim como $\cos(\alpha) > 0$, temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9-4}{9} \Rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{5}{9}$$

$$\cos(\alpha) = +\sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Logo: } \text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Além das três razões trigonométricas que acabamos de estudar, existem três outras razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, que são: a secante (**sec**), a cossecante (**cossec**) e a cotangente (**cotg**).

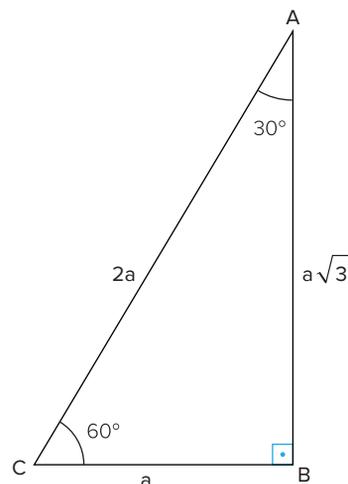
Embora se acredite que as primeiras razões trigonométricas, usadas na Antiguidade pelos babilônios e egípcios, tenham sido a secante e a cotangente, elas são, atualmente, chamadas de auxiliares e costumam ser definidas com base no seno, no cosseno ou na tangente

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \qquad \text{cossec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)}$$

$$\text{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \text{ e } \text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)}$$

Ângulos notáveis

Para alguns (poucos) ângulos, podemos calcular as razões trigonométricas com base em construções geométricas simples. São bastante conhecidas as construções para os ângulos de 30°, 45° e 60°, conhecidos como ângulos notáveis. Existem outras construções para ângulos de 36°, 18°, 72°, 15°, 75°, ..., entre outros. Aqui nos ateremos aos notáveis: 30°, 45° e 60°.

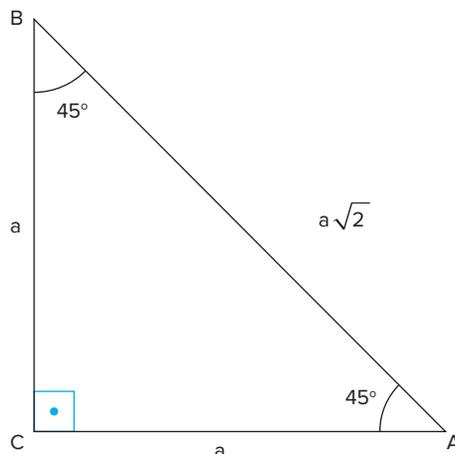
Vamos usar novamente o triângulo notável (30°, 60°, 90°).

No triângulo ABC da figura com med $(\hat{A}) = 30°$, med $(\hat{B}) = 90°$, med $(\hat{C}) = 60°$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$ e $AC = 2a$, temos:

$$\text{sen}(60°) = \cos(30°) = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60°) = \text{sen}(30°) = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}(30°) = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}(60°) = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

Agora, vamos utilizar o triângulo retângulo e isósceles, de ângulos (45°, 45°, 90°) e lados $(a, a, a\sqrt{2})$. Veja a figura:

Da figura, obtemos:

$$\text{sen}(45°) = \cos(45°) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}(45°) = \frac{a}{a} = 1$$

Podemos resumir esses resultados na tabela a seguir:

! Atenção

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Os valores dessa tabela são amplamente utilizados nos exames vestibulares no Brasil e, muitas vezes, não são fornecidos. Por isso, é recomendável que sejam memorizados.

Às vezes, temos dúvidas do tipo: “ao dobrarmos o ângulo, dobramos também o seno ou a tangente?”. Infelizmente, ângulos e suas respectivas razões trigonométricas não são proporcionais. Se fossem, teríamos absurdos como $\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}(60°) = \text{sen}(2 \cdot 30°) = 2 \cdot \text{sen}(30°) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. A passagem errada nesse caso é que o seno de 60° **não** é o dobro do seno de 30°. Para calcular as razões trigonométricas, existem algumas construções elementares para **poucos** ângulos (15°, 18°, 30°, 36°, 45°, 60°, 75°,), mas não para todos eles Aliás, calcular uma razão trigonométrica de um ângulo agudo envolve várias técnicas matemáticas e experimentais diferentes, a maioria fora do escopo do Ensino Médio. Em geral, os resultados dessas razões são apresentados em tabelas trigonométricas. Veja um exemplo:

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

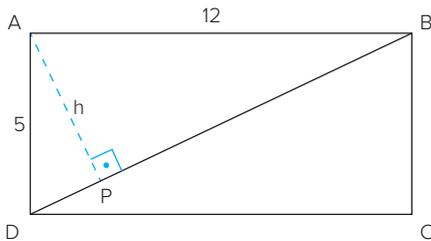
ângulo	sen	cos	tg	ângulo	sen	cos	tg	ângulo	sen	cos	tg	ângulo	sen	cos	tg
0	0,000	1,000	0,000	25	0,423	0,906	0,466	50	0,766	0,643	1,192	75	0,966	0,259	3,732
1	0,017	1,000	0,017	26	0,438	0,899	0,488	51	0,777	0,629	1,235	76	0,970	0,242	4,011
2	0,035	0,999	0,035	27	0,454	0,891	0,510	52	0,788	0,616	1,280	77	0,974	0,225	4,331
3	0,052	0,999	0,052	28	0,469	0,883	0,532	53	0,799	0,602	1,327	78	0,978	0,208	4,705
4	0,070	0,998	0,070	29	0,485	0,875	0,554	54	0,809	0,588	1,376	79	0,982	0,191	5,145
5	0,087	0,996	0,087	30	0,500	0,866	0,577	55	0,819	0,574	1,428	80	0,985	0,174	5,671
6	0,105	0,995	0,105	31	0,515	0,857	0,601	56	0,829	0,559	1,483	81	0,988	0,156	6,314
7	0,122	0,993	0,123	32	0,530	0,848	0,625	57	0,839	0,545	1,540	82	0,990	0,139	7,115
8	0,139	0,990	0,141	33	0,545	0,839	0,649	58	0,848	0,530	1,600	83	0,993	0,122	8,144
9	0,156	0,988	0,158	34	0,559	0,829	0,675	59	0,857	0,515	1,664	84	0,995	0,105	9,514
10	0,174	0,985	0,176	35	0,574	0,819	0,700	60	0,866	0,500	1,732	85	0,996	0,087	11,430
11	0,191	0,982	0,194	36	0,588	0,809	0,727	61	0,875	0,485	1,804	86	0,998	0,076	14,301
12	0,208	0,978	0,213	37	0,602	0,799	0,754	62	0,883	0,469	1,881	87	0,998	0,052	19,081
13	0,225	0,974	0,231	38	0,616	0,788	0,781	63	0,891	0,454	1,963	88	0,999	0,035	28,636
14	0,242	0,970	0,249	39	0,629	0,777	0,810	64	0,899	0,438	2,050	89	0,999	0,017	57,290
15	0,259	0,966	0,268	40	0,643	0,766	0,839	65	0,906	0,423	2,145	90	1,000	0,000	-
16	0,276	0,961	0,287	41	0,656	0,755	0,869	66	0,914	0,407	2,246				
17	0,292	0,956	0,306	42	0,669	0,743	0,900	67	0,921	0,391	2,356				
18	0,309	0,951	0,325	43	0,682	0,731	0,933	68	0,927	0,375	2,475				
19	0,326	0,946	0,344	44	0,695	0,719	0,966	69	0,934	0,358	2,605				
20	0,342	0,940	0,364	45	0,707	0,707	1,000	70	0,940	0,342	2,747				
21	0,358	0,934	0,384	46	0,719	0,695	1,036	71	0,946	0,326	2,904				
22	0,375	0,927	0,404	47	0,731	0,682	1,072	72	0,951	0,309	3,078				
23	0,391	0,921	0,424	48	0,743	0,669	1,111	73	0,956	0,292	3,271				
24	0,407	0,914	0,445	49	0,755	0,656	1,150	74	0,961	0,276	3,487				

Tab. 1 Tabela trigonométrica

Vejamos alguns exercícios de problemas que envolvem razões trigonométricas.

Exercícios resolvidos

15 Considere o retângulo ABCD a seguir, em que a base mede 12 e a altura 5. Determine a distância do vértice A à diagonal $\overline{BD}$

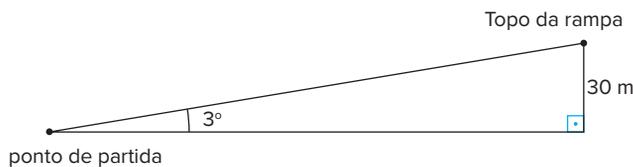
Resolução:

Traçando, $\overline{AP}$, perpendicular a $\overline{BD}$ e passando por A, a distância pedida é AP = h.
No triângulo ABD, retângulo em A, calculamos BD:

$$BD^2 = 5^2 + 12^2$$
$$BD^2 = 25 + 144 = 169$$
$$BD = 13$$

No triângulo ABD, seja med$(A\hat{B}D) = \alpha$: $\text{sen}(\alpha) = \frac{AD}{BD} = \frac{5}{13}$

No triângulo APB, retângulo em P:

$$\frac{AP}{AB} = \text{sen}(\alpha) \Leftrightarrow \frac{h}{12} = \frac{5}{13} \Rightarrow h = \frac{60}{13}$$

16 **Unesp** Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é 30 m.

Use a aproximação sen3° = 0,05 e responda O tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é:

A 2,5
B 7,5
C 10
D 15
E 30

Resolução:

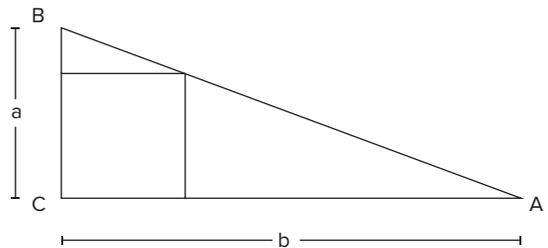
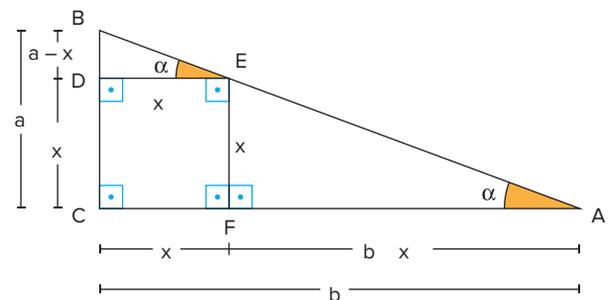
No triângulo retângulo da figura, sendo o comprimento da rampa em metros igual a *x*, temos:

$$\text{sen}3° = \frac{30}{x} \Leftrightarrow x = \frac{30}{\text{sen}3°} \Rightarrow x = \frac{30}{0{,}05} \Rightarrow x = 600\,\text{m}$$

Como a velocidade do ciclista é de 4 m/s, o tempo que ele leva para subir a rampa é igual a:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta S}{v} \Rightarrow \Delta t = \frac{600\,\text{m}}{4\text{ m/s}} = 150\text{ s} =$$
$$= 2\text{min}\,30\text{s} = 2{,}5\,\text{min}$$

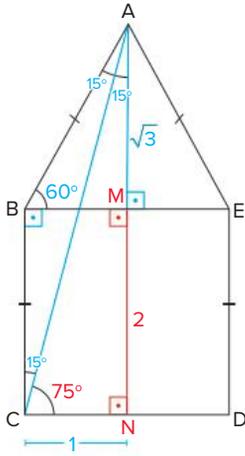
Alternativa: A.

17 Determine, em função das medidas *a* e *b* dos catetos do triângulo ABC, o lado do quadrado nele inscrito, como mostra a figura

Resolução:

Sendo x o lado do quadrado DEFC, então BD = a – x e AF = b x.
Como $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AF}$, podemos afirmar que med $(B\hat{E}D)$ = med $(E\hat{A}F) = \alpha$.
Dos triângulos BDE e EFA, temos que $\text{tg}(\alpha) = \frac{BD}{DE} = \frac{EF}{AF}$.
Assim:

$$\frac{a \quad x}{x} = \frac{x}{b \quad x}$$
$$x \cdot x = (a - x)(b - x)$$
$$x^2 = ab \quad ax \; +bx \quad x^2$$
$$0 = ab + (a \quad b)x$$
$$(a + b)x = ab$$
$$x = \frac{ab}{a + b}$$

18 Faça uma tabela com os valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos de 15° e 75°.

Resolução:

Na figura, ABE é um triângulo equilátero e BCDE um quadrado, ambos de lados 2, enquanto M e N são os pontos médios de $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$.

No triângulo ABE, encontramos: AB = BE = AE = 2 e med($A\hat{B}E$) = 60°.
No quadrado BCDE, temos: BC = CD = DE = BE = 2 e med($C\hat{B}E$) = 90°.
Como AB = BC = 2 e med($A\hat{B}C$) = med($A\hat{B}E$) + + med $E\hat{B}C$) = 60° + 90° = 150°, o triângulo ABC é isósceles com ângulos (150°, 15°, 15°). Por esse motivo, med ($A\hat{C}D$) = med($B\hat{C}D$) – med($B\hat{C}A$) = 90° – 15° = 75° e med($C\hat{A}N$) = 90° – med($A\hat{C}N$) = 90° – 75° = 15°.
Temos que $\overline{AM}$ é altura do triângulo equilátero ABE, de lado 2, logo, $AM = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Além disso, MN = 2 e AN = MN + AM = 2 + $\sqrt{3}$.

No triângulo ANC, retângulo em N, temos que $CN = \frac{CD}{2} = \frac{2}{2} = 1$ e $AC^2 = CN^2 + AN^2$. Logo:

$$AC^2 = 1^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2$$
$$AC^2 = 1+4+4\sqrt{3}+3$$
$$AC^2 = 8+4\sqrt{3}$$
$$AC = \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

Agora observe esta interessante identidade:

$$8+4\sqrt{3} = 6+2\sqrt{12}+2 = 6+2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+2 = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$$

Dessa maneira, obtemos $AC = \sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.
Ainda no triângulo ACN, encontramos:

$$\text{sen}\,75° = \cos 15° = \frac{AN}{AC} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}\quad\sqrt{2}} = $$
$$= \frac{2\sqrt{6}\quad 2\sqrt{2}\quad 3\sqrt{2}\quad \sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75° = \text{sen}\,15° = \frac{CN}{AC} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}\quad\sqrt{2}}{\sqrt{6}\quad\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{6}\quad\sqrt{2}}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}\quad\sqrt{2}}{4}$$

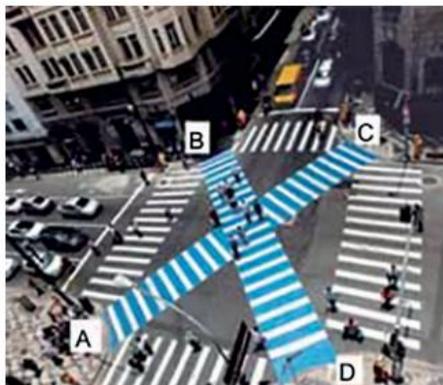
$$\text{tg}\,75° = \frac{AN}{CN} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} = 2+\sqrt{3}$$

$$\text{tg}\,15° = \frac{CN}{AN} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2\quad\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2\quad\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\quad\sqrt{3}$$

Portanto:

	15°	75°
sen	$\frac{\sqrt{6}\quad\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
cos	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}\quad\sqrt{2}}{4}$
tg	$2\quad\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$

Revisando

1 **Unesp 2015** Em 2014, a Companhia de Engenharia de Tráfego (CET) implantou duas faixas para pedestres na diagonal de um cruzamento de ruas perpendiculares do centro de São Paulo. Juntas, as faixas formam um "X", como indicado na imagem Segundo a CET, o objetivo das faixas foi o de encurtar o tempo e a distância da travessia

(http://ciclovivo.com br Adaptado.)

Antes da implantação das novas faixas, o tempo necessário para o pedestre ir do ponto A até o ponto C era de 90 segundos e distribuía-se do seguinte modo: 40 segundos para atravessar $\overline{AB}$, com velocidade média *v*; 20 segundos esperando o sinal verde de pedestres para iniciar a travessia $\overline{BC}$; e 30 segundos para atravessar $\overline{BC}$, também com velocidade média *v*.
Na nova configuração das faixas, com a mesma velocidade média v, a economia de tempo para ir de A até C, por meio da faixa $\overline{AC}$, em segundos, será igual a:

A 20
B 30
C 50
D 10
E 40

2 Calcule a altura relativa à base de um triângulo isósceles de lados 10 cm, 15 cm e 15 cm.

3 A altura de um triângulo equilátero mede $4\sqrt{3}$ cm. Determine o perímetro desse triângulo.

4 Escreva a função que expressa o comprimento *d* da diagonal de um quadrado de lado ℓ a partir do perímetro p desse mesmo quadrado

A $d(p) = \frac{\sqrt{2p}}{4}$

B $d(p) = \frac{p}{2}$

C $d(p) = \frac{p\sqrt{2}}{4}$

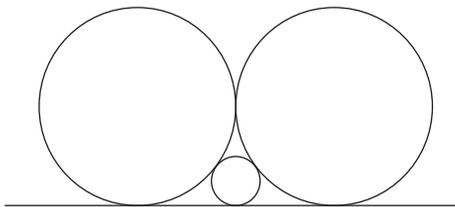
D $d(p) = \frac{p\sqrt{2}}{2}$

E $d(p) = \frac{p^2\sqrt{2}}{4}$

5 Calcule a altura de um trapézio que tem base maior de 20 cm, base menor de 6 cm e lados oblíquos de 25 cm.

6 **FGV 2013** Um triângulo tem lados medindo 1 cm, 2 cm e 2,5 cm Seja *h* a medida da altura relativa ao maior lado O valor de h^2 expresso em cm^2 é, aproximada mente, igual a:

A 0,54
B 0,56
C 0,58
D 0,60
E 0,62

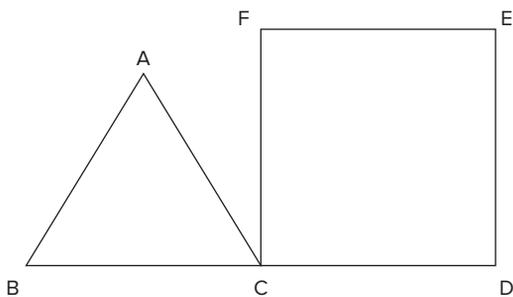
7 **UFMG** Nesta figura, estão representadas três circunferências, tangentes duas a duas, e uma reta tangente às três circunferências:

Sabe se que o raio de cada uma das duas circunferências maiores mede 1 cm Então, é correto afirmar que a medida do raio da circunferência menor é:

A $\frac{1}{3}$ cm

B $\frac{1}{4}$ cm

C $\frac{(\sqrt{2})}{2}$ cm

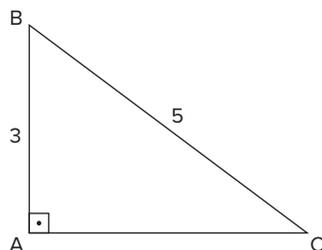
D $\frac{(\sqrt{2})}{4}$ cm

8 A figura mostra um triângulo equilátero ABC de lado 2 cm e um quadrado CDEF. Sendo C o ponto médio de BD, a distância entre os pontos A e D, em cm, é:

A $\sqrt{5}$

B $\sqrt{6}$

C $2\sqrt{3}$

D $3\sqrt{2}$

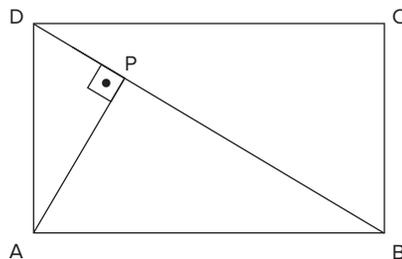
9 **UFPR** No triângulo, qual o valor de $tg\hat{B}$?

A $\frac{3}{5}$

B $\frac{3}{4}$

C $\frac{4}{5}$

D $\frac{4}{3}$

E 3

10 **UEPB 2013** No retângulo ABCD de lado AB = 3 cm, BC = $\sqrt{7}$ cm, o segmento $\overline{AP}$ é perpendicular à dia gonal $\overline{BD}$.

O segmento $\overline{BP}$ mede, em cm:

A $\frac{9}{2}$

B $\frac{7}{4}$

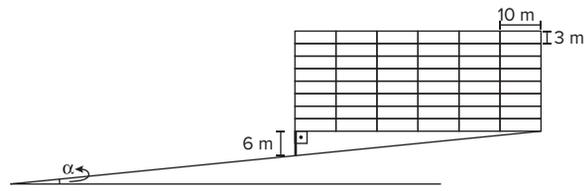
C $\frac{9}{4}$

D $\frac{3}{4}$

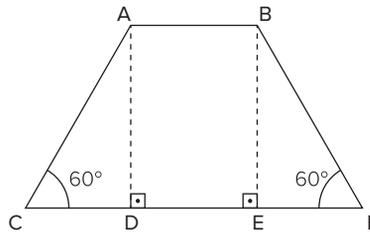
E $\frac{5}{4}$

11 Um ângulo agudo α tem $sen\,\alpha = \frac{3}{10}$. Calcule $tg\,\alpha$.

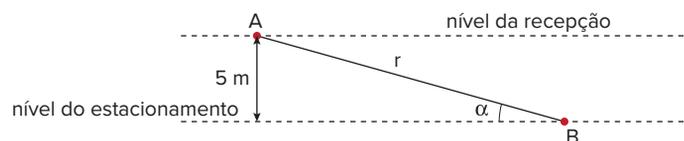
12 **FGV 2015** Um edifício comercial tem 48 salas, distribuídas em 8 andares, conforme indica a figura. O edifício foi feito em um terreno cuja inclinação em relação à horizontal mede α graus. A altura de cada sala é 3 m, a extensão 10 m, e a altura da pilastra de sustentação, que mantém o edifício na horizontal, é 6 m.

α	senα	cosα	tgα
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405

Usando os dados da tabela, a melhor aproximação inteira para α é:

A 4°
B 5°
C 6°
D 7°
E 8°

13 **Mackenzie 2013**

Se, na figura, $AD = 3\sqrt{2}$ e $CF = 14\sqrt{6}$, então a medida de $\overline{AB}$ é:

A $8\sqrt{6}$
B $10\sqrt{6}$
C $12\sqrt{6}$
D 28
E $14\sqrt{5}$

14 **Unesp 2012** Um prédio hospitalar está sendo construído em um terreno declivoso. Para otimizar a construção, o arqui teto responsável idealizou o estacionamento no subsolo do prédio, com entrada pela rua dos fundos do terreno A recepção do hospital está 5 metros acima do nível do estacionamento, sendo necessária a construção de uma rampa retilínea de acesso para os pacientes com dificuldades de locomoção A figura representa esquematicamente esta rampa (r), ligando o ponto A, no piso da recepção, ao ponto B, no piso do estacionamento, a qual deve ter uma incli nação α mínima de 30° e máxima de 45°

Nessas condições e considerando $\sqrt{2} \cong 1,4$, quais deverão ser os valores máximo e mínimo, em metros, do compri mento dessa rampa de acesso?

FRENTE 3

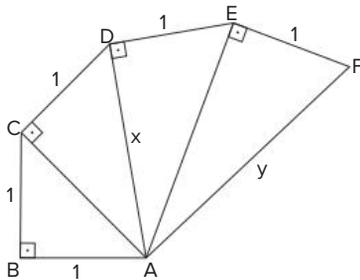
Exercícios propostos

1 **Mackenzie 2016** A soma entre as medidas da altura e da base de um retângulo é de 14 cm Se a diagonal mede 10 cm, então as medidas da altura e da base do retângulo são, respectivamente:

A 2 cm e 12 cm.
B 9 cm e 5 cm.
C 10 cm e 4 cm
D 8 cm e 6 cm.
E 11 cm e 3 cm.

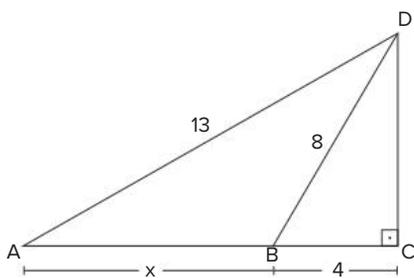
2 Na figura, os ângulos em B, C, D e E são retos

Então, (x + y) é:

A $2+\sqrt{6}$
B $2+\sqrt{5}$
C $2+\sqrt{3}$
D $\sqrt{3}+\sqrt{5}$
E $\sqrt{5}\quad\sqrt{3}$

3 **Fuvest/FGV** Queremos desenhar, no interior de um retângulo ABCD, um losango AICJ com vértice I sobre o lado $\overline{AB}$ do retângulo e vértice J sobre o lado $\overline{CD}$. Se as dimensões dos lados do retângulo são AB = 25 cm e BC = 15 cm, então a medida do lado do losango, em cm, é:

A 13
B 15
C 17
D 18
E 19

Observação: Um losango é um quadrilátero com os quatro lados iguais.

4 **PUC** Na figura, o valor de *x* é:

A 5
B 6
C 7
D 8
E 9

5 **PUC SP** A soma dos quadrados dos três lados de um triângulo retângulo é igual a 32. Quanto mede a hipotenusa do triângulo?

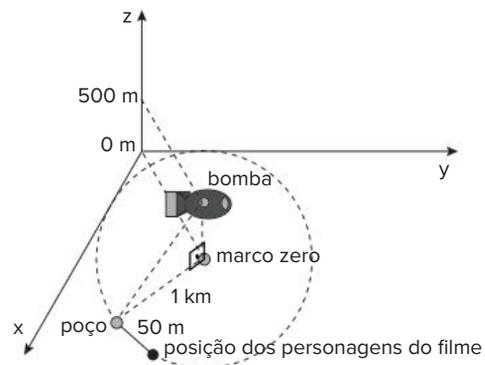
A 8
B 6
C 5
D 4
E 3

6 **IFCE 2016** Um triângulo retângulo tem catetos medindo 1 e 2. Se um quadrado for construído tendo como lado a hipotenusa desse triângulo, a diagonal do quadrado medirá:

A $\sqrt{5}$
B $2\sqrt{5}$
C $5\sqrt{2}$
D $\sqrt{10}$
E $\sqrt{2}$

7 **Unesp 2015** Em 09 de agosto de 1945, uma bomba atômica foi detonada sobre a cidade japonesa de Nagasaki A bomba explodiu a 500 m de altura acima do ponto que ficaria conhecido como “marco zero”.

No filme Wolverine imortal, há uma sequência de imagens na qual o herói, acompanhado do militar japonês Yashida, se encontrava a 1 km do marco zero e a 50 m de um poço. No momento da explosão, os dois correm e se refugiam no poço, chegando a esse local no momento exato em que uma nuvem de poeira e material radioativo, provocada pela explosão, passa por eles.

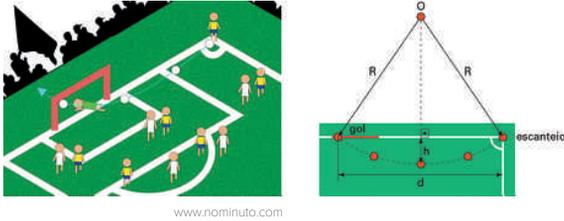
A figura a seguir mostra as posições do “marco zero”, da explosão da bomba, do poço e dos personagens do filme no momento da explosão da bomba.

Se os ventos provocados pela explosão foram de 800 km/h e adotando a aproximação $\sqrt{5} \cong 2{,}24$, os personagens correram até o poço, em linha reta, com uma velocidade média, em km/h, de aproximadamente:

A 28
B 24
C 40
D 36
E 32

8 **Unicamp 2014** O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 6,0 m, e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). A área desse triângulo é igual a:

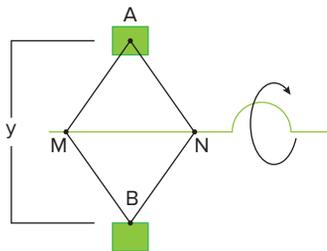
A 3,0 m^2
B 2,0 m^2.
C 1,5 m^2.
D 3,5 m^2

9 **Unesp 2012** No futebol, um dos gols mais bonitos e raros de se ver é o chamado gol olímpico, marcado como resultado da cobrança direta de um escanteio.

www.nominuto.com

Suponha que nesse tipo de gol:

1. A projeção da trajetória da bola descreva um arco de circunferência no plano do gramado.
2. A distância (d) entre o ponto da cobrança do escanteio e o ponto do campo em que a bola entra no gol seja 40 m.
3. A distância máxima (h) da projeção da trajetória da bola à linha de fundo do campo seja 1 m.

Determine o raio da circunferência (R), em metros, do arco descrito pela trajetória da bola, com uma casa decimal de aproximação.

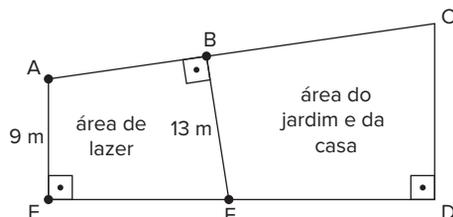
10 **Uerj 2013** Um modelo de macaco, ferramenta utilizada para levantar carros, consiste em uma estrutura composta por dois triângulos isósceles congruentes, AMN e BMN, e por um parafuso acionado por uma manivela, de modo que o comprimento da base $\overline{MN}$ possa ser alterado pelo acionamento desse parafuso. Observe a figura.

Considere as seguintes medidas: AM = AN = BM = BN = = 4 dm; MN = x dm e AB = y dm.
O valor, em decímetros, de *y* em função de *x* corresponde a:

A $\sqrt{16\quad 4x^2}$

B $\sqrt{64-x^2}$

C $\dfrac{\sqrt{16-4x^2}}{2}$

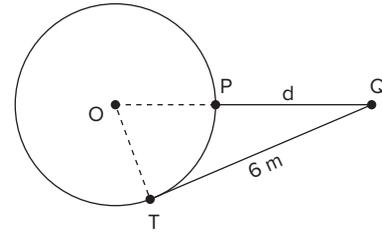
D $\dfrac{\sqrt{64-2x^2}}{2}$

11 **Unesp 2013** A figura, fora de escala, representa o terreno plano onde foi construída uma casa.

Sabe-se do quadrilátero ABEF que:

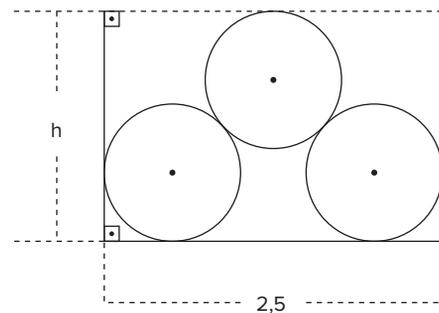
- seus ângulos $A\hat{B}E$ e $A\hat{F}E$ são retos;
- $\overline{AF}$ mede 9 m e $\overline{BE}$ mede 13 m;
- o lado $\overline{EF}$ é 2 m maior que o lado $\overline{AB}$.

Nessas condições, quais são as medidas, em metros, dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$?

12 Os catetos de um triângulo retângulo medem *b* e *c*. Calcule o comprimento da bissetriz do ângulo reto.

13 **Unesp** Em uma residência, há uma área de lazer com uma piscina redonda de 5 m de diâmetro. Nessa área há um coqueiro, representado na figura por um ponto Q.

Se a distância de Q (coqueiro) ao ponto de tangência T (da piscina) é 6 m, a distância d = QP, do coqueiro à piscina, é:

A 4 m
B 4,5 m.
C 5 m
D 5,5 m
E 6 m

14 **Fuvest** Um lenhador empilhou 3 troncos de madeira num caminhão de largura 2,5 m, conforme a figura a seguir.

Cada tronco é um cilindro reto, cujo raio da base mede 0,5 m. Logo, a altura *h*, em metros, é:

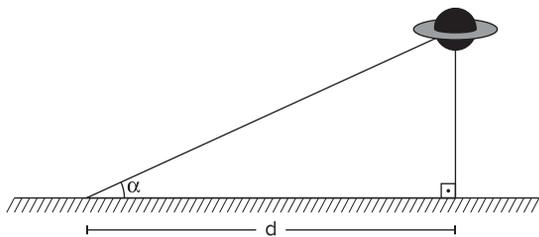
A $\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$

B $\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$

C $\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

D $1+\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

E $1+\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

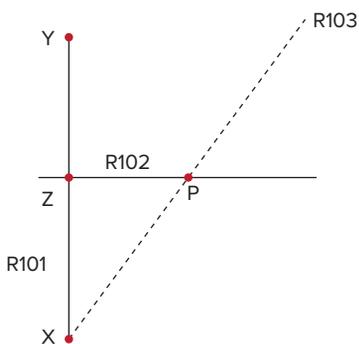
15 Um disco voador é avistado, em uma região plana, a certa altitude, parado no ar, como mostra a figura. A que altitude está o disco voador?

Considere estas afirmativas:

I A distância *d* é conhecida

II. A tangente do ângulo α é conhecida.

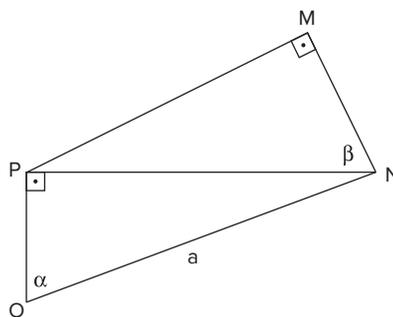
Então, tem-se que, para responder à pergunta:

A a afirmativa I sozinha é suficiente, mas a II não.
B a afirmativa II sozinha é suficiente, mas a I não.
C juntas, as afirmativas I e II são suficientes, mas nenhuma delas é suficiente sem a outra.
D ambas são, sozinhas, suficientes para responder à pergunta.
E A pergunta não pode ser respondida por falta de dados.

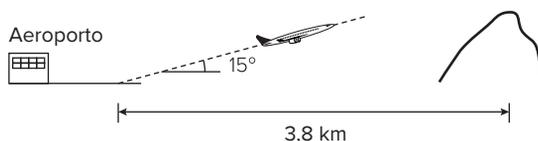
16 **Insper 2012** Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Está sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. A nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.

O governo está planejando, após a conclusão da obra, construir uma estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que essa ligação poderá ter é:

A 250
B 240
C 225
D 200
E 180

17 Calcule o valor da expressão:
$\text{sen}50° \quad \cos 40° + \text{tg}10° \cdot \text{tg}80°$

18 **PUC** Na figura, são dados α, β e NO = a.

Assim, a medida MN pode ser obtida por:

A $a \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$
B $a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$
C $a \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta$
D $\dfrac{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}{a}$
E $\dfrac{\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta}{a}$

19 **Unicamp 2013** Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15°. A 3,8 km da cabeceira da pista existe um morro íngreme. A figura a seguir ilustra a decolagem, fora de escala.

Podemos concluir que o avião ultrapassa o morro a uma altura, a partir da sua base, de:

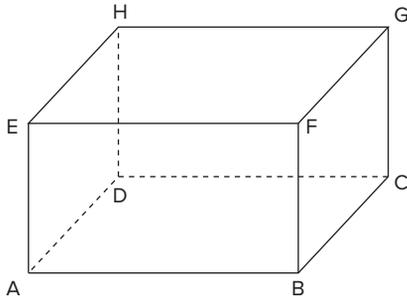
A $3{,}8 \cdot \text{tg}(15°)$ km.
B $3{,}8 \cdot \text{sen}(15°)$ km.
C $3{,}8 \cdot \cos(15°)$ km.
D $3{,}8 \cdot \sec(15°)$ km.

20 **Unesp 2013** A caçamba de um caminhão basculante tem 3 m de comprimento das direções de seu ponto mais frontal P até a de seu eixo de rotação e 1 m de altura entre os pontos P e Q. Quando na posição horizontal, isto é, quando os segmentos de retas r e s coincidirem, a base do fundo da caçamba distará 1,2 m do solo. Ela pode girar, no máximo, α graus em torno de seu eixo de rotação, localizado em sua parte traseira inferior, conforme indicado na figura.

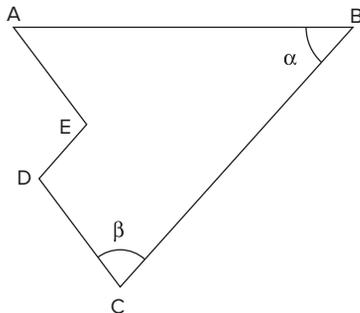
www.autobrutus.com. Adaptado.

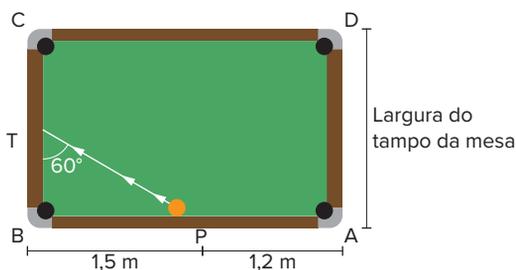
Dado $\cos\alpha = 0{,}8$, a altura, em metros, atingida pelo ponto P, em relação ao solo, quando o ângulo de giro α for máximo, é:

A 4,8 **B** 5,0 **C** 3,8 **D** 4,4 **E** 4,0

21 **Fuvest 2017** O paralelepípedo reto-retângulo ABCDEFGH, representado na figura, tem medida dos lados AB = 4, BC = 2 e BF = 2.

O seno do ângulo HÂF é igual a:

A $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ B $\frac{1}{\sqrt{5}}$ C $\frac{2}{\sqrt{10}}$ D $\frac{2}{\sqrt{5}}$ E $\frac{3}{\sqrt{10}}$

22 **Fuvest 2012** Na figura, tem-se $\overline{AE}$ paralelo a $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ paralelo a $\overline{DE}$, AE = 2, α = 45°, β = 75° Nessas condições, a distância do ponto E ao segmento $\overline{AB}$ é igual a:

A $\sqrt{3}$ B $\sqrt{2}$ C $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E $\frac{\sqrt{2}}{4}$

23 **Unesp 2015** A figura representa a vista superior do tampo plano e horizontal de uma mesa de bilhar retangular ABCD, com caçapas em A, B, C e D O ponto P, localizado em $\overline{AB}$, representa a posição de uma bola de bilhar, sendo PB = 1,5 m e PA = 1,2 m. Após uma tacada na bola, ela se desloca em linha reta colidindo com BC no ponto T, sendo a medida do ângulo $P\hat{T}B$ igual a 60°. Após essa colisão, a bola segue, em trajetória reta, diretamente até a caçapa D.

Nas condições descritas e adotando $\sqrt{3} \cong 1,73$, a largura do tampo da mesa, em metros, é próxima de:

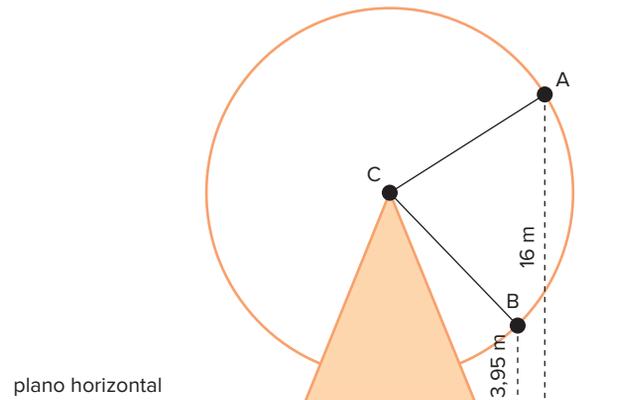
A 2,42
B 2,08
C 2,28
D 2,00
E 2,56

24 **PUC-Campinas 2016** [...] tudo teria começado com a haste vertical ao Sol, que projetava sua sombra num plano horizontal demarcado

Com um ângulo de inclinação de 30°, em relação ao solo plano, os raios solares incidindo sobre uma haste vertical de 2,5 m de comprimento geram uma sombra de *x* m. Um pouco mais tarde, quando o ângulo de inclinação dos raios solares é de 45°, a mesma sombra gerada agora é de *y* m A diferença ente *x* e *y* é de, aproximadamente:

sen 30° = 0,5	cos 30° = 0,866	tg 30° = 0,577
sen 45° = 0,707	cos 45° = 0,707	tg 45° = 1

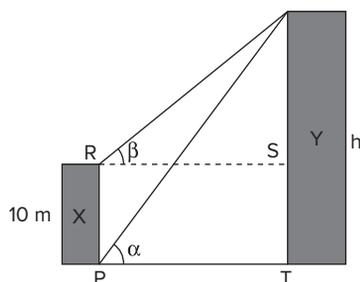
A 1 m.
B 1,83 m.
C 2,45 m.
D 0,88 m
E 2,27 m.

25 **Uerj 2016** O raio de uma roda gigante de centro C mede CA = CB = 10 m. Do centro C ao plano horizontal do chão, há uma distância de 11 m. Os pontos A e B situados no mesmo plano vertical, ACB, pertencem à circunferência dessa roda e distam, respectivamente, 16 m e 3,95 m do plano do chão Observe o esquema e a tabela.

θ (graus)	senθ
15°	0,259
30°	0,500
45°	0,707
60°	0,866

A medida, em graus, mais próxima do menor ângulo $A\hat{C}B$ corresponde a:

A 45
B 60
C 75
D 105

FRENTE 3

26 **Unesp** Dois edifícios, X e Y, estão um em frente ao outro, num terreno plano. Um observador, no pé do edifício X (ponto P), mede um ângulo α em relação ao topo do edifício Y (ponto Q). Depois disso, no topo do edifício X, num ponto R, de forma que RPTS formem um retângulo e $\overline{QT}$ seja perpendicular a $\overline{PT}$, esse observador mede um ângulo β em relação ao ponto Q no edifício Y.

(figura fora de escala)

Sabendo que a altura do edifício X é 10 m e que $3\text{tg}\alpha = 4\text{tg}\beta$, a altura *h* do edifício Y, em metros, é:

A $\frac{40}{3}$ B $\frac{50}{4}$ C 30 D 40 E 50

Texto complementar

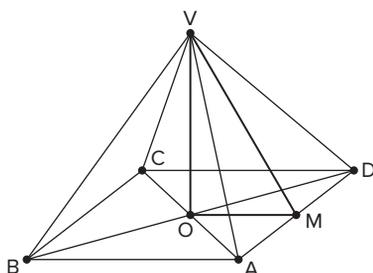
O aparecimento da Trigonometria na história da civilização segue um caminho não linear, com ideias que apareceram, desapareceram ou foram modificadas até chegar à forma como hoje a conhecemos e estudamos.

Sobre isso, leia a seguir um trecho do artigo “A história da trigonometria”, da professora Nielce M Lobo da Costa

As raízes da Trigonometria

Os primeiros indícios de rudimentos de Trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes No Egito, isso pode ser observado no Papiro **Ahmes**, conhecido como Papiro **Rhind**, que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo

Ahmes não foi claro ao expressar o significado dessa palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo **OMV**.

Exemplo:
Seja OV = 40 e OM = 80, então o seqt = $\frac{80}{40}$, isto é: seqt = 2.

Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de **seqt**, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical.

Além da utilização da Trigonometria nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol). Poderíamos dizer então que essas ideias estavam anunciando a chegada, séculos depois, das **funções** tangente e cotangente. Os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medição de alturas e distâncias. [...]

A Trigonometria na Grécia

[...]

A primeira amostra documentada de contribuição grega para o estudo da Trigonometria apareceu por volta de 180 a.C. quando **Hipsícles**, influenciado pela cultura babilônica, dividiu o zodíaco em 360 partes. Essa ideia foi posteriormente generalizada por **Hiparco** para qualquer círculo (Eves, 1995).

Por volta do ano 200 a.C , os astrônomos gregos estavam muito interessados em calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e também o raio da Terra. Foi **Eratóstenes de Cirene** (276-196 a.C.), contemporâneo de **Arquimedes** (287-212 a.C.) e **Aristarco** (310-230 a.C.) que produziu a mais notável medida da Antiguidade para a circunferência da Terra, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas. Salientamos que, para tornar possível o trabalho de *Eratóstenes*, foi determinante na época o conhecimento do conceito de ângulo e de como medi lo. O tratado "Sobre a medida da Terra" resume as conclusões a que ele chegou, mas, infelizmente, esses escritos se perderam e tudo o que conhecemos sobre o assunto chegou até nós pelos relatos de *Ptolomeu* e *Heron* [ ]

Surgiu então, na segunda metade do século II a.C., um marco na história da Trigonometria: **Hiparco de Niceia** (180-125 a.C.). [...]

Hiparco construiu o que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0° a 180°, em cuja montagem utilizou interpolação linear Ele observou que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180° para 0°. Resolveu então associar a cada corda de um arco o ângulo central correspondente, o que representou um grande avanço na Astronomia e por isso ele recebeu o título de "**Pai da Trigonometria**" [ ]

Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e o grande **Cláudio Ptolomeu** (Klaudius Ptolemaios), autor da mais importante obra da Trigonometria da Antiguidade surgida no século II de nossa era, em Alexandria, a *Syntaxis Mathemática*, composta de treze volumes. Ela ficou conhecida como **Almagesto**, que significa em árabe "A maior" = Al magest, pois os tradutores árabes a consideravam a maior obra existente na época, em Astronomia. [...]

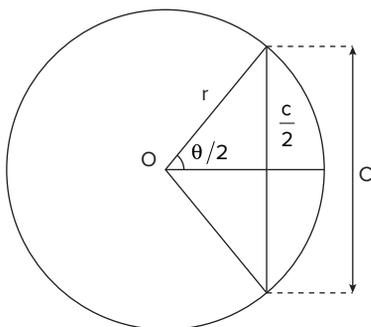
O Almagesto é um marco, um modelo de Astronomia que perdurou até **Copérnico**, no século XVI Ptolomeu, na verdade, sistematizou e compilou no Almagesto uma série de conhecimentos bastante difundidos em sua época e que a maior parte da obra é baseada no trabalho do astrônomo e matemático grego Hiparco, cujos livros se perderam [ ]

O Almagesto sobreviveu e por isso temos suas tabelas trigonométricas e também uma exposição dos métodos usados nas construções, o que é de grande importância para nós, visto que tanto daquela época se perdeu. [...]

A contribuição dos hindus

No século IV da nossa era, a Europa Ocidental entrou em crise com as invasões dos bárbaros germânicos e com a queda do Império Romano O centro da cultura começou a se deslocar para a Índia, que revolucionou a Trigonometria com um conjunto de textos denominados **Siddhanta**, que significa sistemas de Astronomia

O que chegou até nós foi o **Surya Siddhanta**, que quer dizer Sistemas do Sol e é um texto épico, de aproximadamente 400 d.C., escrito em versos e em sânscrito Os hindus diziam que o autor do texto foi Surya, o deus do Sol. Essa obra contém poucas explicações e nenhuma prova pois, afinal, tendo sido escrita por um Deus, seria muita pretensão exigir provas. (Boyer, 1974). [...]

No **Surya**, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de **jiva**. Isso possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência, como na figura a seguir.

Definiam o *jiva* como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

$$\text{jiva}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{Sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{c/2}{r} = \frac{c}{2r} = \frac{1}{2r}\cdot \text{crd}\theta$$

A metade da corda dividida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco (ou da metade do ângulo central correspondente a todo o arco)

COSTA, Nielce M Lobo da. "A história da trigonometria" UFRGS Disponível em: <www ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf> Acesso em: 2 out 2018

Um longo caminho ainda foi percorrido até chegarmos à trigonometria como a conhecemos e praticamos hoje em dia Para saber mais, além do artigo apresentado, recomendamos a seguinte bibliografia:

AABOE, Asger *Episódios da história antiga da Matemática* PITOMBEIRA, João B (Trad). Rio de Janeiro: SBM, 1984

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. GOMIDE, Elza F. (Trad.). São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. DOMINGUES, Hygino H. (Trad.). Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

KENNEDY, Edward S *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula: Trigonometria* DOMINGUES, Hygino H (Trad) Atual, 1994. v. 5.

LIMA, Elan L. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

Resumindo

Áreas

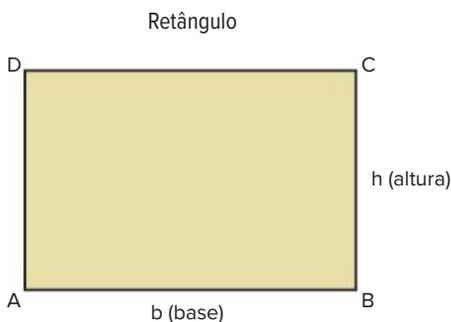
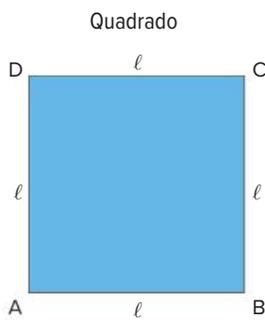
Retângulo

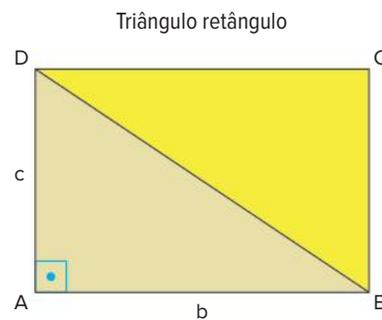
$A_{retângulo} = b \cdot h$

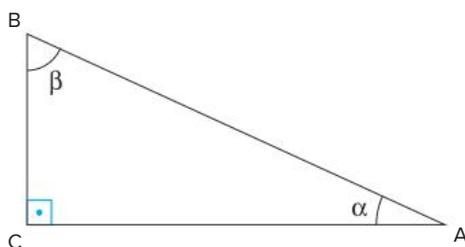
Quadrado

D ℓ C

ℓ ℓ

A ℓ B

$A_{quadrado} = \ell \cdot \ell = \ell^2$

Triângulo retângulo

$A_{triângulo\ retângulo} = \frac{b\ c}{2}$

Triângulo retângulo

Teorema de Pitágoras: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Triângulos pitagóricos: um triângulo pitagórico primitivo (a, b, c) pode ser obtido do seguinte modo:

1. Escolhem-se dois números inteiros positivos *m* e *n*, m > n, *m* e *n* primos entre si e de paridades diferentes.
2. Determinam-se as medidas dos lados da seguinte maneira:

$a = m^2 + n^2$ $b = 2mn$ $c = m^2 \quad n^2$

Razões trigonométricas relativas ao ângulo α: $\begin{cases} sen(\alpha) = \frac{BC}{AB} \\ cos(\alpha) = \frac{AC}{AB} \\ tg(\alpha) = \frac{BC}{AC} \end{cases}$

Razões trigonométricas relativas ao ângulo β: $\begin{cases} sen(\beta) = \frac{AC}{AB} \\ cos(\beta) = \frac{BC}{AB} \\ tg(\beta) = \frac{AC}{BC} \end{cases}$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} sen(\alpha) = cos(\beta) \\ sen(\beta) = cos(\alpha) \\ tg(\alpha) \cdot tg(\beta) = 1 \end{cases}$$

Relação fundamental da trigonometria: $sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$

Ângulos notáveis:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Outras razões trigonométricas:

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\text{cossec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)}$$

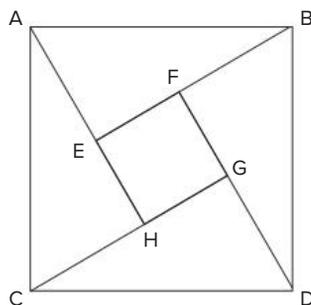
$$\text{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \text{ ou } \text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)}$$

Quer saber mais?

Sites

- Teorema de Pitágoras
  <www ime usp br/~leo/imatica/historia/teopitagoras html>.
- Documentário *O legado de Pitágoras*
  <www.youtube.com/watch?v=dsjiWChrjE4> (Episódio 1).
  <www.youtube.com/watch?v=aeiJtsCh_QU> (Episódio 2).
  <www.youtube.com/watch?v=tn0ULb0y-c4> (Episódio 3).

Exercícios complementares

1 IFMG 2018 O hindu Bhaskara, ao demonstrar o teorema de Pitágoras, utilizou uma figura em que ABCD e EFGH são quadrados, conforme mostrado a seguir.

Se esse quadrado ABCD tem lado de medida $\sqrt{3}$ cm e o ângulo $A\hat{C}H$ mede 60°, então, a área de EFGH, em cm^2, é:

A $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

B $3 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

C $3 \quad \sqrt{3}$

D $3\left(1 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2 UEPB Os ângulos agudos α e β de um triângulo retângulo satisfazem a condição cos α = cos β. Se o comprimento da hipotenusa é 6 cm, a área do triângulo em cm^2 é:

A 6
B 9
C 7
D 8
E 10

3 Uma folha de papel de 8 por 12 polegadas é dobrada de maneira que um vértice toque o ponto médio do lado não adjacente maior. Ache o comprimento da dobra.

4 EBMSP 2018

figura 1

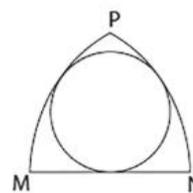
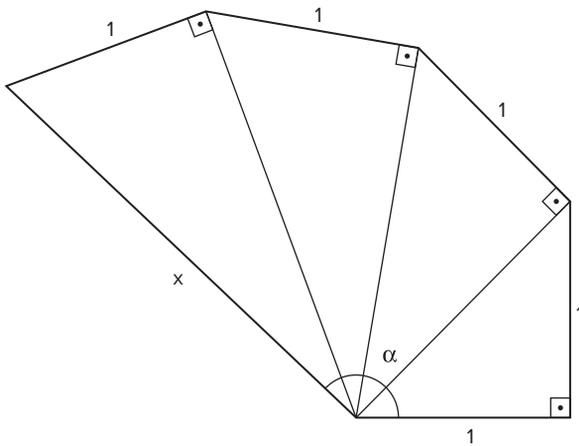



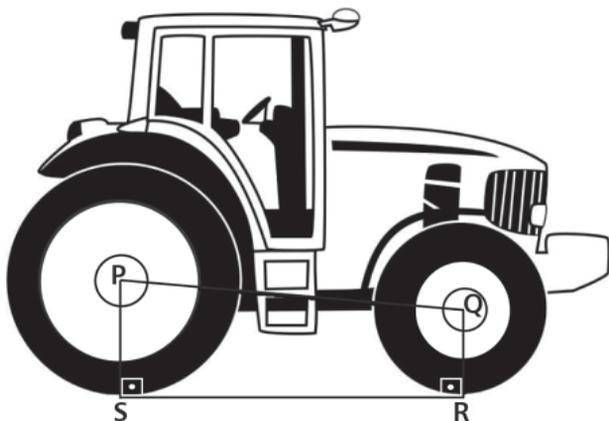
figura 2

A capela de um hospital é decorada com vitrais semelhantes ao representado na figura 1.

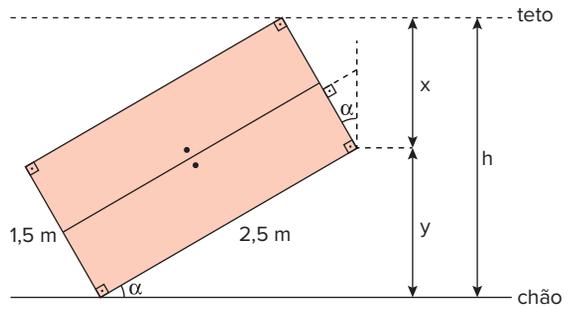
Para reproduzi-lo, uma pessoa decidiu fazer os cálculos relativos às dimensões de alguns detalhes, iniciando com a parte superior, representada na figura 2.
Sabe-se que $\widehat{MP}$ e $\widehat{NP}$ são arcos de circunferências com centros em N e M, respectivamente, e que o círculo tangente aos arcos $\widehat{MP}$ e $\widehat{NP}$ e ao segmento $\overline{MN}$ tem raio r = 15 u.c.
Com base nesses dados, pode-se afirmar que a medida do segmento $\overline{MN}$ é igual a:

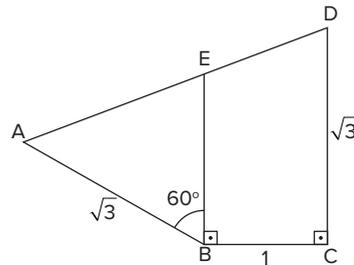
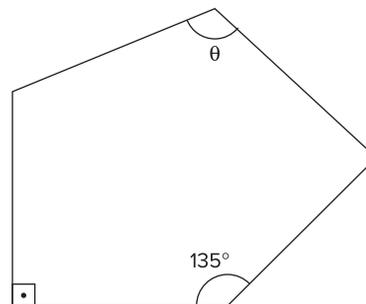
A 45
B 40
C 30
D 25
E 15

5 Unicamp 2014 Considere um hexágono, como o exibido na figura a seguir, com cinco lados com comprimento de 1 cm e um lado com comprimento de *x* cm.

a) Encontre o valor de *x*
b) Mostre que a medida do ângulo α é inferior a 150°.

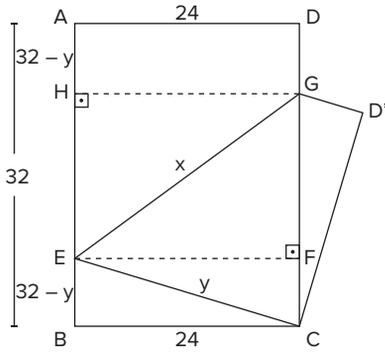
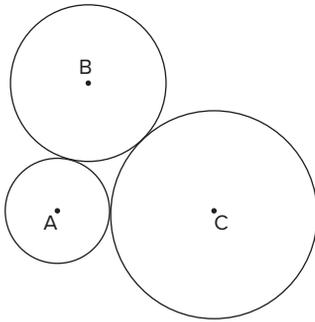
6 IFMG 2018 No trator da figura, o raio $\overline{PS}$ da maior circunferência determinada pelo pneu traseiro é 80 cm, o raio $\overline{QR}$ da maior circunferência determinada pelo pneu dianteiro é 56 cm e as distâncias entre os centros P e Q dessas circunferências é de 240 cm.

Considerando π = 3, a distância entre os pontos S e R, em que os pneus tocam o solo plano é:

A igual ao comprimento da circunferência de raio $\overline{PS}$.
B maior que o comprimento da circunferência de raio $\overline{PS}$.
C um valor entre as medidas dos comprimentos das circunferências de raios $\overline{PS}$ e $\overline{QR}$
D maior que o módulo da diferença entre os comprimentos das circunferências de raios $\overline{PS}$ e $\overline{QR}$

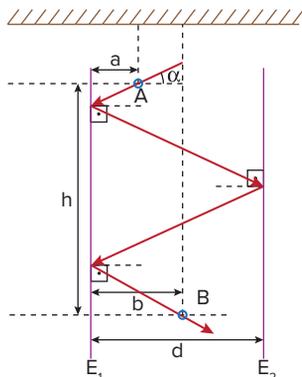
7 Unifesp 2016 Por razões técnicas, um armário de altura 2,5 m e largura 1,5 m está sendo deslocado por um corredor, de altura *h* metros, na posição mostrada pela figura

a) Calcule *h* para o caso em que α = 30°.
b) Calcule *h* para o caso em que x = 1,2 m.

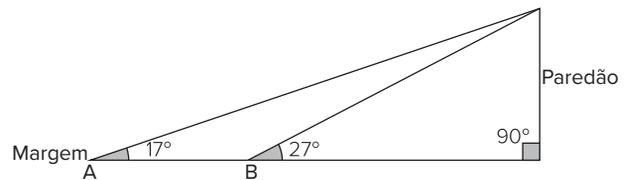
8 Fuvest No quadrilátero ABCD da figura a seguir, E é um ponto sobre o lado $\overline{AD}$ tal que o ângulo $A\hat{B}E$ mede 60° e os ângulos $E\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são retos Sabe-se ainda que AB = CD = $\sqrt{3}$ e BC = 1. Determine a medida de $\overline{AD}$.

9 Unicamp 2015 A figura a seguir exibe um pentágono com todos os lados de mesmo comprimento.

A medida do ângulo θ é igual a:

A 105°
B 120°
C 135°
D 150°

10 **Unesp** Uma folha de papel retangular de 24 cm por 32 cm é dobrada de maneira que os vértices opostos se toquem. Ache o comprimento da dobra

11 **Unicamp 2017** A figura a seguir exibe três círculos no plano, tangentes dois a dois, com centros em A, B e C e raios de comprimentos *a*, *b* e *c*, respectivamente

a) Determine os valores de *a*, *b* e *c*, sabendo que a distância entre A e B é de 5 cm, a distância entre A e C é de 6 cm e a distância entre B e C é de 9 cm.

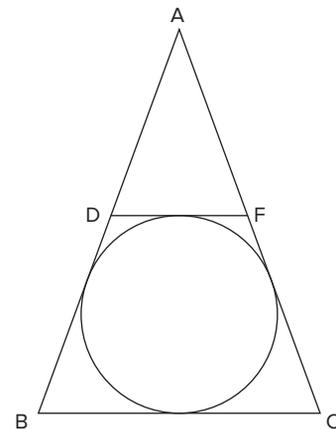
b) Para a = 2 cm e b = 3 cm, determine o valor de c > b de modo que o triângulo de vértices em A, B e C seja retângulo.

12 **Unesp 2012** Sejam dois espelhos planos (E_1 e E_2), posicionados verticalmente, com suas faces espelhadas voltadas uma para outra, e separados por uma distância *d*, em centímetros. Suspensos por finas linhas, dois pequenos anéis (A e B) são posicionados entre esses espelhos, de modo que as distâncias de A e B ao espelho E_1 sejam, respectivamente, *a* e *b*, em centímetros, e a distância vertical entre os centros dos anéis seja *h*, em centímetros, conforme mostra a figura.

Determine o ângulo de incidência α, em relação à horizontal, em função de *a*, *b*, *d* e *h*, para que um feixe de luz atravesse o anel A, reflita-se nos espelhos E_1, E_2 e E_1 e atravesse o anel B, como indica o percurso na figura. Admita que os ângulos de incidência e de reflexão do feixe de luz sobre um espelho sejam iguais.

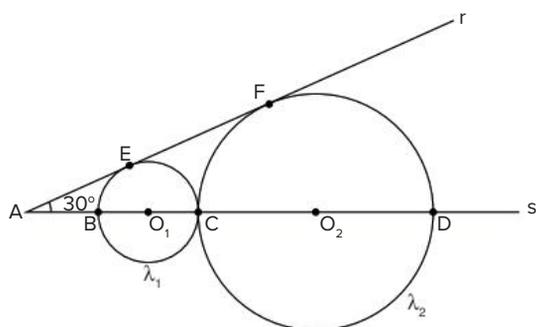
13 **IFPE 2018** Os alunos pré-egressos do *campus* Jaboatão dos Guararapes resolveram ir até a Lagoa Azul para celebrar a conclusão dos cursos. Raissa, uma das participantes do evento, ficou curiosa para descobrir a altura do paredão rochoso que envolve a lagoa. Então pegou em sua mochila um transferidor e estimou o ângulo no ponto A, na margem onde estava, e, após nadar, aproximadamente, 70 metros em linha reta em direção ao paredão, estimou o ângulo no ponto B, conforme mostra a figura a seguir.

De acordo com os dados coletados por Raissa, qual a altura do paredão rochoso da Lagoa Azul?

Dados: sen(17°) = 0,29, tg(17°) = 0,30, cos(27°) = 0,89 e tg(27°) = 0,51

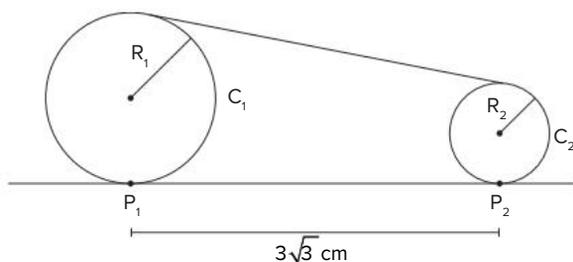
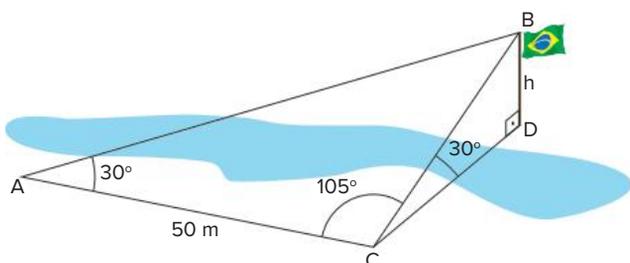
A 50 metros
B 51 metros
C 89 metros.
D 70 metros
E 29 metros.

14 **Acafe 2017** A figura a seguir representa um triângulo isósceles ABC, cuja base é BC = 8 cm e o segmento DF = 2 cm paralelo a $\overline{BC}$.

Sabendo que a circunferência está inscrita no quadri látero BCDF, então a medida, em unidades de área, da região circular, é igual a:

A 4π
B π
C π
D $\frac{\pi}{4}$

15 Mackenzie 2015

Na figura anterior, as circunferências λ_1 e λ_2 são tangentes no ponto C e tangentes à reta *r* nos pontos E e F, respectivamente. Os centros, O_1 e O_2, das circunferências pertencem à reta *s*. Sabe-se que *r* e *s* se interceptam no ponto A, formando um ângulo de 30° Se $\overline{AE}$ mede $2\sqrt{3}$ cm, então os raios das circunferências λ_1 e λ_2 medem, respectivamente:

A $\sqrt{3}$ cm e $\sqrt{15}$ cm.
B $\sqrt{3}$ cm e 2 cm.
C 2 cm e 6 cm.
D 2 cm e 4 cm.
E $2\sqrt{3}$ cm e 4 cm.

16 Fuvest A figura a seguir representa duas polias circulares C_1 e C_2 de raios $R_1 = 4$ cm e $R_2 = 1$ cm, apoiadas em uma superfície plana em P_1 e P_2, respectivamente. Uma correia envolve as polias, sem folga Sabendo-se que a distância entre os pontos P_1 e P_2 é $3\sqrt{3}$ cm, determinar o comprimento da correia.

17 Unesp 2011 Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura *h* do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ valem 30°, e o $A\hat{C}B$ vale 105°, como mostra a figura:

A altura *h* do mastro da bandeira, em metros, é

A 12,5
B $12{,}5\sqrt{2}$
C 25,0
D $25{,}0\sqrt{2}$
E 35,0

18 Fuvest A corda comum de dois círculos que se interceptam é vista de seus centros sob ângulos de 90° e 60°, respectivamente. Sabendo-se que a distância entre seus centros é igual a $\sqrt{3} + 1$, determine os raios dos círculos.

19 ITA Num triângulo ABC, retângulo em Â, temos B = 60° As bissetrizes desses ângulos se encontram num pon to D Se o segmento de reta BD mede 1 cm, então a hipotenusa mede:

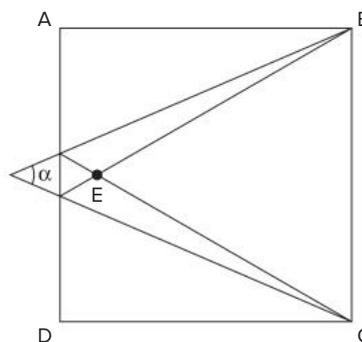
A $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ cm
B $1+\sqrt{3}$ cm.
C $2+\sqrt{3}$ cm
D $1+\sqrt{2}$ cm.
E n.d a

20 ITA Um triângulo equilátero é tal que A(0,3), B($3\sqrt{3}$,0) e a abscissa do ponto C é maior que 2. A circunferência circunscrita a esse triângulo tem raio *r* e centro em O(a,b). Então $a^2 + b^2 + r^2$ é igual a:

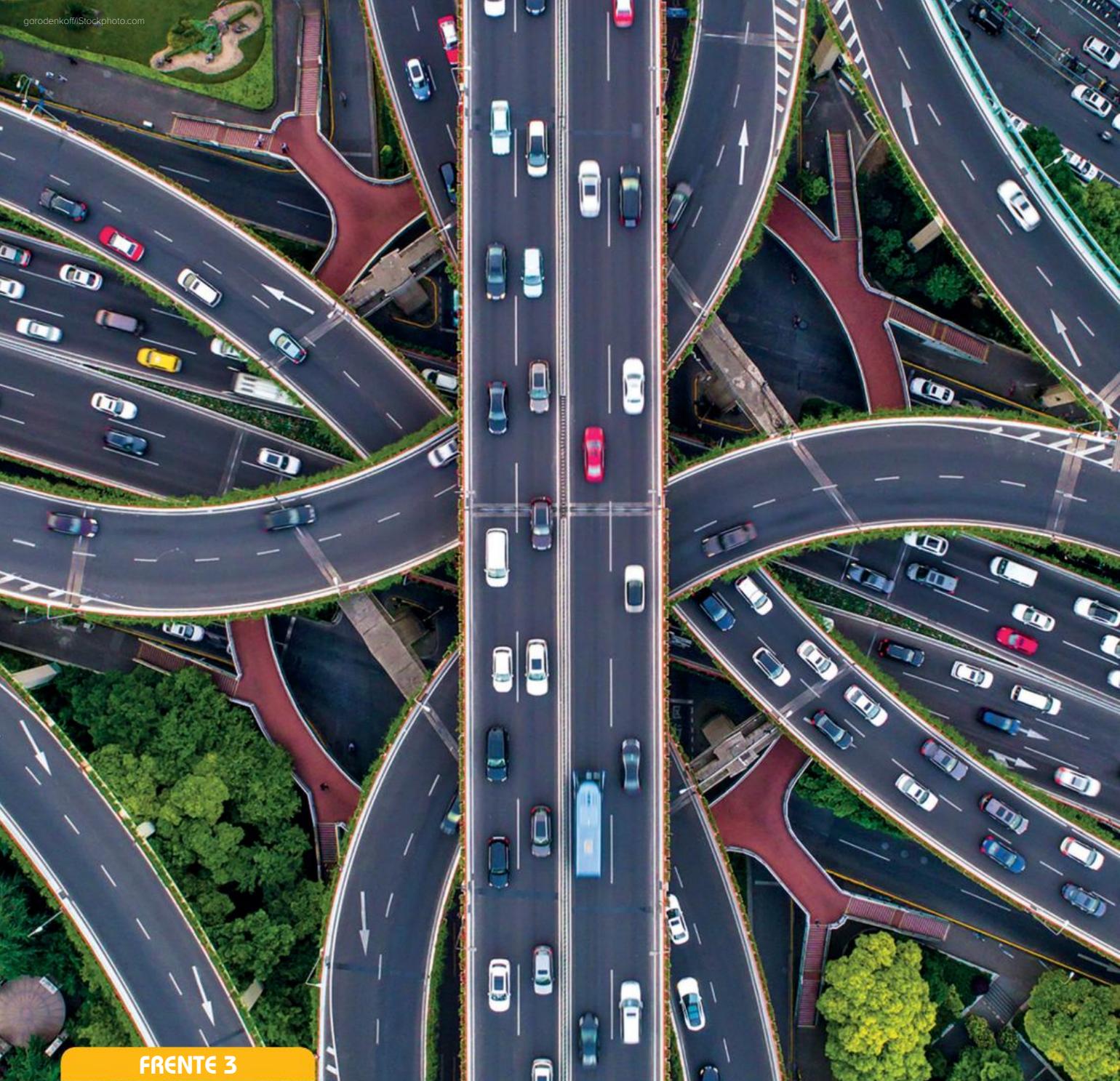
A 31
B 32
C 33
D 34
E 35

21 ITA Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em A. Seja D a interseção da bissetriz do ângulo Â com o lado $\overline{BC}$ e E um ponto da reta suporte do cateto $\overline{AC}$ de tal modo que os segmentos de reta $\overline{BE}$ e $\overline{AD}$ sejam paralelos. Sabendo que $\overline{AD}$ mede $\sqrt{2}$ cm, então a área do círculo inscrito no triângulo EBC é:

A $\pi(4 \quad 2\sqrt{3})$ cm^2
B $2\pi(3 \quad 2\sqrt{2})$ cm^2
C $3\pi(4 \quad 2\sqrt{3})$ cm^2
D $4\pi(3 \quad 2\sqrt{2})$ cm^2
E $\pi(4 \quad 2\sqrt{2})$ cm^2

22 IME Na figura seguinte, ABCD é um quadrado de lado 1 e BCE é um triângulo equilátero

O valor de $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é:

A $1 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$
B $2-\frac{\sqrt{6}}{2}$
C $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$
D $1 \quad \frac{\sqrt{2}}{5}$
E $1 \quad \frac{\sqrt{3}}{5}$

gorodenkoff/iStockphoto.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

Princípios de Geometria Plana

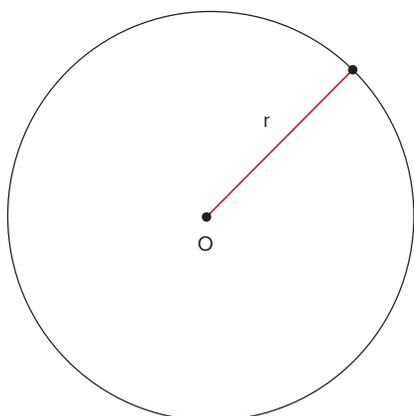
O pensamento geométrico clássico foi estruturado nos princípios lógicos de Aristóteles e Platão para a observação das propriedades características das formas geométricas Esse estudo já produziu uma grande coleção de certezas a respeito das formas geométricas que são amplamente utilizadas no desenvolvimento da tecnologia A possibilidade de relacionar, de modo preciso, as grandezas da área e do volume às grandezas lineares e angulares de uma forma geométrica é uma das grandes conquistas da Geometria Clássica. Devemos adquirir a capacidade de avaliar medidas de ângulos, comprimentos, áreas e volumes de formas geométricas mais complexas que a do triângulo retângulo. Neste capítulo, vamos explorar a estrutura lógica da Geometria e a atribuição das medidas angulares

A Geometria de Euclides

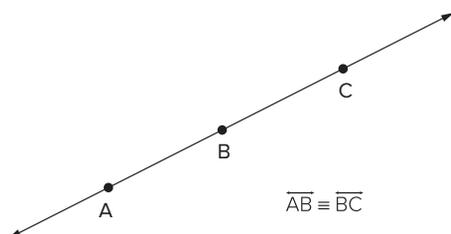
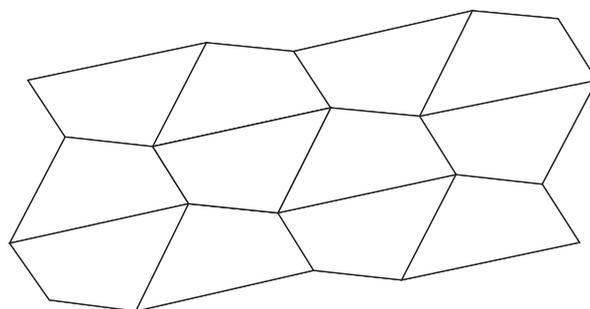
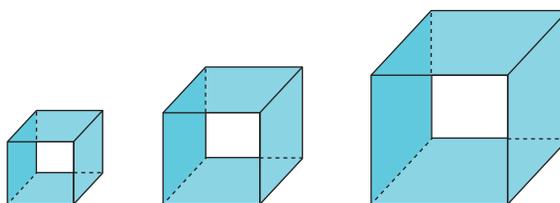
Embora existam diversas formas modernas do pensamento geométrico, as avaliações pré-vestibulares cobram apenas as ideias propostas por Euclides e Descartes.

Discípulo de Platão, Euclides via lógica no pensamento geométrico e propôs uma linha de raciocínio ao estudo da Geometria que podia incorporar as descobertas de seus predecessores, como Tales e Pitágoras.

Assim, o estudo da Geometria Euclidiana parte de três conceitos primitivos que admitimos existir em um único espaço geométrico: os pontos, as retas e os planos As demais figuras geométricas podem ser definidas por afir mações referentes aos pontos, às retas ou aos planos.

Por exemplo, o conjunto de todos os pontos de um plano que estão situados a uma distância dada (r) de um mesmo ponto (O) desse plano define a figura de uma circunferência de centro O e raio r.

Em todo o estudo da Geometria, estão presentes esses três aspectos: a forma, o tamanho e a posição. Por isso, ela admite diferentes níveis de comparação entre as figuras geométricas. A nomenclatura usada para essa comparação é:

- **Igualdade:** significa mesma forma, mesmo tamanho e mesma posição.
- **Congruência:** significa mesma forma e mesmo tamanho
- **Semelhança:** significa mesma forma.
- **Equivalência:** significa mesmo tamanho.

De acordo com essa nomenclatura, uma figura geométrica só pode ser **igual** a ela mesma. A reta que passa pelos pontos A e B, por exemplo, é igual àquela que passa pelos pontos B e C quando os três pontos são colineares

Duas figuras **congruentes** são idênticas em tudo o que se refere às suas medidas e podem ocupar posições diferentes formando padrões de repetição em alguns casos. Veja o exemplo:

Figuras **semelhantes** têm o mesmo formato, mas podem assumir diversos tamanhos. Os termos usados para designar formatos geométricos podem defini-los de modo mais ou menos preciso, dependendo do caso.

Quanto ao tamanho das figuras, os termos grande, médio e pequeno não são suficientes para a comparação que o estudo da Geometria propõe, sendo avaliado em diferentes níveis:

- **Espacial:** é o que possui as três dimensões métricas.
- **Superficial:** é o que tem apenas duas dimensões métricas
- **Linear:** é o que apresenta apenas uma dimensão métrica.
- **Angular:** é o que não possui dimensão métrica, mas que pode, mesmo assim, ser medido.

Assim, duas figuras são denominadas **equivalentes** no espaço quando têm o mesmo volume e, no plano, quando possuem a mesma área, por exemplo:

As dimensões métricas de um objeto sólido são designadas pelos termos “altura”, “largura” e “profundidade”. Além disso, “comprimento” e “espessura” são usados para denominar, respectivamente, a maior e a menor das dimensões de um objeto.

Veja também o que se pode afirmar sobre os tamanhos dos entes primitivos da Geometria e o espaço geométrico euclidiano

		Tamanho		
	Dimensões	**Altura**	**Largura**	**Profundidade**
Um ponto	Zero	Zero	Zero	Zero
Uma reta vertical	Uma	Infinita	Zero	Zero
Um plano horizontal	Duas	Zero	Infinita	Infinita
O espaço geométrico	Três	Infinita	Infinita	Infinita

Já o estudo das **posições** das figuras geométricas, principal contribuição do pensamento cartesiano para a Geometria, na época de Euclides, pode ser resumido por relações entre as localizações de duas ou mais figuras. Assim, um ponto pode pertencer ou não a uma reta, duas retas de um mesmo plano podem ser paralelas ou concorrentes, uma reta pode ser tangente ou secante a uma circunferência etc.

Postulados e teoremas

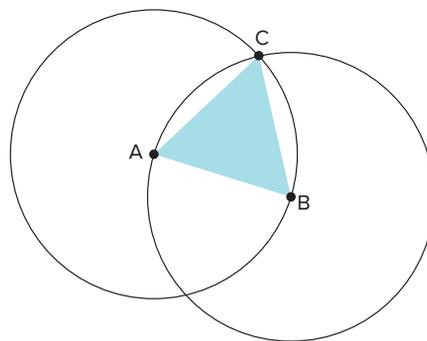
Os postulados da Geometria são regras que enunciam tanto possibilidades de construção geométrica quanto propriedades de seus entes primitivos ou definidos. Euclides pretendia partir de um número reduzido de regras e definições para deduzir e justificar, de maneira lógica, outras leis e propriedades a respeito das características das figuras geométricas. As leis e propriedades geométricas assim deduzidas são os teoremas

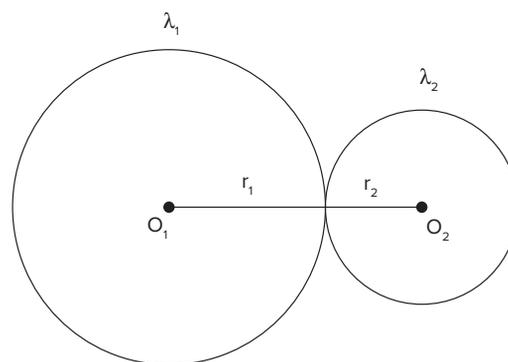
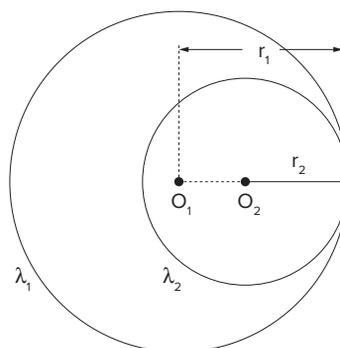
Alguns dos postulados da Geometria Euclidiana dizem respeito às possibilidades de construção geométrica, por isso permitem que linhas auxiliares sejam traçadas para facilitar a resolução de algum problema. Dessa forma, se for útil, podemos, por exemplo:

1. Traçar um segmento de reta partindo de qualquer ponto até outro ponto qualquer.
2 Prolongar um segmento de reta indefinidamente em uma mesma direção para obter uma reta
3 Descrever uma circunferência com centro em qualquer ponto e passando por qualquer outro ponto.

Do primeiro postulado, podemos depreender que é permitido ligar, por uma linha reta, dois pontos quaisquer de uma figura geométrica se isso for ajudar na resolução de um problema. E, ao fazê-lo, devemos saber que, do ponto de vista euclidiano, aquela linha representa o caminho mais curto entre os pontos ligados.

O segundo postulado permite prolongarmos os segmentos presentes em uma figura, mas somente criando um ângulo raso (180°) na extremidade do segmento prolongado.

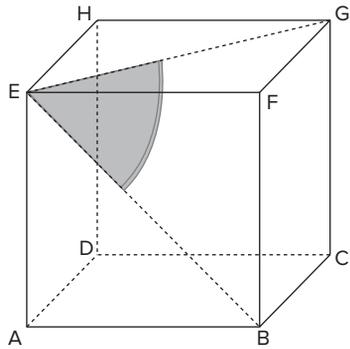
O terceiro postulado possibilita que circunferências sejam traçadas efetuando a rotação de um ponto em torno de outro. Aplicando apenas este último postulado, um desenhista já pode resolver o problema de encontrar vértices de muitas figuras, como os triângulos equiláteros

Além disso, permite efetuarmos adições e subtrações de comprimentos geometricamente, com o auxílio do compasso Basta que sejam desenhadas circunferências tangentes entre si, o que pode acontecer de duas formas:

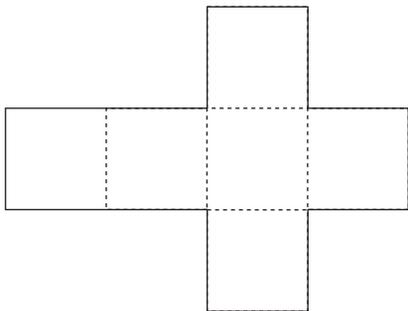
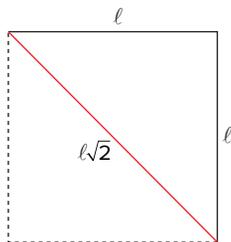
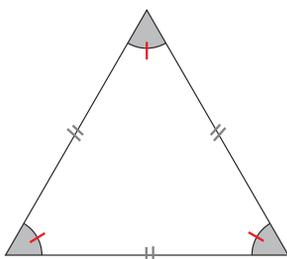
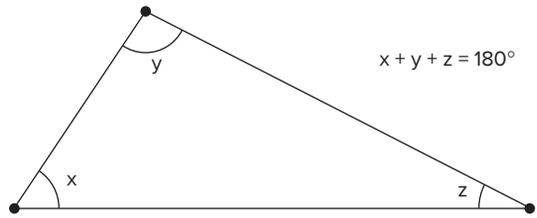
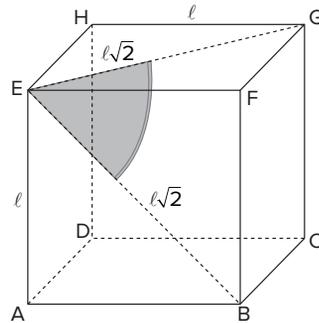
1. Se a circunferência λ_1 é **tangente exteriormente** à circunferência λ_2, então a distância entre seus centros é igual à soma das medidas de seus raios.

2. Se a circunferência λ_2 é **tangente interiormente** à circunferência λ_1, então a distância entre seus centros é igual à diferença absoluta das medidas de seus raios.

As premissas da Geometria são os seus postulados, seus entes primitivos e definidos. As deduções lógicas extraídas dessas premissas são os teoremas da Geometria, que não apenas enunciam propriedades a respeito de figuras geométricas como também descrevem, por meio de fórmulas matemáticas, as maneiras corretas de serem calculadas as muitas medidas presentes em cada figura geométrica.

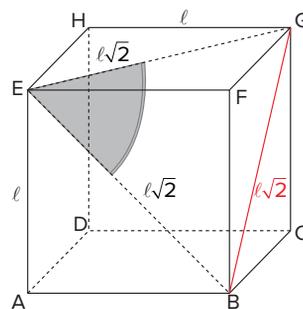
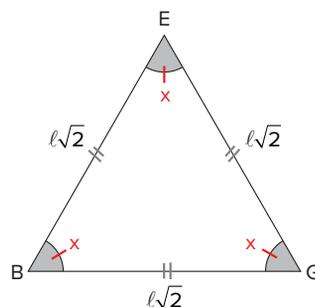
Alguns teoremas são conhecidos pelo nome de algum geômetra, como Pitágoras e Tales, e outros pelo nome de algum ente definido, por exemplo: teorema da bissetriz ou teorema do ângulo externo do triângulo

Os exemplos a seguir apresentam problemas que podem ser resolvidos com o auxílio de alguma construção permitida pelos postulados e pela aplicação de alguns impor tantes teoremas da Geometria Euclidiana. Neste momento, não precisamos nos preocupar com o desconhecimento dos teoremas ou com a ausência das demonstrações, pois serão estudados particularmente no decorrer do curso.

Exemplo 1

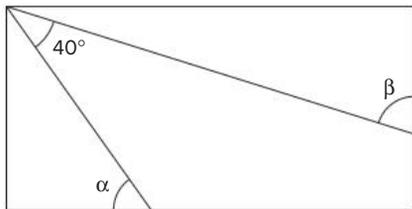
Qual é a medida em graus do ângulo BÊG determinado pelos vértices do cubo a seguir?

Podemos responder a essa pergunta considerando os seguintes conhecimentos geométricos:

I Cubo é um sólido cercado por seis quadrados de mesmo tamanho.

II. A diagonal de um quadrado de lado ℓ mede $\ell\sqrt{2}$.

III Os ângulos de um triângulo equilátero têm todos a mesma medida.

IV. A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.

Os conhecimentos (I) e (II) já podem ser aplicados à figura, pois ela apresenta explicitamente um cubo, seus seis quadrados em perspectiva e duas diagonais desses quadrados.

Mas os conhecimentos (III) e (IV) só podem ser aplicados à figura depois de uma pequena interferência em seu desenho. No estudo da Geometria, essa e outras interferências são denominadas construções geométricas. As únicas construções geométricas permitidas são as enunciadas pelos três primeiros postulados de Euclides.

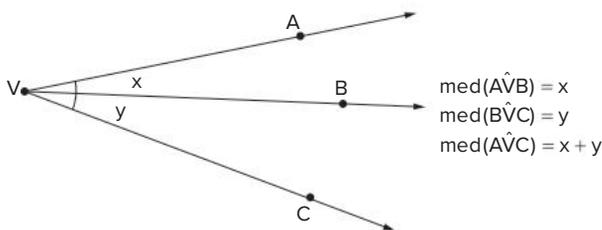
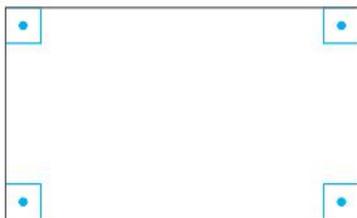
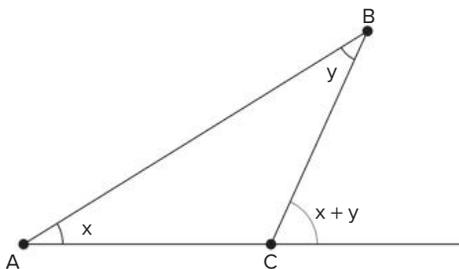
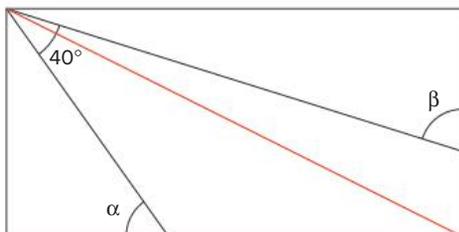
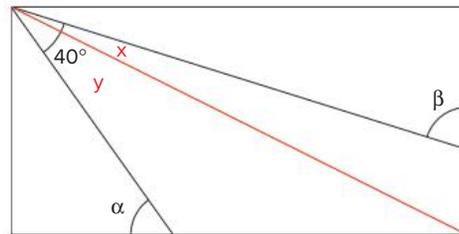
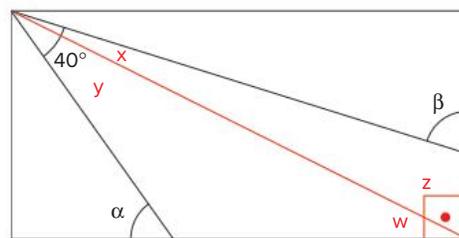
Por isso, vamos fazer uso da permissão concedida pelo **primeiro postulado** e traçar o segmento de reta que une os pontos B e G da figura

Agora, observando que EG = $\ell\sqrt{2}$, pois também é diagonal de um dos quadrados que cercam esse cubo, pelos argumentos (I) e (II) concluímos que o triângulo BEG é equilátero.

Dos argumentos (III) e (IV), sendo x a medida do ângulo BÊG, temos que:

$$x + x + x = 180° \Leftrightarrow x = 60°$$

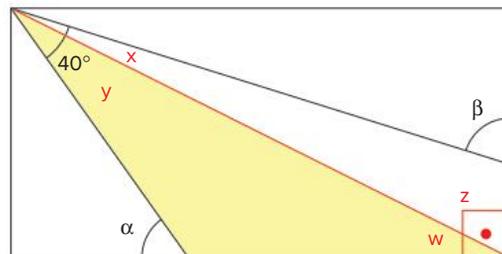
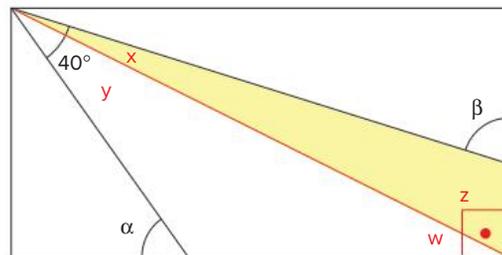
Exemplo 2

Fuvest No retângulo a seguir, o valor, em graus, de $\alpha + \beta$ é:

a) 50 b) 90 c) 120 d) 130 e) 220

Podemos responder a essa pergunta considerando os seguintes conhecimentos geométricos:

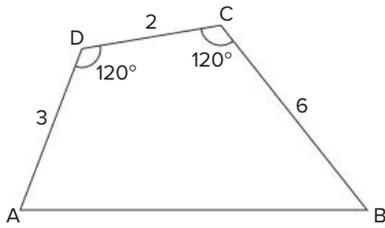
I. Dois ângulos adjacentes determinam um terceiro ângulo cuja medida é a soma deles dois

II Os ângulos de um retângulo medem 90°

III Um ângulo externo de um triângulo mede a soma dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Além disso, vamos fazer novamente o uso do **primeiro postulado** de Euclides e traçar o segmento de reta determinado por dois vértices opostos do retângulo.

Com essa construção, podemos aplicar o conhecimento (I) e observar que foram determinados ângulos de medidas x e y tais que $x + y = 40°$.

Aplicando o conhecimento (II), também podemos observar que foram determinados ângulos de medidas z e w tais que $z + w = 90°$.

$$\begin{cases} x + y = 40° \\ z + w = 90° \end{cases}$$

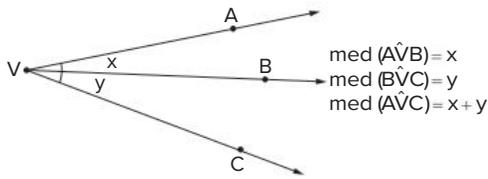
Agora, o conhecimento (III) pode ser observado nos dois triângulos determinados pela construção da diagonal do retângulo, pois:

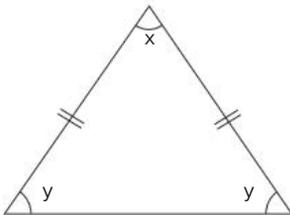
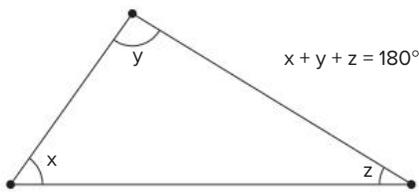
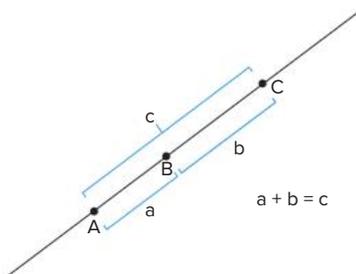
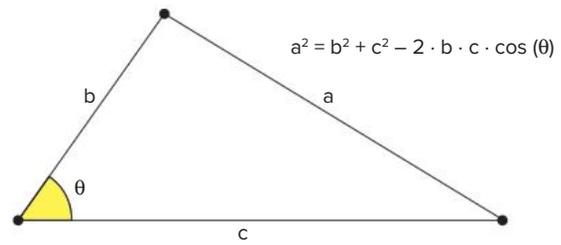
- o ângulo α é externo do triângulo de ângulos internos não adjacentes y e w.

- o ângulo β é externo do triângulo de ângulos internos não adjacentes x e z

Assim, somando as duas últimas equações e substituindo os valores anotados no sistema formado pelas duas primeiras, temos:

$$\alpha + \beta = y + w + x + z = (x + y) + (z + w)$$
$$\alpha + \beta = 40° + 90°$$
$$\alpha + \beta = 130°$$

Exemplo 3

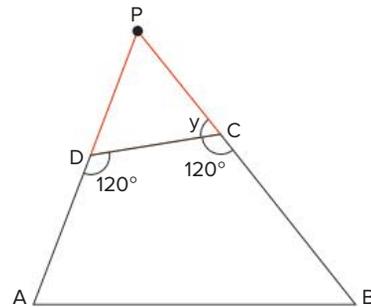
Qual é o comprimento da base $\overline{AB}$ do quadrilátero ABCD a seguir?

Podemos responder a essa pergunta considerando os seguintes conhecimentos geométricos:

I Dois ângulos adjacentes determinam um terceiro ângulo cuja medida é a soma deles dois

II. O ângulo raso mede 180°.

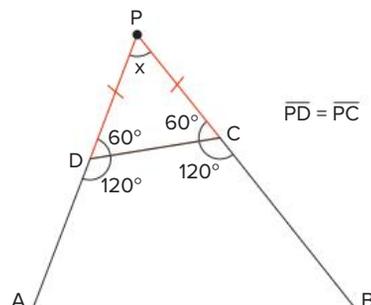
III Se há ângulos internos de mesma medida em um triângulo, então esses ângulos são opostos a lados de mesmo comprimento

IV. As medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo somam 180°.

V. Dois segmentos colineares e consecutivos determinam um terceiro segmento cujo comprimento é igual à soma deles dois.

VI Teorema dos cossenos

VII. $\cos(60°) = \frac{1}{2}$.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

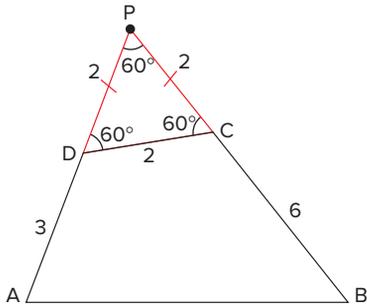
Tab. 1 Valores notáveis do seno, do cosseno e da tangente.

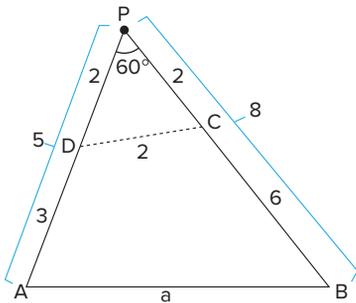
Como a figura não apresenta explicitamente as formas necessárias para a aplicação desses conhecimentos, vamos fazer uso da construção estipulada pelo **segundo postulado** de Euclides e prolongar os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ da figura dada, obtendo o ponto P

Agora, sendo y a medida do ângulo obtido no prolongamento de $\overline{BC}$, dos conhecimentos (I) e (II), temos que:

$$120° + y = 180° \iff y = 60°$$

Com o mesmo raciocínio, podemos concluir que o ângulo determinado no prolongamento do lado $\overline{AD}$ também mede 60°. Assim, aplicando o conhecimento (III), concluímos que $\overline{PD}$ e $\overline{PC}$ têm o mesmo comprimento.

Do conhecimento (IV), sendo x a medida do ângulo no vértice P, obtemos:

$$60° + 60° + x = 180° \quad \Leftrightarrow \quad x = 60°$$

Novamente, pelo conhecimento (III), podemos concluir que todos os lados do triângulo PDC apresentam o mesmo comprimento.

Agora, aplicando o conhecimento (V), encontramos:

- AP = AD + PD = 3 + 2 = 5
- BP = BC + PC = 6 + 2 = 8

Assim, do conhecimento (VI), obtemos:

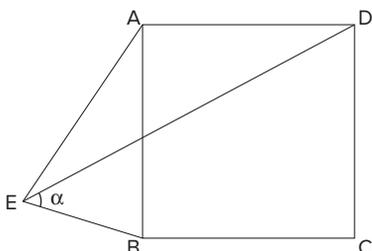
$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(60°)$$

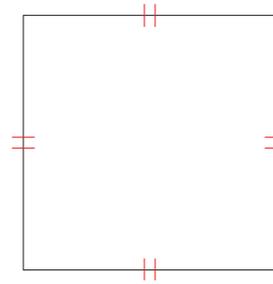
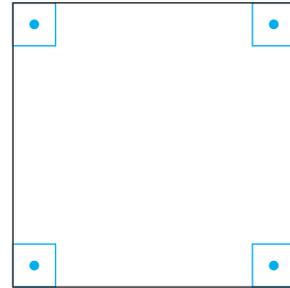
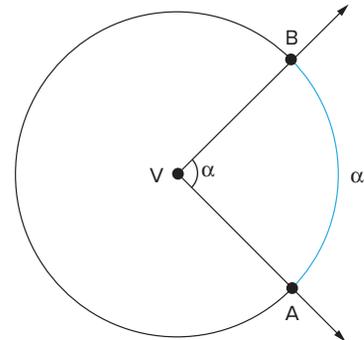
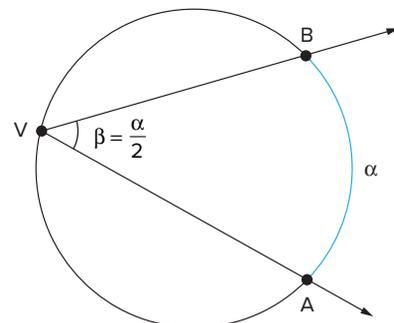
E, finalmente, substituindo o valor apresentado no conhecimento (VII), ficamos com a seguinte equação, em que a representa um número positivo:

$$a^2 = 25 + 64 \quad \cdot 80 \ \frac{1}{2}$$
$$a^2 = 89 - 40$$
$$a^2 = 49$$
$$a = 7$$

Portanto, o segmento $\overline{AB}$ tem comprimento 7.

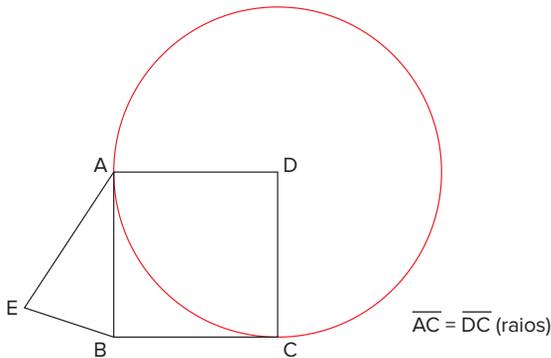
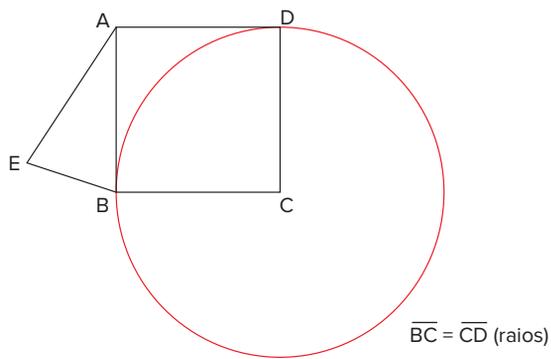
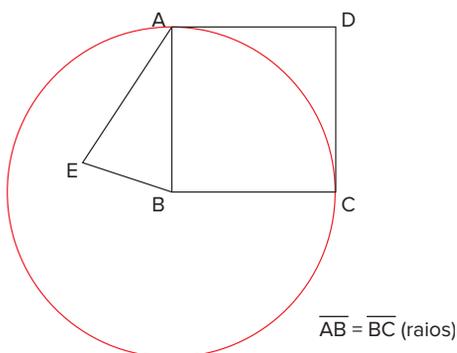
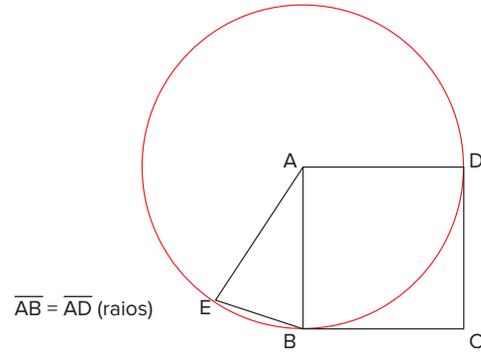
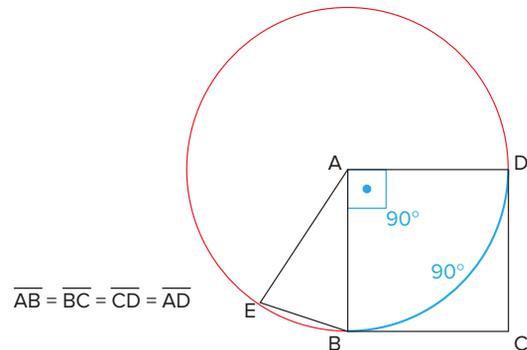
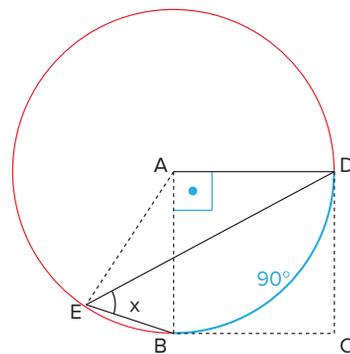
Exemplo 4

Na figura, o segmento $\overline{AE}$ tem a mesma medida do lado do quadrado ABCD. Qual é a medida α do ângulo $B\hat{E}D$?

Podemos responder a essa pergunta considerando os seguintes conhecimentos geométricos:

I. Todos os lados de um quadrado têm o mesmo comprimento.

II. Os ângulos internos de um quadrado são todos retos.

III. Se o vértice de um ângulo coincide com o centro de uma circunferência, então esse ângulo possui a mesma medida do arco que ele determina na circunferência.

IV. Se um ângulo está inscrito em uma circunferência, então esse ângulo tem a metade da medida do arco que ele determina na circunferência.

Particularmente, a aplicação do **terceiro postulado** de Euclides é uma das mais difíceis de serem feitas, pois não é sempre que dispomos de um compasso ou que podemos confiar na escala/proporção da figura apresentada por uma questão.

Por isso, é recomendável que se encontrem segmentos de mesmo comprimento com uma extremidade comum na figura apresentada antes de fazer uso desse postulado, os quais garantem que uma circunferência com centro na extremidade comum e raio igual ao comprimento dos segmentos necessariamente deve passar pelas demais extremidades dos segmentos.

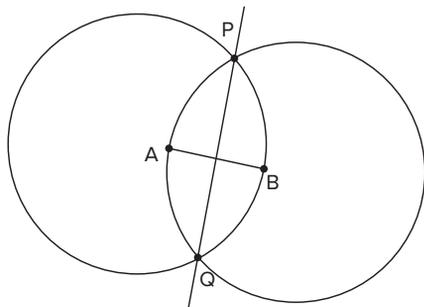
Na figura apresentada pelo problema, o conhecimento (I) permite observarmos quatro opções diferentes para a aplicação do terceiro postulado:

- O fato de $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ terem o mesmo comprimento sugere a possibilidade do traçado de uma circunferência com centro D e que passe pelos pontos A e C.

- O fato de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ terem o mesmo comprimento sugere a possibilidade do traçado de uma circunferência com centro C e que passe pelos pontos B e D.

- O fato de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ terem o mesmo comprimento sugere a possibilidade do traçado de uma circunferência com centro no ponto B e que passe pelos pontos A e C.

- O fato de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ terem o mesmo comprimento sugere a possibilidade do traçado de uma circunferência com centro A e que passe pelos pontos B, D e E.

Como a circunferência de centro A passa pelo vértice E do ângulo procurado, vamos optar por esta última aplicação do postulado da circunferência Assim, os conhecimentos (II) e (III) permitem concluir que o menor arco $\overset{\frown}{BD}$ dessa circunferência mede 90°.

Agora basta fazer uso do primeiro postulado e traçar o segmento de reta que une os pontos D e E para poder observar, de acordo com o conhecimento (IV), que a medida x do ângulo $B\hat{E}D$ é igual à metade da medida do menor arco $\overset{\frown}{BD}$ da circunferência.

$D\hat{E}B$ é ângulo inscrito.

$$x = \frac{90°}{2} = 45°$$

De acordo com os postulados de Euclides, nenhuma reta ou circunferência aleatória pode ser traçada a não ser que alguma propriedade invariante da geometria justifique essa construção.

Assim, dados os pontos A e B, obedecendo ao tercei ro postulado de Euclides, podemos traçar a circunferência de centro em A que passa por B e a circunferência de

centro em B que passa por A. Uma vez construídas essas circunferências, observamos que elas se interceptam em dois pontos (P e Q), situados em lados opostos do segmento $\overline{AB}$. Então, os dois primeiros postulados permitem que P e Q sejam ligados por um segmento de reta e que este seja prolongado indefinidamente, determinando uma única reta, denominada mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Circunferências secantes.

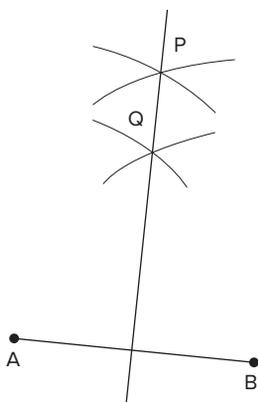
Discutindo as propriedades dessa construção, Euclides postulou que os quatro ângulos determinados pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$ têm a mesma medida que adotou como unidade para as medidas angulares: o ângulo reto. Assim, para ele, um ângulo raso mede 2 ângulos retos, e a circunferência toda mede 4, por exemplo.

Assim, embora o **quarto postulado** de Euclides enuncie literalmente que "todos os ângulos retos são congruentes", podemos interpretá-lo como uma garantia de que, dados um ponto P e uma reta r, podemos traçar, pelo ponto P, uma única reta perpendicular a r; e, fazendo isso, obtemos quatro ângulos retos.

! Atenção

A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ possui uma série de propriedades importantes para a Geometria:

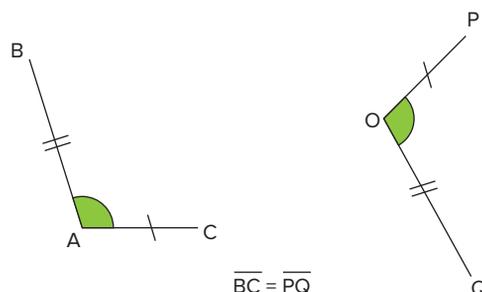
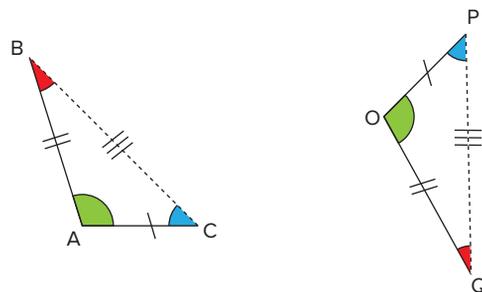
- é perpendicular ao segmento;
- divide o segmento ao meio;
- é o eixo da simetria de reflexão existente entre as extremidades A e B do segmento;
- cada um de seus pontos está igualmente afastado das extremi dades A e B do segmento;
- contém os vértices de todos os triângulos isósceles de base AB;
- contém os centros de todas as circunferências que passam por A e B.

Essas são as propriedades invariantes que justificam outras possíveis construções para a mediatriz de um segmento.

Há também o **quinto postulado** da Geometria Euclidiana, o qual garante que, por um ponto fora de uma reta dada, passe uma única reta paralela a ela. As construções de retas paralelas e perpendiculares em demonstrações de teoremas e resolução de exercícios são provavelmente as mais usadas, como veremos no decorrer do nosso estudo da Geometria

Congruência de triângulos

Muitas outras formas modernas do pensamento geomé trico não euclidiano foram criadas com base na discussão do quinto postulado (o das paralelas). As geometrias modernas conhecidas como Geometria elíptica e Geometria hiperbólica contestam esse postulado afirmando, a primeira, que não existem retas paralelas e, a segunda, que, por um ponto fora de uma reta dada, passam infinitas retas diferentes que são paralelas à reta dada Os postulados válidos em todas as formas do pensamento geométrico clássico e moderno são chamados de postulados da Geometria neutra

O principal postulado da Geometria neutra trata da congruência de triângulos enunciando que, se dois pa res de segmentos com mesmos comprimentos têm uma extremidade em comum e formam ângulos de mesma medida, então os triângulos determinados pelas extremidades desses segmentos são congruentes entre si. A relação de congruência é representada pelo símbolo (≅) e significa que os demais lados e ângulos desses triângulos também terão as mesmas medidas. Assim:

- Se AB = OQ, AC = OP e Â = Ô.

- ...então ΔABC ≅ ΔOQP e, portanto, B = Q, C = P e BC = PQ.

Triângulos congruentes.

Esse postulado descreve apenas um dos muitos casos em que se pode concluir a congruência de dois triângulos. Trata-se do caso **LAL** da congruência de triângulos, pois parte da congruência de dois dos **L**ados e do **Â**ngulo que eles formam. Desse postulado, podem ser deduzidos outros casos de congruência

FRENTE 3

O caso **LLL** se baseia na congruência entre os três lados de dois triângulos para concluir a congruência de seus três ângulos. Assim, se os três lados de um triângulo têm os mesmos comprimentos dos três lados de outro triângulo, então os três ângulos de um dos triângulos também devem ter as mesmas medidas dos três ângulos do outro triângulo

O caso **ALA** parte da congruência entre um lado de cada triângulo e dos ângulos cujos vértices são as extremidades desses lados para concluir a congruência dos outros dois lados e do terceiro ângulo desses triângulos. Esse é o caso recíproco do postulado **LAL**.

O caso **LAA$_o$** também se baseia na congruência entre um lado de cada triângulo e entre dois ângulos de cada, mas sendo um desses ângulos oposto ao lado considerado em cada triângulo para concluir a congruência dos outros dois lados e do terceiro ângulo desses triângulos

Como a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é constante e igual a 180°, verificando que dois ângulos de um triângulo têm as mesmas medidas de dois ângulos de outro triângulo, podemos concluir que isso acontece também com o terceiro ângulo de cada triângulo. Essa observação faz com que os casos ALA e LAA$_o$ possam ser observados simultaneamente na verificação da congruência entre dois triângulos

Exercício resolvido

1 Observando o painel composto de 16 pequenos triângulos equiláteros de lados unitários ilustrado na Figura 1, uma pessoa percebeu a existência de triângulos equiláteros de diversos tamanhos, como mostra o triângulo ABC de lado 2 em destaque na Figura 2.

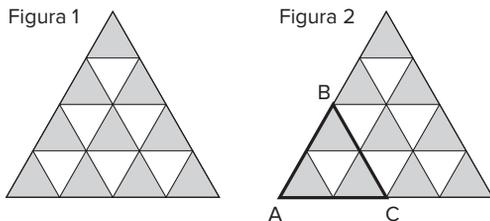



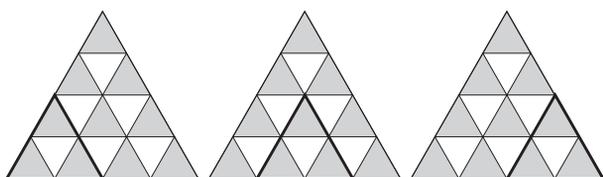
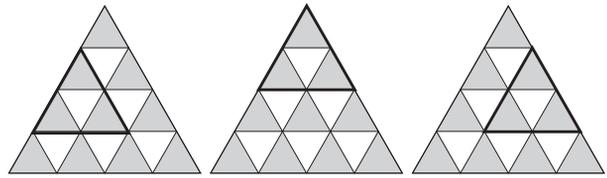
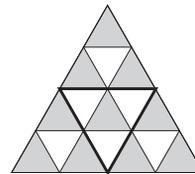
Figura 1

Figura 2

O número de triângulos congruentes ao triângulo em destaque na Figura 2, presentes no painel, incluindo o próprio triângulo ABC, é:

A 6
B 7
C 8
D 9
E 10

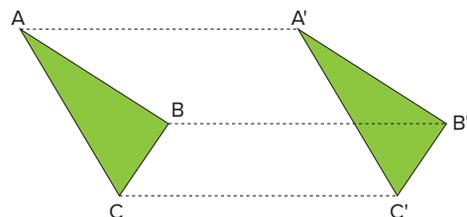
Resolução:

Como os triângulos congruentes ao triângulo ABC devem possuir lado 2, temos que, com um vértice acima do lado horizontal, há, incluindo o próprio triângulo ABC, 3 triângulos com a base colinear ao segmento $\overline{AB}$

Ainda com o vértice do lado horizontal, há mais 3 triângulos com a base situada em alguma reta paralela acima do segmento $\overline{AB}$ no painel

Com um vértice abaixo do lado horizontal, há mais 1 triângulo congruente ao triângulo ABC no painel.

Portanto, há 3 + 3 + 1 = 7 triângulos congruentes, incluindo o próprio triângulo ABC.
Alternativa: B.

Também é importante observarmos que, se os três ângulos de um triângulo têm as mesmas medidas dos três ângulos de outro triângulo, isso não é suficiente para garantir a congruência dos triângulos, pois há alguns com os mesmos ângulos internos cujos lados não têm comprimentos iguais. Essa situação caracteriza, na verdade, um caso de semelhança entre os triângulos, assunto que será estudado no próximo capítulo.

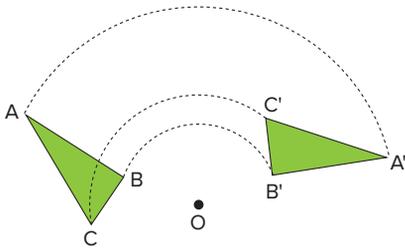
A congruência entre dois triângulos também pode ser verificada a partir de transformações geométricas denominadas isométricas. As transformações isométricas da Geometria são:

Translação

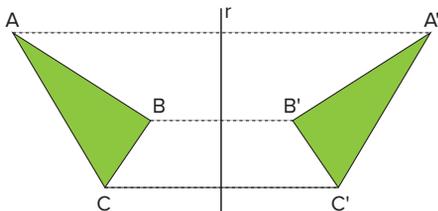
A translação é a transformação geométrica capaz de levar todos os pontos de uma figura a coincidirem com os pontos de outra segundo o deslocamento representado por um único vetor.

Na figura, se os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são paralelos e têm o mesmo comprimento, então os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

Rotação

A rotação é a transformação geométrica capaz de levar todos os pontos de uma figura a coincidirem com os pontos

de outra segundo deslocamentos representados por arcos de circunferências de mesmos centro e medida angular

Na figura, se os arcos $\overset{\frown}{AA'}$, $\overset{\frown}{BB'}$ e $\overset{\frown}{CC'}$ têm o mesmo centro O e a mesma medida angular, então os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

Reflexão

A reflexão é a transformação geométrica capaz de levar todos os pontos de uma figura a coincidirem com os pontos de outra como se esta fosse sua imagem em relação a um espelho representado por uma reta, que é denominada eixo de simetria

Na figura, se os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são perpendiculares à reta r e estão todos divididos ao meio pela mesma reta r, os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

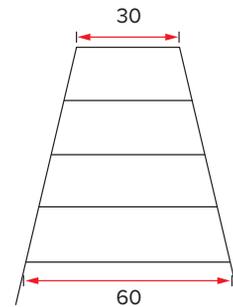
Quando uma figura plana possui mais do que um eixo de simetria, então esses eixos se interceptam em um mesmo ponto que caracteriza o centro de simetria radial da figura ou centro da simetria de rotação.

Assim, se uma figura possui n eixos de simetria, podemos dizer que ela é invariante por rotações de um ângulo de medida θ em torno de seu centro, tal que $\theta = \frac{360°}{n}$

Veja alguns exemplos.

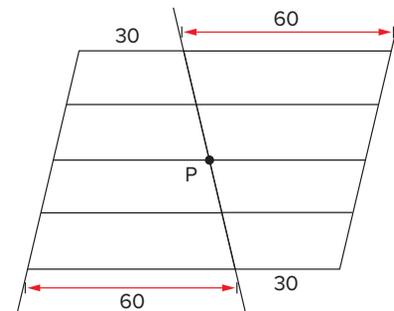
Retângulo	Triângulo equilátero	Quadrado
n = 2 eixos $\theta = \frac{360°}{2} = 180°$	n = 3 eixos $\theta = \frac{360°}{3} = 120°$	n = 4 eixos $\theta = \frac{360°}{4} = 90°$

Exercício resolvido

2 **Enem** Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura.

Os degraus serão obtidos cortando se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

A 144
B 180
C 210
D 225
E 240

Resolução:

Uma possível solução para essa questão é prolongarmos os segmentos que representam os degraus da escada e traçarmos uma reta que seja paralela a um dos lados da escada de modo a obtermos uma figura **congruente** à figura apresentada:

A congruência entre as figuras que representam as escadas está garantida pelo fato de que a figura formada pela reunião das "escadas" é invariante por uma rotação de 180° em torno do ponto P.

Observando também que essa composição de figuras congruentes apresenta uma série de paralelogramos, os quais, por sua vez, são quadriláteros com lados opostos de mesmo comprimento, podemos concluir que, para construir os degraus de duas escadas a partir de uma única peça linear de madeira, essa peça teria que possuir um comprimento mínimo de:

$$5 \cdot (30 + 60) = 5 \cdot 90 = 450 \text{ cm}$$

Mas, como o marceneiro deseja construir apenas uma dessas escadas, o comprimento da peça pode ser de apenas:

$$\frac{450}{2} \text{ cm} = 225 \text{ cm}$$

Alternativa: D.

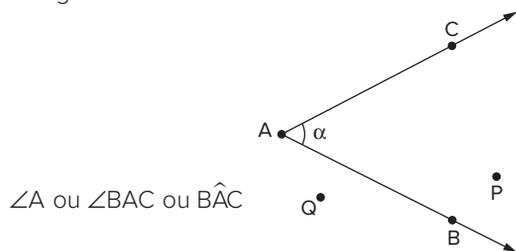
Note que, além da aplicação dos postulados, essa resolução faz uso de alguns critérios geométricos de **congruência** e **isometria**.

Ângulos e medidas angulares

Sempre que observamos duas linhas retas, ou dois segmentos de reta, e percebemos não haver paralelismo, surge a noção de inclinação relativa, cuja grandeza pode ser mensurada de acordo com o conceito de ângulo.

Ângulo é a figura geométrica formada pela reunião dos pontos de duas semirretas com mesma origem, mas os ângulos que podemos observar são aqueles que dividem o plano em duas regiões não congruentes, uma delas côncava e a outra convexa.

A ilustração a seguir apresenta a figura de um ângulo que pode ser indicado por $\angle A$ ou por $\angle BAC$, que é a notação recomendada quando há mais de um ângulo com vértice em um mesmo ponto. Além disso, podemos indicar um ângulo usando um acento circunflexo sobre a letra que representa o seu vértice ($B\hat{A}C$).

Na figura:

- o ponto A é o vértice do ângulo
- as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são os lados do ângulo
- o valor que α indica é a medida do ângulo: $\alpha = \text{med}\,(B\hat{A}C)$
- o ponto P está situado na região angular convexa.
- o ponto Q está situado na região angular côncava.

A medida de um ângulo pode ser feita com a divisão da circunferência em 360 partes, denominadas graus (°). Essa divisão tem origem na Babilônia, onde o sistema numérico era sexagesimal. Nesse sistema, as unidades eram subdivididas em 60 partes. Como no sistema horário, 1 grau possui 60 minutos (') e 1 minuto possui 60 segundos (").

- $1° = 60'$
- $1' = 60"$

Para atribuir uma medida a esse ângulo, consideramos o número de graus, minutos e segundos de circunferência centrada em seu vértice que estão compreendidos em alguma de suas regiões angulares. Devemos optar, sempre que possível, pela região angular convexa, pois fica geralmente associada ao menor número de graus, minutos e segundos.

Assim, todo ângulo pode ser medido por dois valores distintos cuja soma equivale a 360°; e, se α indicar um desses valores, então a expressão $(360° - \alpha)$ trará o outro valor. As duas medidas observadas nas diferentes regiões do plano determinadas por um mesmo ângulo são denominadas medidas "replementares".

Os ângulos podem ser classificados em relação às suas medidas. Assim, considerando as medidas angulares em graus, temos:

- Ângulos nulos são aqueles formados por duas semirretas iguais. Os ângulos nulos medem 0°.
- Ângulos agudos são aqueles que têm medidas entre 0° e 90°
- Ângulos retos são aqueles que medem exatamente 90°.
- Ângulos obtusos são aqueles que têm medidas entre 90° e 180°.
- Ângulos rasos são aqueles formados por duas semirretas opostas e de mesma origem. Os ângulos rasos medem 180°.

Também classificamos os pares de ângulos no que se refere às suas medidas e às posições que ocupam:

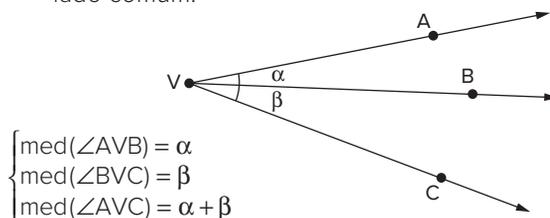
- Ângulos complementares são aqueles cujas medidas somam a de um ângulo reto.

$$\alpha + \beta = 90°$$

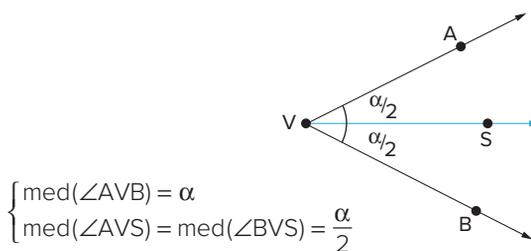
- Ângulos suplementares são aqueles cujas medidas somam a de um ângulo raso

$$\alpha + \beta = 180°$$

- Ângulos adjacentes são aqueles que possuem um lado comum.

$$\begin{cases} \text{med}(\angle AVB) = \alpha \\ \text{med}(\angle BVC) = \beta \\ \text{med}(\angle AVC) = \alpha + \beta \end{cases}$$

Bissetriz

A bissetriz de um ângulo é a semirreta com origem no vértice do ângulo e que o divide em duas regiões congruentes. Na figura, a semirreta $\overrightarrow{VS}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{V}B$:

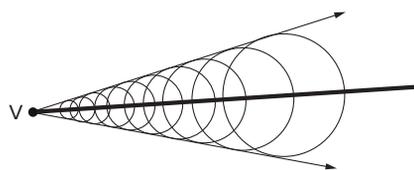
$$\begin{cases} \text{med}(\angle AVB) = \alpha \\ \text{med}(\angle AVS) = \text{med}(\angle BVS) = \dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Saiba mais

Assim como a reta mediatriz de um segmento, a semirreta bissetriz de um ângulo também possui uma série de propriedades importantes para o estudo da Geometria:

1 Ela divide o ângulo ao meio

2 Ela é o eixo da simetria de reflexão existente entre as semirretas que formam o ângulo.

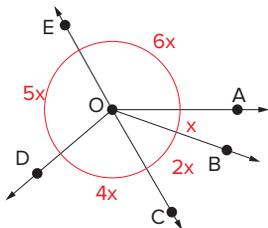
3. Cada um de seus pontos está igualmente afastado dos lados do ângulo.

4. Nela estão os centros de todas as circunferências que tangenciam ambos os lados do ângulo

Exercícios resolvidos

3 De um ponto O partem cinco semirretas: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$, que formam cinco ângulos adjacentes e consecutivos no sentido horário. Sabendo que as medidas desses ângulos são, respectivamente, proporcionais aos números 1, 2, 4, 5 e 6, esboce a figura que represente tal situação e determine entre os ângulos não rasos apresentados pela figura:

a) a maior medida que pode ser tomada em uma região convexa.

b) a maior medida que pode ser tomada em uma região côncava.

Resolução:

De acordo com as proporções dadas e a figura, temos a equação:

$$x + 2x + 4x + 5x + 6x = 360°$$
$$18x = 360°$$
$$x = 20°$$

Como as medidas angulares tomadas nas regiões convexas não ultrapassam 180°, as medidas dos ângulos apresentados por essa figura são:

$med(A\hat{O}B) = 20°$
$med(B\hat{O}C) = 2 \cdot 20° = 40°$
$med(C\hat{O}D) = 4 \cdot 20° = 80°$
$med(D\hat{O}E) = 5 \cdot 20° = 100°$
$med(E\hat{O}A) = 6 \cdot 20° = 120°$
$med(A\hat{O}C) = 20° + 40° = 60°$
$med(B\hat{O}D) = 40° + 80° = 120°$
$med(C\hat{O}E) = 80° + 100° = 180° \rightarrow$ ângulo raso
$med(E\hat{O}B) = 120° + 20° = 140°$
$med(A\hat{O}D) = 20° + 40° + 80° = 140°$

a) Portanto, a maior medida de um ângulo não raso é 140°.

b) Como $A\hat{O}B$ é o ângulo de menor medida tomada em sua região convexa (20°), esse ângulo possui a maior medida em sua região côncava: $360° - 20° = 340°$.

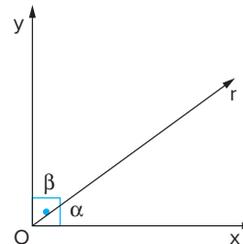
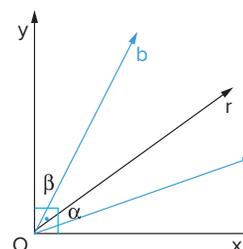
4 Sabendo que ângulos adjacentes têm um lado em comum, ângulos complementares têm a soma de suas medidas igual a 90° e que a bissetriz de um ângulo o divide ao meio, determine a medida dos ângulos formados pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes de medidas diferentes α e β complementares efetuando os procedimentos indicados nos itens a seguir.

a) Faça uma figura que represente corretamente essa situação.

b) Identifique quantos são os ângulos apresentados pela figura desenhada

c) Indique as medidas de todos esses ângulos em função de α e β.

Resolução:

a) A figura que representa corretamente dois ângulos adjacentes de medidas complementares é:

Sendo x, r e y as semirretas que determinam ângulos adjacentes de medidas α e β, traçando suas bissetrizes a e b obtemos a seguinte figura:

b) A figura formada pelas cinco semirretas apresenta um total de dez ângulos

c) As medidas desses ângulos podem ser representadas por:

$med(x\hat{O}a) = med(a\hat{O}r) = \frac{\alpha}{2}$ $\quad$ $med(a\hat{O}b) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$

$med(r\hat{O}b) = med(b\hat{O}y) = \frac{\beta}{2}$ $\quad$ $med(x\hat{O}b) = \alpha + \frac{\beta}{2}$

$med(x\hat{O}r) = \alpha$ $\quad$ $med(a\hat{O}y) = \frac{\alpha}{2} + \beta$

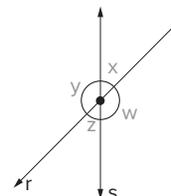
$med(r\hat{O}y) = \beta$ $\quad$ $med(x\hat{O}y) = \alpha + \beta = 90°$

Assim, a medida do ângulo formado pelas bissetrizes $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$$

Ângulos determinados por retas concorrentes

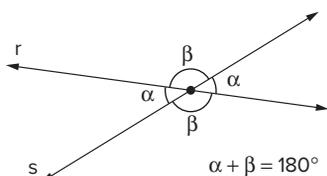
Duas retas que se interceptam em um ponto são denominadas retas concorrentes. O cruzamento dessas retas determina quatro ângulos, que podem ser todos **retos** se essas retas forem **perpendiculares** ou dois ângulos **agudos** e dois **obtusos** se forem **oblíquas**.

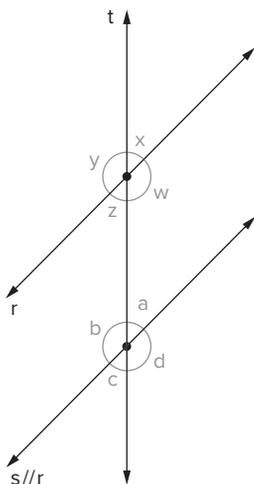
FRENTE 3

A classificação dos pares de ângulos do cruzamento dessas retas é tal que:

- os pares de ângulos $\begin{cases} x \text{ e } y \\ y \text{ e } z \\ z \text{ e } w \\ w \text{ e } x \end{cases}$ recebem o nome de **adjacentes**.
- os pares de ângulos $\begin{cases} x \text{ e } z \\ y \text{ e } w \end{cases}$ são denominados **opostos pelo vértice** (opv).

Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

1. Dois ângulos adjacentes no cruzamento de duas retas são suplementares.
2. Dois ângulos opostos pelo vértice no cruzamento de duas retas têm a mesma medida.

De modo mais prático, é correto afirmar que, entre os quatro ângulos determinados pelo cruzamento de duas retas oblíquas, há apenas duas medidas complementares.

Se duas retas são paralelas entre si, então elas não têm nenhum ponto de interseção. Mas, se uma terceira reta for transversal às duas primeiras, esta intercepta cada paralela em um ponto diferente.

Nessa situação, são determinados dois cruzamentos distintos em que podem ser observados oito ângulos, os quais serão todos retos se a reta transversal for perpendicular às paralelas; mas, se a reta transversal for oblíqua às paralelas, então quatro desses ângulos serão agudos e os outros quatro serão obtusos.

A classificação dos pares de ângulos dos cruzamentos dessas retas é tal que:

- os pares de ângulos $\begin{cases} x \text{ e } a \\ y \text{ e } b \\ z \text{ e } c \\ w \text{ e } d \end{cases}$ são denominados **correspondentes.**
- os pares de ângulos $\begin{cases} a \text{ e } z \\ b \text{ e } w \end{cases}$ recebem o nome de **alternos internos.**
- os pares de ângulos $\begin{cases} c \text{ e } x \\ d \text{ e } y \end{cases}$ são chamados **alternos externos.**
- os pares de ângulos $\begin{cases} a \text{ e } w \\ b \text{ e } z \end{cases}$ são denominados **colaterais internos.**
- os pares de ângulos $\begin{cases} c \text{ e } y \\ d \text{ e } x \end{cases}$ recebem o nome de **colaterais externos.**

Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

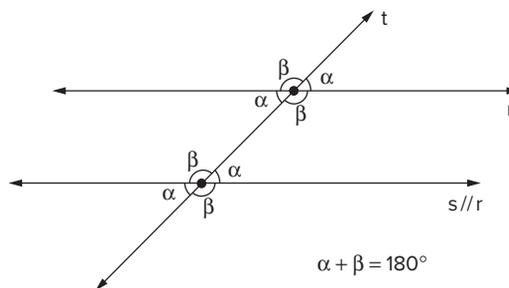
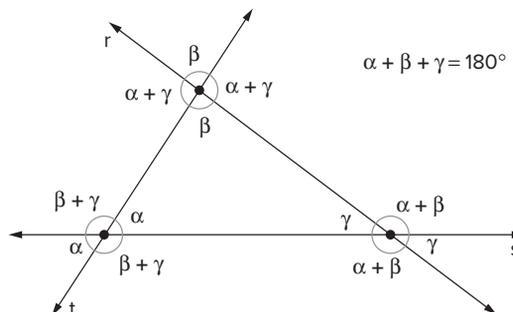
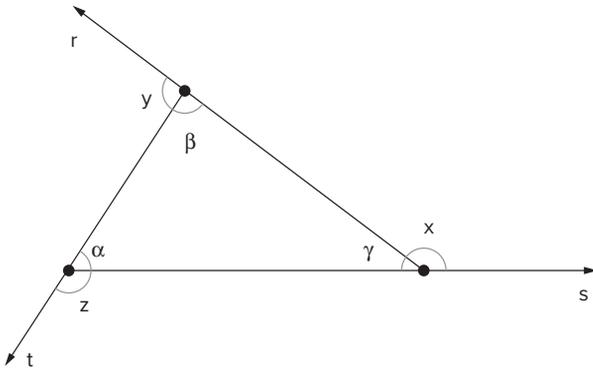
1 Ângulos correspondentes terão mesma medida Exemplo: $x = a$

2 Ângulos alternos internos possuirão a mesma medida Exemplo: $z = a$

3 Ângulos alternos externos também apresentarão a mesma medida Exemplo: $y = d$

4 Ângulos colaterais internos terão medidas suplemen tares Exemplo: $a + w = 180°$

5 Ângulos colaterais externos também possuirão medi das suplementares. Exemplo: $x + d = 180°$

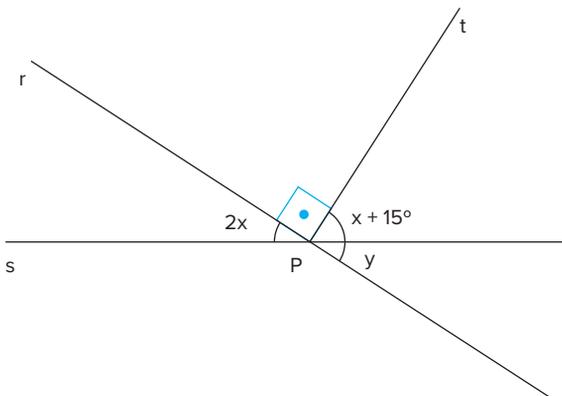
De modo mais prático, é correto afirmar que, se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal oblíqua, então, entre os oito ângulos determinados, há apenas duas medidas suplementares.

Três retas concorrentes duas a duas em pontos distintos determinam doze ângulos que dividem o plano em sete regiões distintas, das quais seis são abertas e uma é fechada. A figura determinada pela região fechada é chamada de triângulo por conter exatamente três ângulos. Todos os demais ângulos visíveis nesta figura estão situados em alguma região exterior ao triângulo. Algumas dessas regiões convexas têm medidas iguais às dos ângulos do triângulo, outras têm medidas iguais à soma das medidas de dois ângulos do triângulo.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, então, prolongando qualquer lado de um triângulo, obtemos um ângulo externo cuja medida é igual à soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes no triângulo.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha + \gamma \\ z = \beta + \gamma \end{cases}$$

Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

1 A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°

2 Cada ângulo externo de um triângulo mede a soma dos ângulos internos não adjacentes

Exercícios resolvidos

5 Na figura, as retas r e s interceptam-se no ponto P, origem da semirreta t Sabendo que t é perpendicular à r, determine x e y.

Resolução:

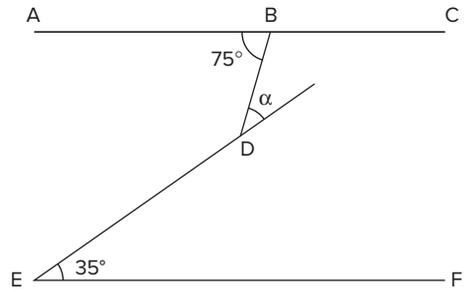
Os ângulos de medidas y e (x + 15°) são complementares Portanto: $y + x + 15° = 90°$

Os ângulos de medidas 2x e y são opostos pelo vértice, logo: $2x = y$

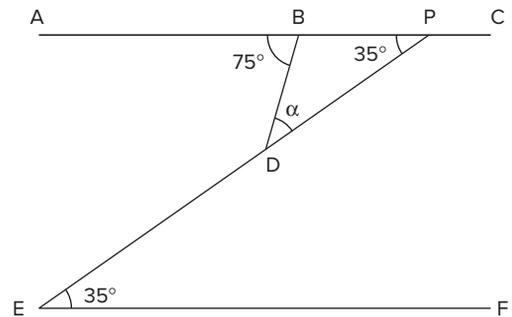
Assim, substituindo y na primeira equação, temos:

$$2x + x + 15° = 90°$$
$$3x = 75°$$
$$x = 25°$$

Então, $y = 2 \cdot 25° = 50°$.

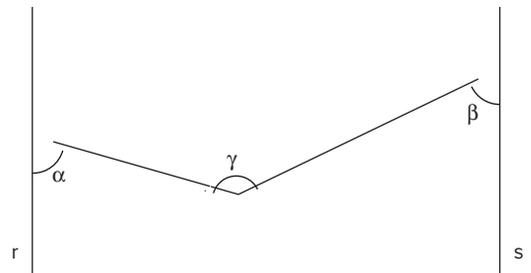
6 Na figura, se as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são paralelas, qual deve ser o valor do ângulo α formado pelo segmento $\overline{BD}$ e pela semirreta $\overrightarrow{ED}$?

A 10°
B 20°
C 30°
D 40°
E 50°

Resolução:

De acordo com o segundo postulado da Geometria Euclidiana, podemos prolongar a reta $\overleftrightarrow{ED}$ até que ela intercepte a reta $\overleftrightarrow{AC}$ em um ponto P.

Como as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são paralelas, os ângulos al ternos internos de vértices E e P têm mesma medida, que é de 35° Como o ângulo com 75° no vértice B é um ângulo externo do triângulo PBD, temos:

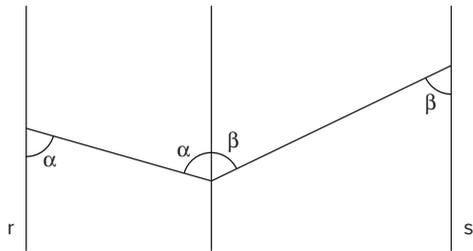
$$\alpha + 35° = 75° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 40°$$

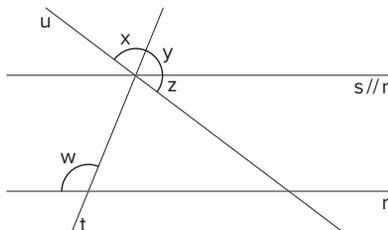
Alternativa: D.

7 Se as retas r e s são paralelas, e os ângulos α e β medem, respectivamente, 75° e 65°, quanto mede o ângulo γ?

A 140°
B 135°
C 125°
D 120°
E 90°

FRENTE 3

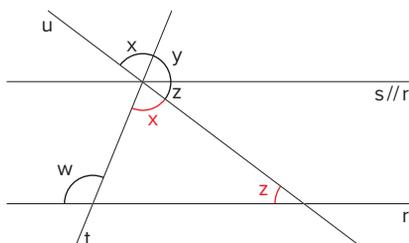
Resolução:

De acordo com o quinto postulado da Geometria Euclidiana, por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela à reta dada. Assim, pelo vértice do ângulo γ, podemos traçar uma reta que seja paralela às retas r e s.

Depois de traçada essa paralela, o ângulo γ fica dividido em dois outros ângulos que são alternos internos dos ângulos α e β.
Portanto, $\gamma = \alpha + \beta = 75° + 65° = 140°$.
Alternativa: A.

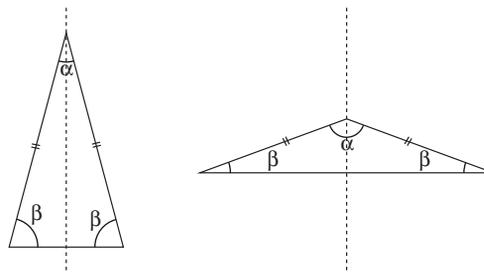
8 A figura a seguir ilustra a posição relativa de quatro ruas de um bairro da capital de São Paulo. Neste esquema, vemos que as ruas representadas pelas retas r e s são paralelas e que s, t e u se cruzam em um mesmo local de modo que as seis esquinas desse cruzamento tenham a forma de ângulos agudos, cujas medidas são expressas por x, y e z, como mostra a figura.

Assim, sendo w a medida do ângulo obtuso de uma das esquinas do cruzamento entre as ruas representadas pelas retas t e r, pode-se afirmar que:

A $w = x + y + z$
B $w = x + y$
C $w = x + z$
D $w = y + z$
E $w = x + y - z$

Resolução:

Observando que, entre os ângulos internos do triângulo determinado pelas retas que representam as ruas r, t e u, temos um que é oposto pelo vértice ao de medida x e outro que é alterno interno ao de medida z, como mostra a figura.

Portanto, do teorema do ângulo externo de um triângulo, obtemos $w = x + z$.
Alternativa: C.

Sobre os ângulos internos de um triângulo, também é interessante observar que o ângulo de maior medida sempre fica oposto ao lado de maior comprimento e que o ângulo de menor medida sempre fica oposto ao lado de menor comprimento.

Assim, se não houver o maior ângulo, então não existirá maior lado e, se não houver o menor ângulo, também não existirá o menor lado.

Os triângulos com essas características possuem, além de dois ângulos de mesma medida que ficam opostos aos dois lados de mesmo comprimento, um eixo de simetria de reflexão e recebem o nome de **isósceles**.

Em geral, o lado de um triângulo isósceles que possui comprimento diferente dos demais é denominado **base** do triângulo. Assim, podemos afirmar que o eixo de simetria desse tipo de triângulo é a reta mediatriz de sua base.

Alguns triângulos podem até ter os três ângulos de mesma medida. Nesse caso, a medida desses ângulos será de 60° e todos os lados do triângulo terão o mesmo comprimento. Esses triângulos possuem três eixos de simetria e são denominados equiláteros.

Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

1. Os ângulos da base de um triângulo isósceles têm a mesma medida
2 Os três ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°

A classificação dos triângulos pode ser feita de duas maneiras distintas. Quanto às medidas dos ângulos, um triângulo pode ser:

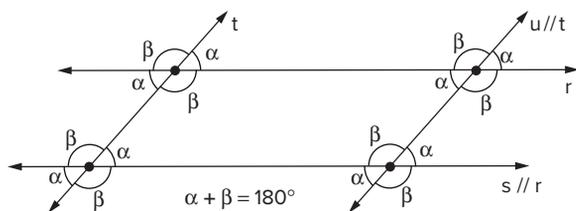
- **Acutângulo:** quando todos os seus ângulos forem agudos.
- **Retângulo:** quando um de seus ângulos for reto.
- **Obtusângulo:** quando um de seus ângulos for obtuso.

E, quanto às medidas dos lados, um triângulo pode ser:

- **Escaleno:** quando as medidas dos três lados forem diferentes.
- **Isósceles:** quando pelo menos duas das medidas coincidirem.
- **Equilátero:** quando todos os lados tiverem a mesma medida.

Agora, quando um par de retas paralelas intercepta outro par de retas paralelas, ocorrem quatro pontos de

cruzamento, que são vértices de um total de 16 ângulos. Nessa situação, ficam determinadas nove regiões no plano: oito abertas e apenas uma fechada, a qual tem a forma de um paralelogramo.

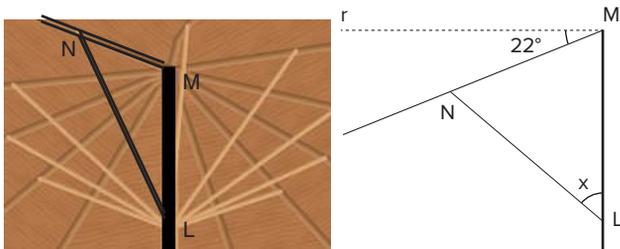
Os 16 ângulos poderão ser todos retos no caso de o paralelogramo também ser um retângulo ou poderão ser oito agudos e oito obtusos, como mostra a figura.

Como os lados opostos de um paralelogramo apresentam simetria de translação, além de serem paralelos, eles têm o mesmo comprimento.

Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

1 Os lados opostos de um paralelogramo apresentam o mesmo comprimento.

2. Os ângulos internos opostos de um paralelogramo têm a mesma medida

Exercícios resolvidos

9 As figuras a seguir mostram o sistema de sustentação do teto de um quiosque circular, em que se pode observar a composição de diversas estruturas triangulares, como o triângulo LMN, cujo lado $\overline{ML}$ é vertical

Assim, de acordo com a figura e sabendo que a inclinação relativa entre as ripas de sustentação do teto e a linha horizontal r é de 22°, calcule a medida x do ângulo interno de vértice L do triângulo LMN se:

a) for isósceles, com LM = LN.

b) for isósceles, mas com LM = MN

Resolução:

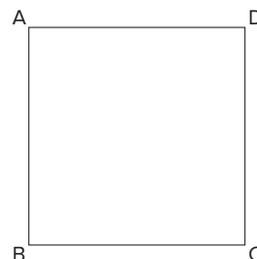
a) Como r é perpendicular a $\overline{ML}$, o ângulo interno de vértice M do triângulo mede: 90° 22° = 68°. Como o triângulo MLN é isósceles com LM = LN, os ângulos internos de vértices M e N têm a mesma medida de 68° Portanto, no triângulo LMN:

$$x + 68° + 68° = 180°$$
$$x = 44°$$

b) Assim como no item anterior, o ângulo interno de vértice M do triângulo deve medir 68°

Como o triângulo MLN é isósceles com LM = MN, os ângulos internos de vértices L e N têm a mesma medida indicada por x na figura. Logo, nesse caso, no triângulo LMN:

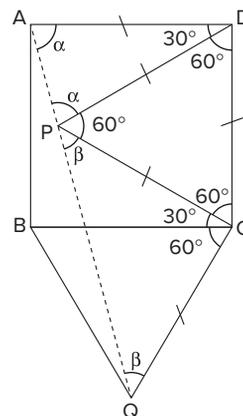
$$x + x + 68° = 180°$$
$$x = 56°$$

10 A figura a seguir representa um quadrado ABCD de lado 1.

Considere o ponto P na região interior desse quadrado tal que PC = PD = 1 e um ponto Q na região exterior desse quadrado tal que QC = QB = 1

a) Calcule as medidas dos ângulos $A\hat{D}P$ e $C\hat{Q}P$.

b) Prove que os pontos A, P e Q pertencem a uma mesma reta.

Resolução:

a) Do enunciado, obtemos a seguinte figura, em que os triângulos CDP e BCQ são equiláteros e, portanto, têm todos os seus ângulos internos me dindo 60°

Como os ângulos do quadrado são todos retos, os ângulos $A\hat{D}P$ e $B\hat{C}P$ medem 90° – 60° = 30° cada um.

Como os lados do quadrado e dos triângulos equiláteros são todos unitários, os triângulos APD e PCQ são ambos isósceles, com AD = PD e PC = CQ. Sendo α a medida dos ângulos congruentes do triângulo isósceles APD, temos:

$$\alpha + \alpha + 30° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 75°$$

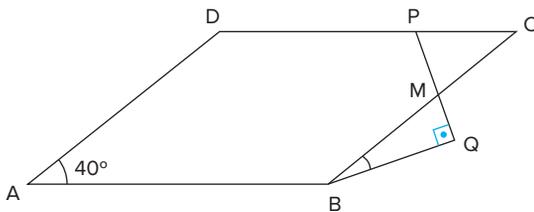
Sendo β a medida dos ângulos congruentes do triângulo isósceles PCQ, encontramos:

$$\beta + \beta + (30° + 60°) = 180° \Leftrightarrow \beta = 45°$$

b) Como o ângulo $C\hat{P}D$ mede 60°, pois também é ângulo interno de um triângulo equilátero, temos que a medida do ângulo $A\hat{P}Q$ é igual a:

$$\alpha + 60° + \beta = 75° + 60° + 45° = 180°$$

Por se tratar de um ângulo raso, podemos concluir que os pontos A, P e Q são colineares, ou seja, pertencem a uma mesma reta.

11 Na figura a seguir, ABCD é um paralelogramo de ângulo agudo $\hat{A}$ = 40°, em que M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e P é um ponto do lado $\overline{CD}$ tal que CP = CM

Se $\overline{BQ}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PM}$, então o ângulo $M\hat{B}Q$ mede:

A 10°
B 12°
C 15°
D 18°
E 20°

Resolução:

Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, portanto C = 40°.
Como o triângulo CMP é isósceles com CP = CM, os demais ângulos internos do triângulo medem:

$$(180° \quad 40°) : 2 = 70°$$

Então, o ângulo interno de vértice M do triângulo BMQ também mede 70° (são opostos pelo vértice). Assim, como Q é vértice de um ângulo reto, sendo x a medida do ângulo $M\hat{B}Q$, temos:

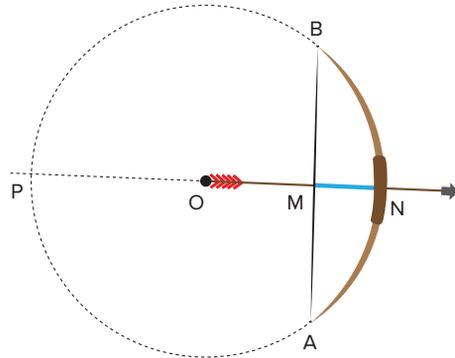
$$x + 90° + 70° = 180°$$
$$x = 20°$$

Alternativa: E.

Círculos e circunferências

No estudo da Geometria Euclidiana, os termos “círculo” e “circunferência” não são nomes da mesma figura. As **circunferências** são figuras formadas pelos pontos de um plano que apresentam uma mesma distância **r (raio)** de um ponto fixo **O** desse plano. Esse ponto fixo é denominado **centro** da circunferência.

Já os **círculos** são as figuras formadas pela reunião dos pontos de uma circunferência com os pontos do interior desta. Assim, é correto afirmar que circunferência é o nome dado ao contorno do círculo. Dessa forma, podemos dizer que as circunferências possuem comprimento e que os círculos têm área

A nomenclatura de alguns elementos da circunferência remete a um dos mais antigos instrumentos de caça: o arco que atira flechas. Acompanhe.

Todos os trechos de circunferência limitados por dois de seus pontos são denominados **arcos**. Os segmentos de reta que unem as extremidades desses arcos são chamados de **cordas**; já os que unem os pontos médios de um arco e uma corda de mesmas extremidades recebem o nome de **flechas**. Quando as cordas passam pelo centro da circunferência, elas são denominadas **diâmetros**. Assim, na figura:

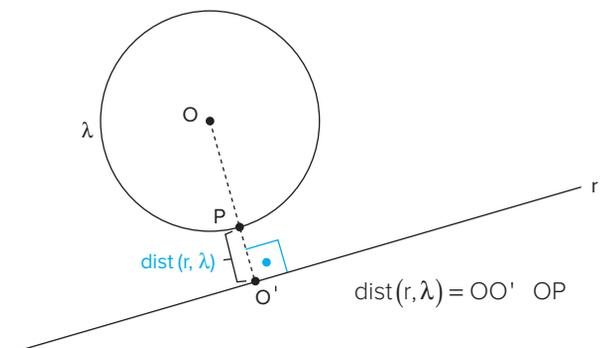
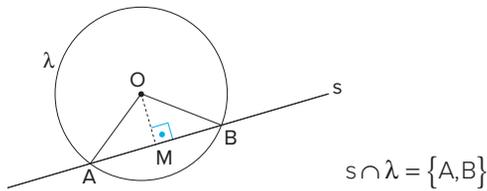
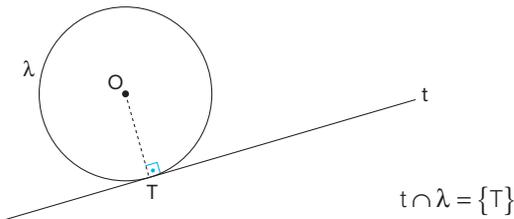
- M é o ponto médio da corda $\overline{AB}$
- N é o ponto médio do menor arco $\overset{\frown}{AB}$
- P é o ponto médio do maior arco $\overset{\frown}{AB}$
- $\overline{PN}$ é um diâmetro da circunferência
- $\overline{MN}$ é uma flecha

Uma das mais importantes relações que podem ser observadas em uma circunferência é que o quociente entre o seu comprimento e o seu diâmetro é constante O resul tado dessa divisão é o número irracional que indicamos pela letra π (pi). Seu valor é bem próximo de 3,14, ou $\frac{22}{7}$

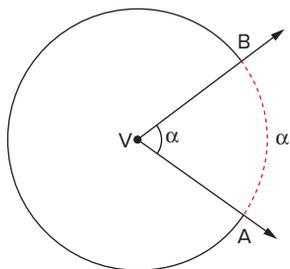
Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

1 O comprimento de uma circunferência de raio r é dado pela expressão $C = 2\pi r$
2 A área de um círculo de raio r é dada pela expressão $A = \pi r^2$

A identificação correta de um ângulo reto permite a aplicação do teorema de Pitágoras e das razões trigonométricas na resolução de um problema. Existem três possíveis posições relativas entre retas e circunferências. Observe que há importantes ângulos retos nesses casos:

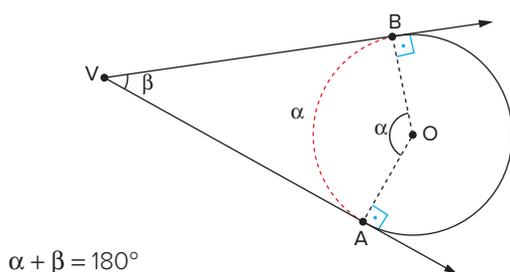
- Uma reta **r** é exterior a uma circunferência λ quando não houver ponto que seja comum a essas figuras

- Uma reta **s** é secante a uma circunferência λ quando houver dois pontos que sejam comuns a essas figuras.

- Uma reta **t** é tangente a uma circunferência λ quando houver um único ponto que seja comum a essas figuras.

São muitas as posições relativas entre ângulos e cir cunferências Nessas situações, é importante conhecermos determinadas relações entre as medidas dos arcos e os ângulos envolvidos. Acompanhe a seguir.

Ângulo central

Os ângulos cujos vértices coincidem com o centro de uma circunferência são denominados centrais

Ângulo central $A\hat{V}B$.

As medidas desses ângulos são, por definição, as mesmas que as dos arcos determinados na circunferência. Essa relação não depende do comprimento do raio da circunferência. Assim, na figura, α representa tanto a medida do ângulo $A\hat{V}B$, tomada em sua região convexa, quanto a do menor arco $\overset{\frown}{AB}$.

Ângulo circunscrito

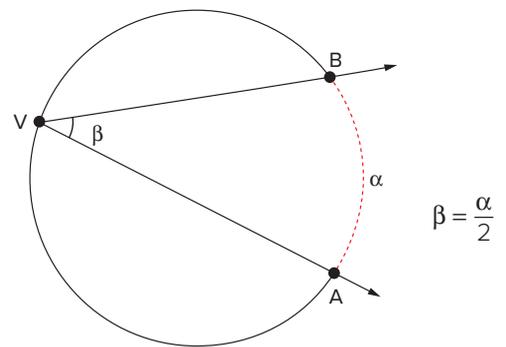
Ângulos cujos lados tangenciam uma mesma circunferência recebem o nome de circunscritos.

É importante observar que a reta determinada pelos pontos V e O é eixo de simetria dessa figura. Assim, podemos concluir que $\overrightarrow{VO}$ é bissetriz dos ângulos α e β, que os triângulos AOV e BOV são congruentes e, portanto, que VA = VB.

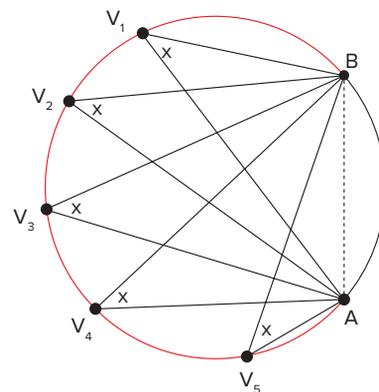
Teoremas:

1 As medidas de um ângulo circunscrito e do menor arco que ele determina na circunferência somam 180°

2. O vértice de um ângulo circunscrito equidista dos pontos de tangência de seus lados com a circunfe rência.

Ângulo inscrito

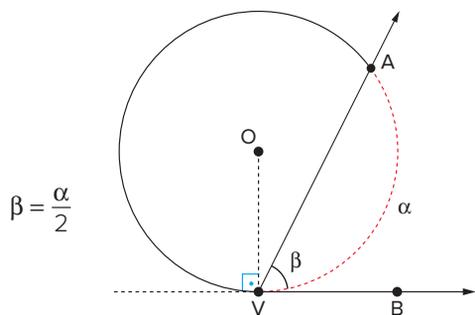
Os ângulos cujos vértices são pontos de uma circunfe rência e cujos lados são secantes à mesma circunferência são chamados de inscritos.

Teorema: A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco da circunferência contido na região convexa do ângulo.

É importante observarmos que esse teorema garante a igualdade das medidas de todos os ângulos inscritos que determinam um mesmo arco em suas regiões convexas Essa particularidade define um lugar geométrico denomi nado arco capaz, que é formado pelo restante dos pontos da circunferência, ou seja, por todos aqueles situados nas regiões côncavas dos ângulos.

Ângulos inscritos do arco $\overset{\frown}{AB}$.

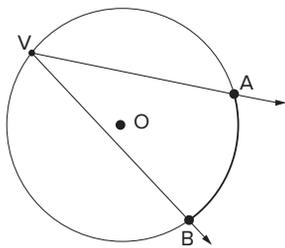
Ângulo semi inscrito

Ângulos de segmentos circulares, ou semi-inscritos, são aqueles cujos vértices são pontos da circunferência e

FRENTE 3

cujos lados são: um tangente e o outro secante à mesma circunferência.

Teorema: A medida de um ângulo semi inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco da circunferência contido na região convexa do ângulo.

Exercício resolvido

12 Qual alternativa apresenta o valor mais próximo do comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AB}$ determinado pelo ângulo $A\hat{V}B$, de 35°, inscrito na circunferência de centro O e raio 9 cm?
Utilize a aproximação: $\pi \cong \frac{22}{7}$.

A 7 cm.
B 8 cm.
C 9 cm.
D 10 cm.
E 11 cm.

Resolução:

Como V é ângulo inscrito na circunferência, o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 2 35° = 70°

Como o comprimento total dessa circunferência é de $2 \cdot \pi \cdot 9$ cm $= 18\pi$ cm, sendo x o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AB}$ dessa circunferência, aplicando a regra de três, temos:

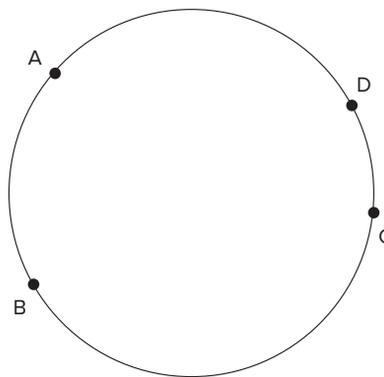
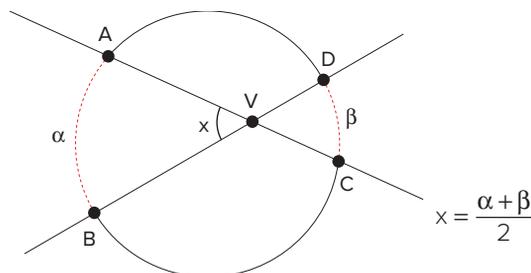
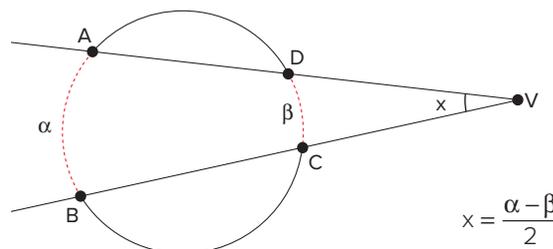
$$18\pi \text{ cm} \text{ ---- } 360°$$
$$x \text{ cm} \text{ ---- } 70°$$

Portanto:

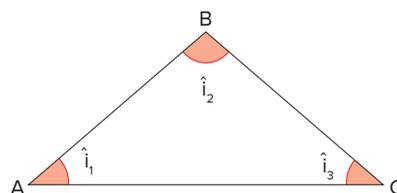
$$360° \cdot x = 70° \cdot 18\pi \Leftrightarrow 360° \cdot x = 70° \cdot 18 \cdot \frac{22}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 360° \cdot x = 10° \cdot 18 \cdot 22 \Rightarrow x \cong \frac{10° \cdot 18 \cdot 22}{360°} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cong 11 \text{ cm.}$$

Alternativa: E.

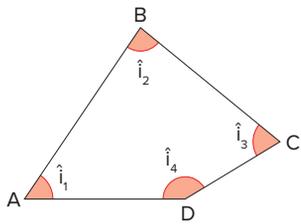
Há mais duas posições relativas entre ângulos e circunferências nas quais é possível relacionar as medidas dos ângulos e as dos arcos determinados na circunferência.

Para observá-las, considere os pontos A, B, C e D de uma circunferência, tomados no sentido anti-horário.

Assim, ou as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ se interceptam em um ponto da região interior da circunferência:

Ou as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ se interceptam em um ponto da região exterior à circunferência:

Polígonos

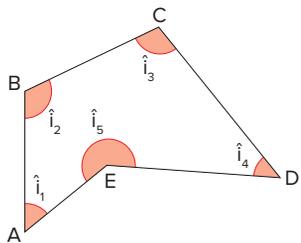
Polígono é o nome dado à figura geométrica fechada cercada apenas por segmentos de reta. Todo polígono possui o mesmo número de lados, de vértices e de ângulos internos

Exemplo 5
Um triângulo ABC possui:

- 3 vértices: A, B e C.
- 3 lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$
- 3 ângulos internos: $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$ e $\hat{i}_3$.

Exemplo 6

Um quadrilátero ABCD apresenta:

- 4 vértices: A, B, C e D.
- 4 lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$
- 4 ângulos internos: $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$, $\hat{i}_3$ e $\hat{i}_4$

Exemplo 7

Um pentágono ABCDE tem:

- 5 vértices: A, B, C, D e E
- 5 lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{AE}$
- 5 ângulos internos: $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$, $\hat{i}_3$, $\hat{i}_4$ e $\hat{i}_5$.

Esses números estabelecem a principal nomenclatura dos polígonos

Número de vértices	Nome do polígono
$n = 3$	Triângulo
$n = 4$	Quadrilátero
$n = 5$	Pentágono
$n = 6$	Hexágono
$n = 7$	Heptágono
$n = 8$	Octógono
$n = 9$	Eneágono
$n = 10$	Decágono
$n = 11$	Undecágono
$n = 12$	Dodecágono
$n = 13$	Tridecágono
$n = 14$	Tetradecágono
$n = 15$	Pentadecágono
⋮	⋮
$n = 20$	Icoságono

Qualquer segmento de reta que une dois vértices de um polígono e que não é um de seus lados é chamado de **diagonal** do polígono. Observe, nas figuras anteriores, que o triângulo ABC não possui diagonal, que o quadrilátero ABCD tem duas diagonais ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$) e que o pentágono AB CDE apresenta cinco diagonais ($\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$) De maneira geral, cada um dos **n** vértices de um polígono é extremidade de exatamente **n 3** diagonais

Então, como cada diagonal possui duas extremidades em vértices distintos do polígono, o princípio multiplicativo da contagem permite afirmarmos que o produto n·(n 3) equivale ao dobro do número de diagonais de um polígono com n vértices.

Assim, sendo **d** o número de diagonais de um polígono de n vértices, temos:

$$d = \frac{n \cdot (n \quad 3)}{2}$$

Exercício resolvido

13 Quantos são os lados de um polígono que possui exa tamente 35 diagonais?

A 7 **B** 10 **C** 12 **D** 14 **E** 17

Resolução:

Como d = 35, sendo n o número de lados desse polí- gono, temos:

$\frac{n \cdot (n \quad 3)}{2} = 35$

$n \cdot (n - 3) = 70$

$n^2 \quad 3n \quad 70 \quad 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-70) = 9 + 280 = 289$

$$n = \frac{-(-3) \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 17}{2} = \begin{cases} n_1 = \frac{20}{2} = 10 \\ n_2 = \frac{-14}{2} = -7 \end{cases}$$

Como n é positivo, concluímos que o polígono tem 10 lados.

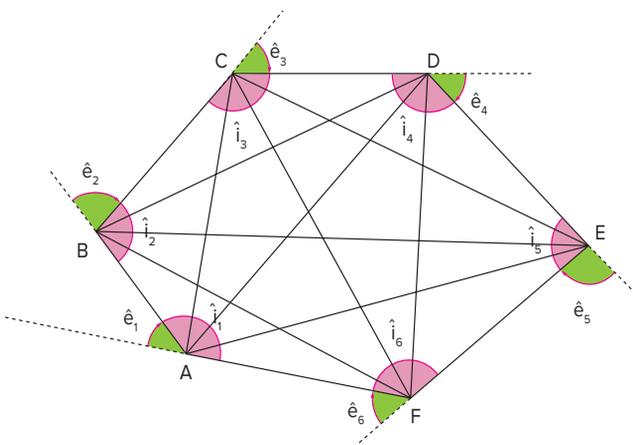
Alternativa: B.

Se um polígono tiver pelo menos uma diagonal situada em sua região exterior, será denominado côncavo, e as regiões onde as diagonais exteriores ficam situadas são chamadas de concavidades do polígono O pentágono ABCDE apresentado nos exemplos é côncavo, pois sua diagonal $\overline{AD}$ passa pela região exterior a ele

Se um polígono não possuir concavidade, receberá o nome de convexo. Assim, todos os triângulos são convexos, pois não têm diagonais, e o quadrilátero ABCD apresentado nos exemplos anteriores é convexo, pois suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ estão contidas na região interior desse polígono.

De modo geral, se um polígono é convexo, então:

- todas as diagonais estão situadas em sua região interior.
- todos os ângulos internos têm medida inferior a 180° (0° < i < 180°).
- os ângulos internos e externos com o mesmo vértice têm medidas suplementares, ou seja, i + e = 180°.

Observe essas particularidades na figura do hexágono convexo a seguir:

Indicamos com $\mathbf{S_i}$ a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono e com $\mathbf{S_e}$ a soma das medidas de seus ângulos externos. Assim:

$$S_i = i_1 + i_2 + i_3 + ... + i_n$$

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_n$$

Como cada ângulo externo de um polígono convexo representa um desvio angular positivo na linha que contorna o polígono, temos que $\mathbf{S_e}$ é constante e vale 360°.

$$\mathbf{S_e} = 360°$$

Então, observando que $\mathbf{i + e = 180°}$ em cada vértice de um polígono convexo, obtemos

$$\begin{array}{rl} i_1 + e_1 = 180° & + \\ i_2 + e_2 = 180° & + \\ i_3 + e_3 = 180° & + \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & + \\ i_n + e_n = 180° & \\ \hline S_i + S_e = 180° \cdot n & \end{array}$$

Substituindo $\mathbf{S_e}$ por 360°, encontramos uma expressão para a soma $\mathbf{S_i}$ de acordo com o número de vértices do polígono.

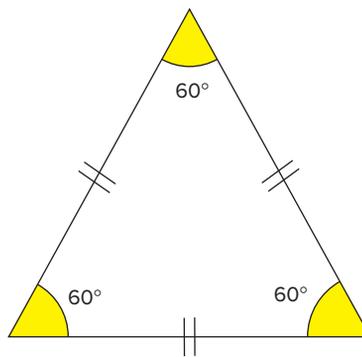
$$S_i + 360° = n \cdot 180° \iff S_i = n \cdot 180° - 360°$$

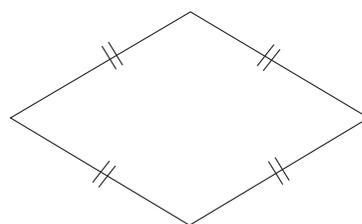
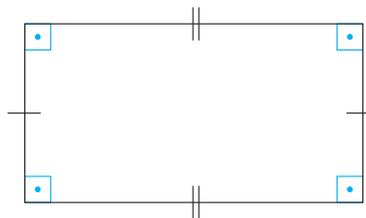
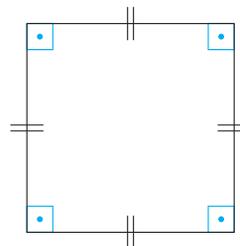
Fatorando essa função, chegamos à fórmula mais conhecida para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

$$S_i = (n \quad 2)\ 180°$$

Também podemos classificar os polígonos em relação aos seus lados e ângulos da seguinte maneira:

- **Equiláteros:** os lados apresentam o mesmo comprimento.
- **Equiângulos:** os ângulos internos têm a mesma medida.
- **Regulares:** se, e somente se, forem polígonos **equiláteros** e **equiângulos**.

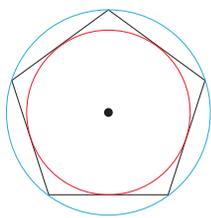
Uma particularidade dos triângulos é que, se eles forem equiláteros, também serão equiângulos e, portanto, regulares Isso não acontece com os polígonos com mais de três vértices, como os quadriláteros e os pentágonos. Assim, podemos afirmar que todos os triângulos equiláteros são regulares.

Quanto aos polígonos quadriláteros, a nomenclatura específica é:

- **Losangos:** são os equiláteros

- **Retângulos:** são os equiângulos.

- **Quadrados:** são os regulares.

Os polígonos com mais do que quatro vértices, como os pentágonos e os hexágonos, também podem ser equiláteros, equiângulos e regulares, mas, para eles, não há uma nomenclatura específica

Se um polígono é equiângulo ou regular, então as medidas de seus ângulos internos e externos podem ser expressas em função do número n de vértices do polígono da seguinte maneira:

- Medida de cada ângulo interno: $i = \frac{(n \cdot 2)\ 180°}{n}$.
- Medida de cada ângulo externo: $e = \frac{360°}{n}$

Além do fato de os polígonos regulares serem tanto equiláteros quanto equiângulos, é importante observarmos

que todo polígono regular é inscritível e circunscritível em relação a circunferências de mesmo centro.

Exercícios resolvidos

14 Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130°, e os demais ângulos internos medem 128° O número de lados do polígono é:

A 6 **B** 7 **C** 13 **D** 16 **E** 17

Resolução:

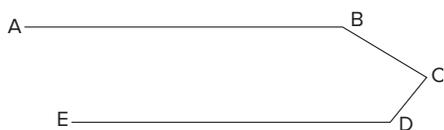
Sendo n o número de lados desse polígono, do enunciado temos que:

$$Si = 2 \cdot 130° + (n \quad 2) \cdot 128°$$

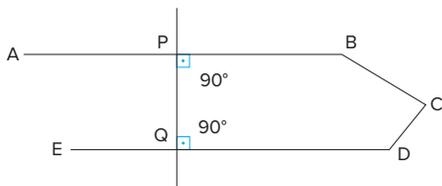
Então, como $Si = (n - 2) \cdot 180°$ em todo polígono convexo, encontramos a equação:

$$(n - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 130° + (n - 2) \cdot 128°$$
$$180°n - 360° = 260° + 128°n - 256°$$
$$180°n - 128°n = 260° - 256° + 360°$$
$$52°n = 364°$$
$$n = 7$$

Alternativa: B

15 Na figura a seguir, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são paralelos. Determine o valor de x sabendo que as medidas dos ângulos de vértices B, C e D são, respectivamente, expressas por: $2x + 10°$, $x + 10°$ e $2x - 10°$.

A 30° **C** 50° **E** 70°
B 40° **D** 60°

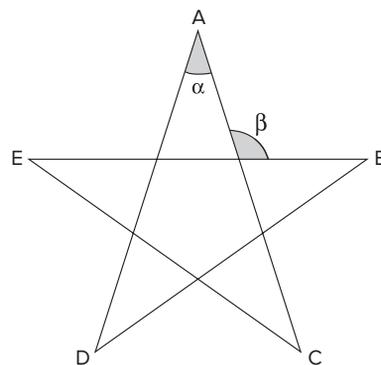
Resolução:

De acordo com o quarto postulado da Geometria Euclidiana, traçando uma reta perpendicular a uma reta dada, determinamos quatro ângulos congruentes, todos medindo 90°. Portanto, traçando uma perpendicular às retas paralelas $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, obtemos os pontos P e Q, que são vértices de oito ângulos retos.

Então, como os pontos P e Q determinam o pentágono convexo PBCDQ, temos que a soma dos ângulos internos desse pentágono é: $\hat{P} + \hat{Q} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = (n - 2) \cdot 180°$, com n = 5.

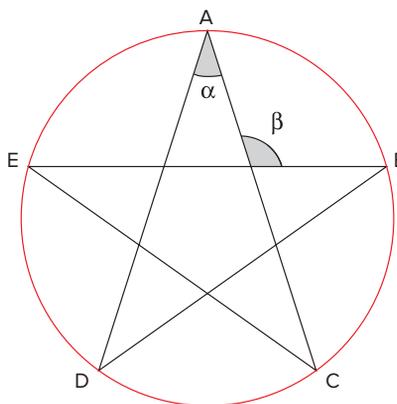
Portanto:

$90° + 90° + (2x + 10°) + (x + 10°) + (2x - 10°) =$
$= (5 - 2) \cdot 180°$
$190° + 5x = 540°$
$5x = 350°$
$x = 70°$

Alternativa E.

16 A figura apresenta um pentágono regular cujos lados foram prolongados para formar o polígono estrelado de ABCDE, que também é regular.

Determine as medidas α e β dos ângulos indicados na figura

Resolução:

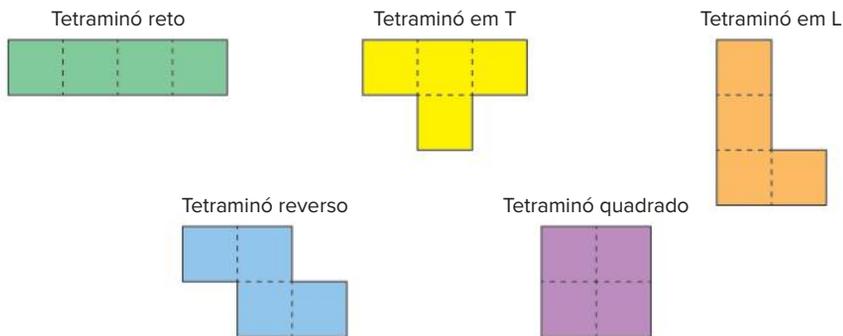
Como ABCDE é regular, há uma circunferência que passa por todos esses pontos.

Traçando essa circunferência, observamos que α é a medida de um ângulo nela inscrito. Portanto, como o menor arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 360° : 5 = 72°, temos que $\alpha = 72° : 2 = 36°$

Como o ângulo de medida β é oposto pelo vértice de um ângulo interno do pentágono regular, obtemos:

$$\beta = \frac{(5 \cdot \ 2) \cdot 180}{5} = \frac{540°}{5} = 108°$$

Revisando

1 Conhecidas como tetraminós, as formas geométricas a seguir são obtidas pela justaposição de quadrados congruentes. Os tetraminós contagiaram o mundo nas décadas de 1980 e 1990, quando incorporaram um jogo eletrônico chamado Tetris. Esse jogo foi inventado por dois professores e um aluno da Academia Russa de Ciências e ainda hoje é muito popular em todo o mundo.

Só há cinco tipos diferentes de tetraminós, e cada um deles é composto de exatamente quatro quadrados:

Identifique se há algum tipo de simetria de rotação (radial) e/ou reflexão (bilateral) em cada tetraminó. No caso de a figura apresentar simetria de reflexão, determine o número de eixos e, se a figura for invariante por rotações de menos do que 360° em torno de seu centro, identifique o menor ângulo possível para essas rotações

2 Considerando as definições dos quadriláteros a seguir, faça uma figura para representar cada um deles e indique as características relevantes de seus ângulos internos e suas diagonais

I Trapézio isósceles: quadrilátero que possui duas bases paralelas e cujos lados não paralelos têm a mesma medida

II Paralelogramo: quadrilátero que apresenta dois pares de lados paralelos

III Retângulo: quadrilátero em que dois lados adjacentes são sempre perpendiculares um ao outro.

IV Losango: quadrilátero cujos lados têm a mesma medida

V Quadrado: quadrilátero em que dois lados adjacentes são sempre perpendiculares um ao outro e que possui todos os lados com a mesma medida.

3 Um quadrilátero ABCD é tal que AB = AD, $AB < BC$ e BC = DC.

a) Esboce esse quadrilátero e prove que os ângulos internos de vértices B e D têm a mesma medida.

b) Trace as diagonais desse quadrilátero e indique as características relevantes destas.

c) Sendo E o ponto de interseção das diagonais desse quadrilátero, identifique todos os pares de triângulos congruentes apresentados pelo quadrilátero ABCD e suas diagonais.

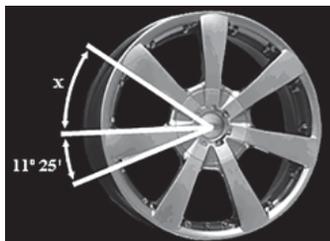
4 Encontre os complementos e os suplementos das seguintes medidas angulares:

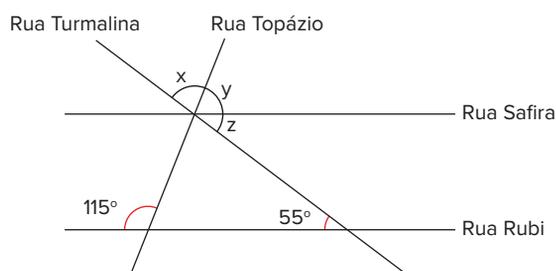
a) 60°

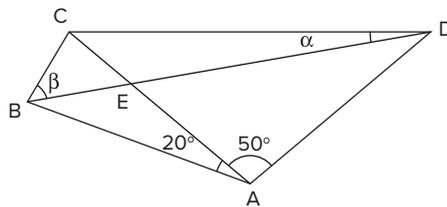
b) 38°

c) 22°30'

d) 8°45'12''

5 A figura a seguir apresenta uma roda automotiva de sete raios, que são, na verdade, setores circulares metálicos com ângulos centrais de 11°25', os quais fornecem sustentação para o aro exterior, eliminando, assim, uma quantidade considerável de metal, o que torna a roda bem mais leve do que as rodas comuns.

Encontre, em graus, minutos e segundos, a medida x do ângulo que compreende cada parte vazada desse modelo de roda.

6 A figura a seguir ilustra a posição relativa de quatro ruas retilíneas, que têm nomes de pedras preciosas A Rua Rubi é paralela à Rua Safira, e as Ruas Safira, Topázio e Turmalina se cruzam em um mesmo local, onde há seis esquinas em forma de ângulos agudos, de medidas x, y e z, como mostra o esquema

Sabendo que o ângulo obtuso determinado na esquina da Rua Rubi com a Topázio mede 115° e que o ângulo agudo determinado na esquina da Rua Rubi com a Turmalina mede 55°, calcule as medidas x, y e z dos ângulos indicados no esquema, justificando sua resposta

7 Na figura a seguir, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam no ponto E.

Sabendo que AB = AC = AD, med(BÂC) = 20° e med(CÂD) = 50°, determine:

a) Há quantos triângulos na figura?

b) Quais desses triângulos são isósceles? (Indique quais são as bases de cada um.)

c) Quanto vale, em graus, a soma das medidas α e β dos ângulos indicados na figura?

8 Um retângulo ABCD é tal que seus lados menores $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ medem 3 cm Sabendo que os ângulos obtusos formados pelas diagonais desse retângulo medem 120°, considere a circunferência que passa por todos os vértices desse retângulo e determine:

a) o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{CD}$ dessa circunferência

b) a área da região interior à circunferência e exterior ao retângulo

FRENTE 3

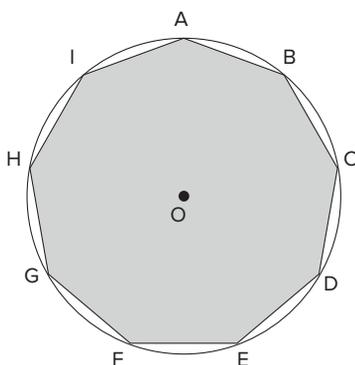
9 Considere o pentágono equilátero convexo ABCDE cujos ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos, os ângulos internos $\hat{C}$ e $\hat{E}$ são congruentes e o ângulo interno $\hat{D}$ mede 60° Determine as medidas:

a) dos ângulos internos de vértices C e E

b) do ângulo formado pela diagonal $\overline{AD}$ e o lado $\overline{AE}$.

c) do ângulo formado pela diagonal $\overline{AD}$ e o lado $\overline{AB}$.

d) do ângulo formado pelas diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$.

10 A figura a seguir apresenta um eneágono regular inscrito em uma circunferência de centro O.

Responda às seguintes perguntas:

a) Qual o valor da soma dos ângulos externos?

b) Quanto mede cada ângulo externo?

c) Qual o valor da soma dos ângulos internos?

d) Quanto mede cada ângulo interno?

e) Quanto mede o ângulo $A\hat{O}D$?

f) Quanto mede o ângulo $C\hat{A}D$?

g) Quanto mede o ângulo formado pelo prolongamento dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do polígono?

h) Quantas diagonais esse polígono possui?

i) Qual é a medida dos ângulos agudos formados pelas diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{BG}$?

j) Qual é a medida dos ângulos agudos formados pelos prolongamentos do lado $\overline{BC}$ e da diagonal $\overline{GD}$ do polígono?

Exercícios propostos

1 Fuvest 2016 Os pontos A, B e C são colineares, AB = 5, BC = 2 e B está entre A e C Os pontos C e D pertencem a uma circunferência com centro em A. Traça-se uma reta r perpendicular ao segmento $\overline{BD}$ passando pelo seu ponto médio Chama-se de P a interseção de r com $\overline{AD}$. Então, AP + BP vale:

A 4
B 5
C 6
D 7
E 8

2 Um topógrafo precisa saber as medidas dos três lados e dos três ângulos internos de um terreno triangular extremamente acidentado. Em razão disso, não conseguirá, em um único dia, precisar mais do que três dessas medidas. Entretanto, o topógrafo sabe que, em alguns casos, com apenas três dessas medidas, ele pode determinar as outras três usando seus conhecimentos de Geometria e, assim, concluir o serviço mais tarde em sua casa Considere que ele tenha as seguintes opções:

I Medir todos os ângulos
II. Medir todos os lados.
III Medir dois lados e um ângulo
IV. Medir dois ângulos e um lado.

Assinale a alternativa correta.

A A opção I é suficiente para concluir o serviço
B A opção II é a única suficiente para concluir o serviço.
C Quaisquer que sejam os lados e os ângulos medidos na opção III, será possível concluir o serviço.
D Quaisquer que sejam os lados e os ângulos medidos na opção IV, será possível concluir o serviço.
E As opções II e III são suficientes para concluir o serviço.

3 Enem 2013 Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

Figura original
A imagem que representa a nova figura será:

A
B
C
D
E
4 Enem PPL 2012 Um professor, ao fazer uma atividade de origami (dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, e D, ponto do lado $\overline{BC}$, indique a nova posição do vértice A do triângulo ABC.

Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos:

A CMA e CMB.
B CAD e ADB.
C NAM e NDM.
D CND e DMB.
E CND e NDM.

FRENTE 3

5 **Fatec 2017** Em um círculo recortado em papel-cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para montar uma roleta, conforme a Figura 1, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.

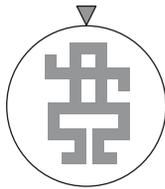
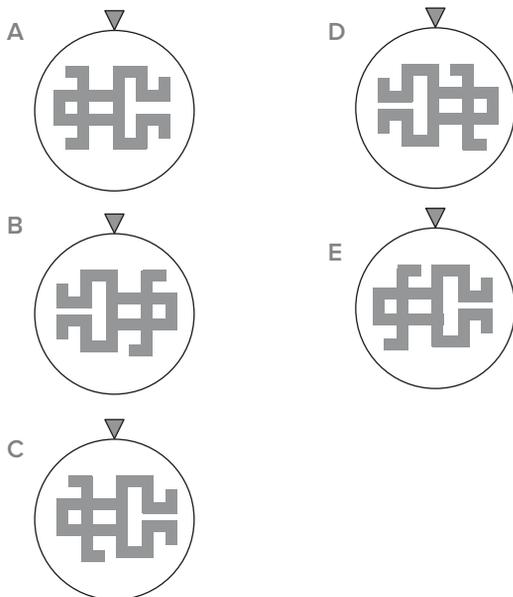



Figura 1

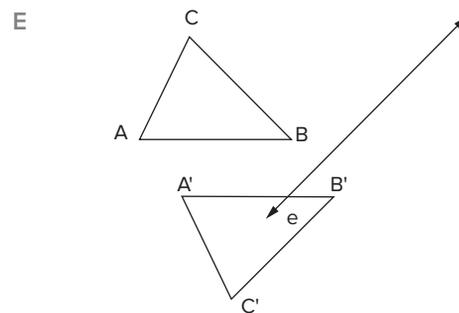
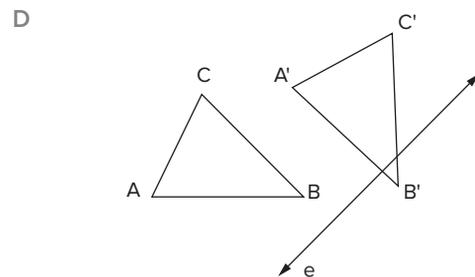
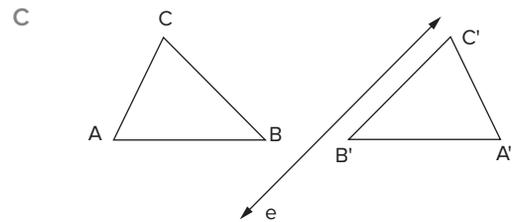
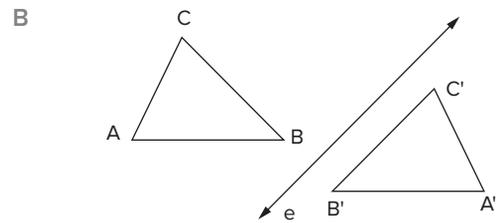
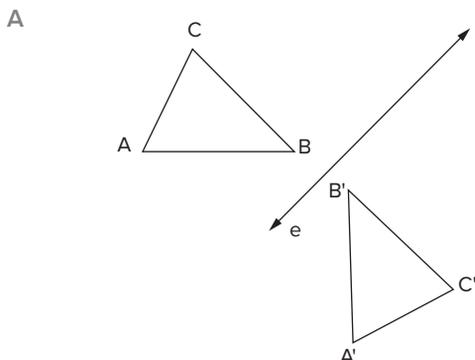
Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da Figura 1, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em:

6 **UPE 2016** Entre as alternativas a seguir, qual figura representa melhor o triângulo A'B'C', obtido por uma reflexão do triângulo ABC em relação ao eixo **e** seguida de uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do ponto B?

A

B

C

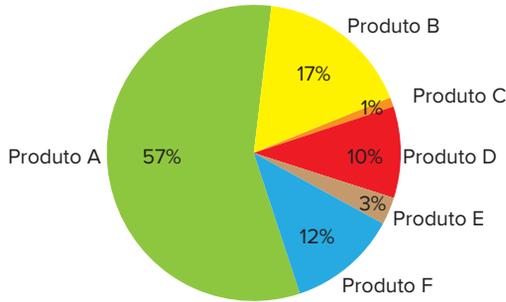
D

E

7 **Enem 2012** Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124°3'0" a leste do Meridiano de Greenwich. Dado: 1° equivale a 60' e 1' equivale a 60"

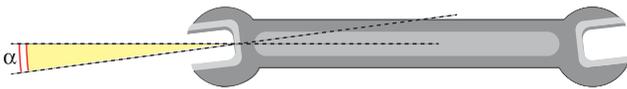
PAVARIN, G Galileu, fev. 2012 (Adapt)

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude da forma decimal é:

A 124,02°
B 124,05°
C 124,20°
D 124,30°
E 124,50°

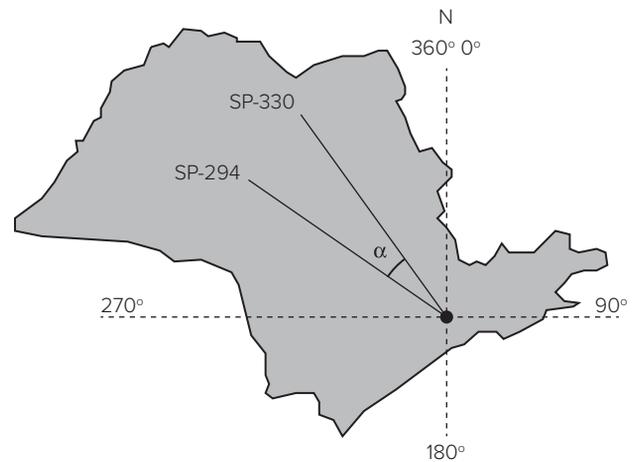
8 O gráfico de setores a seguir mostra como está dividido o faturamento atual de uma empresa de tecnologia pelos produtos oferecidos no mercado

Qual a medida, em graus, da região angular associada ao produto A?

A 205°12'
B 205°2'
C 185°20'
D 185°2'
E 25°12'

9 A chave fixa, também conhecida como chave de boca, é uma ferramenta bastante usada para apertar e desapertar porcas e parafusos. Para facilitar seu manuseio, o eixo de simetria da boca tem uma inclinação α em relação ao eixo de simetria de seu corpo, como mostra a figura a seguir.

Um fabricante de chaves fixas sabe que essa ferramenta atinge sua eficiência máxima quando a medida do ângulo α é tal que, subtraída de seu complemento, resulta na medida do ângulo interno de um triângulo equilátero. Então, para fabricar chaves fixas de eficiência máxima, esse fabricante deve fazer com que α tenha:

A 10°
B 15°
C 20°
D 25°
E 30°

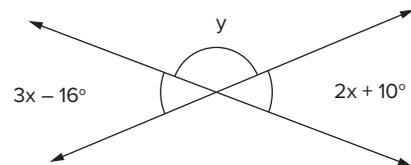
10 As rodovias brasileiras têm denominações diferentes umas das outras, principalmente as que são identificadas como federais, estaduais ou municipais. As rodovias estaduais radiais, por exemplo, são denominadas assim por partirem da capital do estado e seguirem para qualquer direção, conectando pontos importantes dentro do território. A nomenclatura das rodovias estaduais radiais no estado de São Paulo, por exemplo, é determinada pelo azimute aproximado de seu rumo a partir da capital do estado. O azimute é a inclinação relativa ao norte geográfico, dada em graus e no sentido horário.

As rodovias SP-294 e SP-330 têm inclinações aproximadas de 294° e 330° em relação ao norte geográfico, como indica a figura a seguir.

Considerando o exposto acerca dessas rodovias, in fere-se que o ângulo α determinado pelos seus rumos mede:

A 24°
B 26°
C 36°
D 44°
E 46°

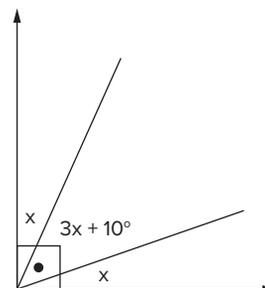
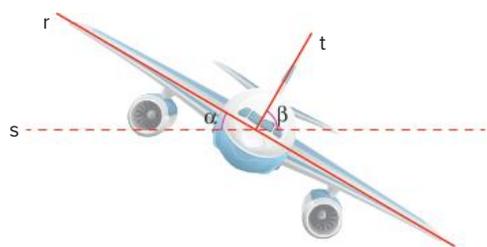
11 Considere um ângulo obtuso de medida α e dois ân gulos agudos de medidas β e γ. Se as medidas α e β são complementares e as medidas α e γ são suple mentares, então é correto afirmar que:

A $\gamma = \alpha \quad \beta$
B $\gamma = \alpha + 2\beta$
C $\beta = \alpha \quad \gamma$
D $\beta = \alpha + 2\gamma$
E $\alpha = \beta \quad 2\gamma$

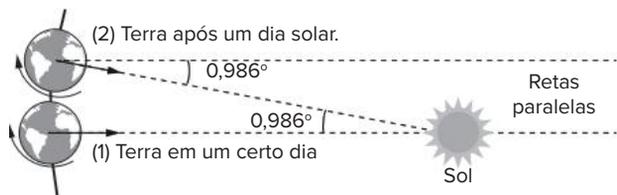
12 **UTFPR 2016** A medida do ângulo y na figura é:

A 62°
B 72°
C 108°
D 118°
E 154°

13 **UTFPR 2015** Calcule o valor de x, em graus, na figura:

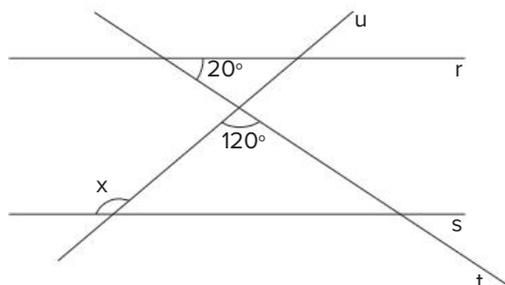
A 16
B 10
C 20
D 58
E 32

FRENTE 3

14 Observando o voo de um avião, pode-se perceber que seu leme fica em uma direção perpendicular às suas asas, mesmo quando estas não estão na horizontal, como mostra a figura a seguir.

Considere que a reta r, determinada pelas asas do avião, tenha uma inclinação de medida α em relação à linha s; e a semirreta t, determinada pelo leme do avião, tenha inclinação de medida β em relação à reta s, como mostra a figura anterior. Assim, se a inclinação β é 10° superior à inclinação α, pode-se concluir que:

A $\alpha = 20°$
B $\alpha = 30°$
C $\alpha = 40°$
D $\alpha = 50°$
E $\alpha = 60°$

15 Dia solar é o nome dado ao intervalo de tempo decorrido entre duas passagens sucessivas do Sol por um meridiano local qualquer. Considerando a órbita da Terra como circular, pode-se estimar que ela percorre, em sua órbita, um arco de 0,986° por dia. Observe a situação ilustrada na figura a seguir.

A respeito da posição relativa, os dois ângulos de 0,986° indicados na figura são:

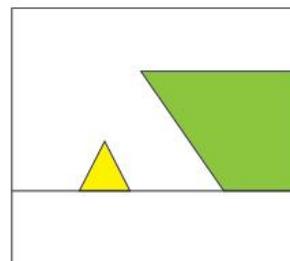
A alternos externos.
B alternos internos.
C correspondentes.
D colaterais internos.
E colaterais externos.

16 **IFPE 2012** Júlia começou a estudar Geometria na sua escola Com dúvida em um exercício passado pelo professor de Matemática, ela pediu ajuda ao seu tio O enunciado era: "As retas r e s são paralelas; as retas u e t, duas transversais Encontre o valor do ângulo x na figura a seguir"

Portanto, o valor de x é:

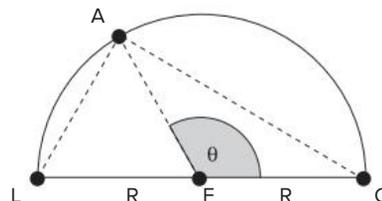
A 120°
B 125°
C 130°
D 135°
E 140°

17 **UTFPR 2013** Um triângulo isósceles tem dois lados congruentes (de medidas iguais) e o outro lado é chamado de base. Se, em um triângulo isósceles, o ângulo externo relativo ao vértice oposto da base mede 130°, então os ângulos internos desse triângulo medem:

A 10°, 40° e 130°.
B 25°, 25° e 130°.
C 50°, 60° e 70°.
D 60°, 60° e 60°.
E 50°, 65° e 65°.

18 Na figura a seguir, considere um trapézio retângulo e um triângulo isósceles.

Se a base menor desse trapézio e a base desse triângulo são colineares, então, sabendo que o ângulo agudo do trapézio mede 72° e o ângulo oposto à base do triângulo mede 30°, podemos concluir que as retas que contêm o lado oblíquo do trapézio e o lado do triângulo mais próximo ao trapézio, sem ser a base, formam um ângulo agudo de:

A 1°
B 2°
C 3°
D 4°
E 5°

19 **Enem PPL 2012** Durante seu treinamento, um atleta per corre metade de uma pista circular de raio R, conforme a figura a seguir A sua largada foi dada na posição representada pela letra L, a chegada está representada pela letra C, e a letra A representa o atleta. O segmento $\overline{LC}$ é um diâmetro da circunferência, e o centro da circunferência está representado pela letra F
Sabemos que, em qualquer posição que o atleta esteja na pista, os segmentos $\overline{LA}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares. Seja θ o ângulo que o segmento $\overline{AF}$ faz com o segmento $\overline{FC}$.

Quantos graus mede o ângulo θ quando o segmento $\overline{AC}$ medir R durante a corrida?

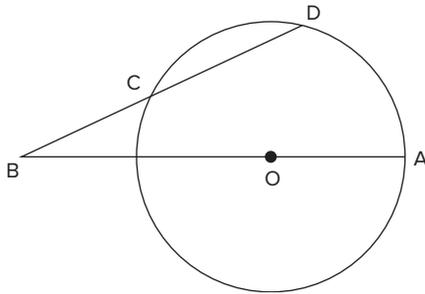
A 15 graus.
B 30 graus.
C 60 graus.
D 90 graus.
E 120 graus.

20 **Mackenzie 2012** Na figura, se a circunferência tem centro O e BC = OA, então a razão entre as medidas dos ângulos AÔD e CÔB é:

A $\frac{5}{2}$

B $\frac{3}{2}$

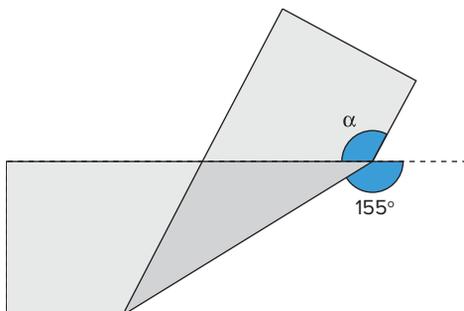
C 2

D $\frac{4}{3}$

E 3

21 Um garoto descuidado fechou seu caderno deixando que uma de suas folhas retangulares ficasse dobrada, formando um ângulo de 40° em sua base, como mostra a figura a seguir:

Assinale a alternativa que apresenta a medida, em graus, do menor ângulo agudo do triângulo determinado pela dobradura.

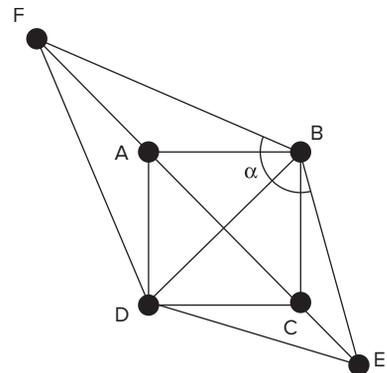
A 10°
B 15°
C 20°
D 25°
E 30°

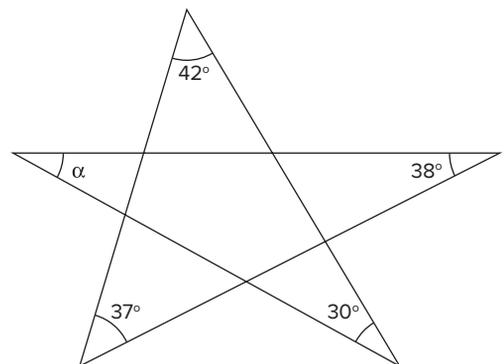
22 **IFRJ 2017** Uma fita de papel retangular é dobrada conforme a figura a seguir

O valor do ângulo α marcado na figura é

A 155°
B 150°
C 140°
D 130°

23 **Uece 2016** No retângulo PQRS a medida dos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ são respectivamente 3 m e 2 m. Se V é um ponto do lado $\overline{PQ}$ tal que a medida do segmento $\overline{VQ}$ é igual a 1 m e U é o ponto médio do lado $\overline{PS}$, então, a medida, em graus, do ângulo VÛR é:

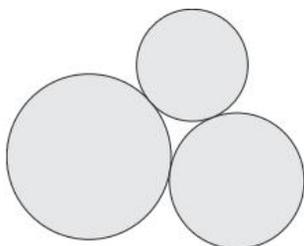
A 40
B 35
C 50
D 45

24 **ESPM 2013** Na figura a seguir, ABCD é um quadrado, BDE é um triângulo equilátero e BDF é um triângulo isósceles, em que AF = AB. A medida do ângulo α é:

A 120°
B 135°
C 127,5°
D 122,5°
E 110,5°

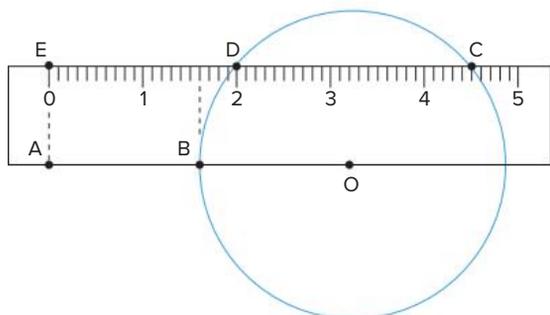
25 **Ifal 2016** Na figura a seguir, calcule o ângulo α.

Dica: Use o resultado do ângulo externo de um triângulo.

A 30°
B 33°
C 37°
D 38°
E 42°

FRENTE 3

26 A figura a seguir apresenta três círculos de raios diferentes, limitados por circunferências tangentes duas a duas.

Sabendo que os lados do triângulo, cujos vértices são os centros desses círculos, medem 9 cm, 10 cm e 11 cm, pode-se concluir que o comprimento da maior circunferência e a área do menor círculo valem, respectivamente:

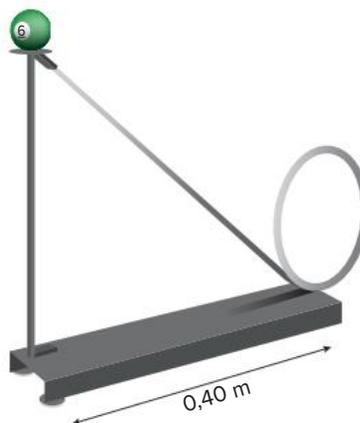
A 6π cm e 16π cm^2
B 6π cm e 8π cm^2.
C 10π cm e 8π cm^2.
D 12π cm e 16π cm^2.
E 12π cm e 8π cm^2

27 **Uerj 2012** A figura a seguir representa um círculo de centro O e uma régua retangular, graduada em milímetros. Os pontos A, E e O pertencem à régua e os pontos B, C e D pertencem, simultaneamente, à régua e à circunferência

Considere os seguintes dados:

Segmentos	Medida (cm)
$\overline{AB}$	1,6
$\overline{ED}$	2,0
$\overline{EC}$	4,5

O diâmetro do círculo é, em centímetros, igual a:

A 3,1
B 3,3
C 3,5
D 3,6

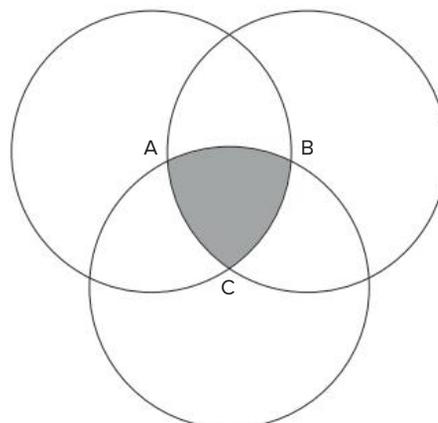
28 **UPE 2016** Num experimento de física realizado em sala, foi solta do topo de uma rampa de 0,30 m de altura uma esfera que percorreu certa distância, fazendo um *looping* no final. Partindo do princípio de que o triângulo representado é retângulo, qual a distância total aproximada que essa bola irá percorrer do topo da rampa até dar uma volta completa no aro da circunferência cujo raio é de 0,10 m?
Adote $\pi = 3,14$

A 1,13 m.
B 1,28 m.
C 1,57 m.
D 2,00 m.
E 2,07 m.

29 **UTFPR 2012** A London Eye, também conhecida como Millennium Wheel (Roda do Milênio), é uma roda-gigante de observação com 135 metros de diâmetro e está situada na cidade de Londres, capital do Reino Unido. Quanto aproximadamente percorrerá uma pessoa nesta roda-gigante em 6 voltas, considerando $\pi = 3,14$?

A 67,5 m.
B 135 m.
C 423,9 m.
D 2543,4 m.
E 85839,75 m.

30 **FGV 2017** Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da Linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre Nesse caso, se uma pessoa de 2 m de altura desse uma volta completa na Terra pela Linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola dos seus pés em, aproximadamente:

A 63 cm
B 12,6 m.
C 6,3 km.
D 12,6 km
E 63 km

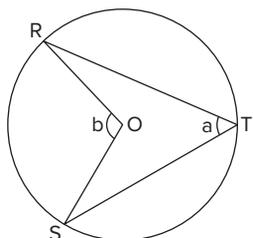
31 **IFMG 2013** Considere três circunferências de raio unitário e de centros A, B e C, conforme a figura.

Dessa forma, o perímetro da região sombreada, em unidades de comprimento, é

A $\frac{\pi}{3}$

B $\frac{\pi}{2}$

C π

D 2π

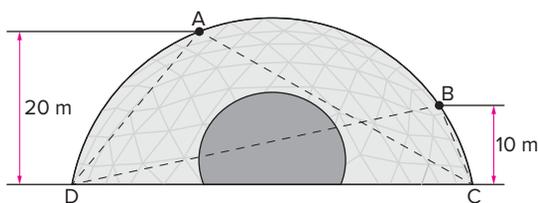
32 **IFCE 2012** Na figura a seguir, R, S e T são pontos sobre a circunferência de centro O Se x é o número real, tal que a = 5x e b = 3x + 42° são as medidas dos ângulos $R\hat{T}S$ e $R\hat{O}S$, respectivamente, pode-se dizer que

A a = 30° e b = 60°.

B a = 80° e b = 40°.

C a = 60° e b = 30°.

D a = 40° e b = 80°.

E a = 30° e b = 80°.

33 Nos ajustes finais da construção de um domo geodésico, dois operários fechavam pequenos orifícios localizados em pontos distintos desse domo Um deles estava a 20 metros do piso (ponto A) e outro a apenas 10 metros (ponto B), como mostra a figura a seguir

Enquanto trabalhavam, os dois operários podiam contemplar a vista do piso daquelas alturas, sob os ângulos $C\hat{A}D$ e $C\hat{B}D$. Sendo x e y as respectivas medidas, em graus, desses ângulos e considerando o arco $\overset{\frown}{CD}$, que passa pelos pontos A e B da superfície do domo geodésico, uma semicircunferência, então:

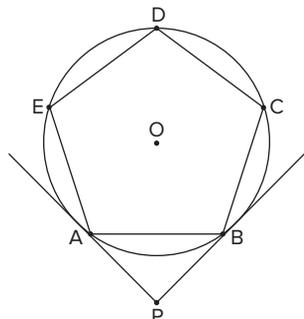
A $x + y \geq 180°$

B $x + y > 180°$

C $x < y$

D $x > y$

E $x = y$

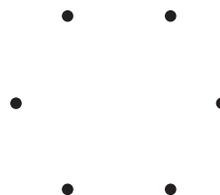
34 **IFMG 2016** Na figura a seguir, o pentágono regular está inscrito numa circunferência de centro O, e as semirretas $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são tangentes à circunferência nos pontos A e B, respectivamente.

A medida do ângulo $A\hat{P}B$, em graus, é igual a:

A 36

B 72

C 108

D 154

35 **IFRJ 2013** Manuela desenha os seis vértices de um hexágono regular (figura a seguir) e une alguns dos seis pontos com segmentos de reta para obter uma figura geométrica. Essa figura não é seguramente um:

A retângulo.

B trapézio.

C quadrado.

D triângulo equilátero.

36 **Uece 2016** Se a partir de cada um dos vértices de um polígono convexo com n lados podemos traçar tantas diagonais quanto o total das diagonais de um hexágono convexo, então, o valor de n é:

A 9

B 10

C 11

D 12

37 **IFSP 2013** Uma pessoa pegou um mapa rasgado em que constava um terreno delimitado por quatro ruas Na parte visível do mapa, vê-se que o ângulo formado pela Rua Saturno e pela Rua Júpiter é 90°; o ângulo formado pela Rua Júpiter e pela Rua Netuno é 110° e o ângulo formado pela Rua Netuno e pela Rua Marte é 100° Nessas condições, a medida de um ângulo formado pelas Ruas Marte e Saturno, na parte rasgada do mapa, é de:

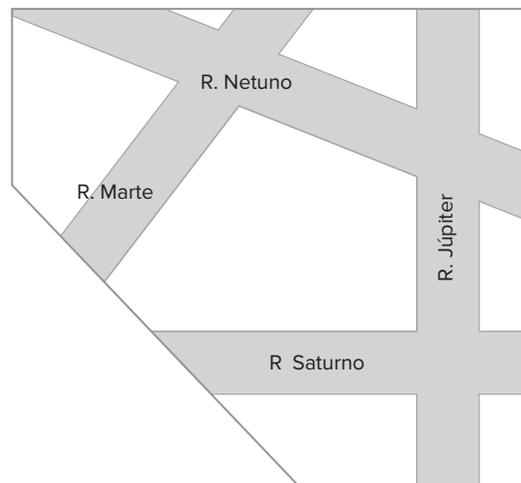
A 50°

B 60°

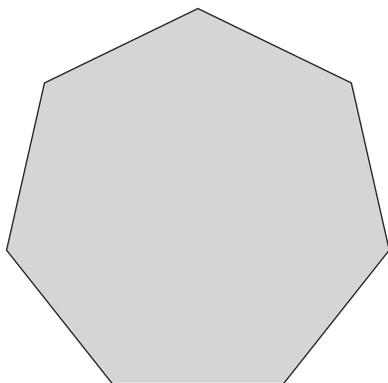
C 70°

D 80°

E 90°

FRENTE 3

38 **IFCE 2016** Um hexágono convexo possui três ângulos internos retos e outros três que medem y graus cada O valor de y é:

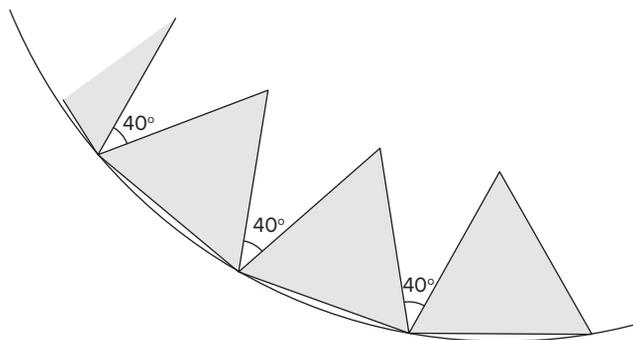
A 135
B 150
C 120
D 60
E 30

39 **IFSP 2016** Ana estava participando de uma gincana na escola em que estuda e uma das questões que ela tinha de responder era “quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos do polígono regular da figura?”.

Para responder a essa pergunta, ela lembrou que seu professor ensinou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e que todo polígono pode ser decomposto em um número mínimo de triângulos. Sendo assim, Ana respondeu corretamente à pergunta dizendo:

A 720°
B 900°
C 540°
D 1080°
E 630°

40 **IFSul 2016** A palavra polígono tem origem no grego e significa ter muitos lados ou ângulos. Eles foram estudados pelo grande geômetra Euclides de Alexandria em sua obra *Os elementos*.
Quantos lados tem um polígono cuja soma dos ângulos internos e externos é 1980°?

A 8
B 11
C 13
D 17

41 **UFRGS 2016** Um desenhista foi interrompido durante a realização de um trabalho, e seu desenho ficou como na figura a seguir

Se o desenho estivesse completo, ele seria um polí gono regular composto por triângulos equiláteros não sobrepostos, com dois de seus vértices sobre um cír culo, e formando um ângulo de 40°, como indicado na figura
Quando a figura estiver completa, o número de triân gulos equiláteros com dois de seus vértices sobre o círculo é

A 10
B 12
C 14
D 16
E 18

Texto complementar

Geometrias não euclidianas

As geometrias não euclidianas se baseiam na negação do quinto postulado de Euclides que questiona o conceito de paralelas. Entenderemos que o quinto postulado pode ser aceito como verdadeiro se considerarmos o nível plano, porém, se ele estiver em uma superfície não plana, pode perder validade. Afinal, o meio onde estamos tem suas porções planas e outras não planas e, para estas últimas, torna-se necessário explorar os conceitos matemáticos delas oriundas. [...]

Nikolai Lobachevsky (1792-1856) foi um matemático russo com uma ampla visão sobre o conhecimento matemático. Realizou estudos em vários campos da Matemática. A Geometria é um dos campos que foram seu objeto de estudo. [...] suas pesquisas alcançaram grandes destaques. Realizou investigações sobre o postulado das paralelas pelas quais assu miu a contradição em relação ao quinto postulado de Euclides e, com os conceitos elaborados, ampliou significativamente o campo da geometria.

[ ] a geometria de Lobachevsky apresenta teoremas que introduzem conceitos na Matemática diferentes dos sistematizados na geometria euclidiana, nos conteúdos matemáticos que tratam sobre:

a) a disposição das retas paralelas;
b) a soma dos ângulos em triângulos e polígonos;
c) as áreas;
d) os polígonos inscritos e circunscritos na circunferência;
e) a semelhança e congruência de figuras;
f) a trigonometria;
g) o teorema de Pitágoras;
h) as medições do círculo e suas partes.

[ ]

Pouco tempo antes, porém sem publicar o resultado dos estudos, o matemático húngaro János Bolyai (1802 1860) chegara aos mesmos resultados a que Lobachevsky chegaria em um futuro próximo Dessa forma, a Geometria Hiperbólica pode ser considerada criação de Lobachevsky e Bolyai

Bernhard Riemann (1826-1866) foi um matemático alemão que também contribuiu de maneira significativa para a ampliação do conhecimento geométrico ao reunir em um corpo de doutrina outra Geometria não euclidiana oriunda dos estudos na superfície esférica, também denominada de elíptica. Suas investigações foram diferentes das de Bolyai e Lobachevsky. Enquanto estes dois últimos criaram uma nova geometria com um pos tulado sobre paralelas diferente do postulado das paralelas de Euclides, segundo Gilberto Geraldo Garbi, no livro A Rainha das Ciências, Riemann caracterizou as geometrias por sua métrica, ou seja, a maneira como a distância entre dois pontos infinitamente próximos é expressa em função das diferenças de coordenadas daqueles pontos Com seus estudos, Riemann concluiu ser possível criar quantas geometrias quisermos. [...]

Riemann introduziu o conceito de espaços com mais do que três dimensões, definindo espaços curvos e relacionando sua curvatura com o cálculo de distâncias Para Riemann, as superfícies podem ser formadas por curvas. [...]

Na Geometria de Riemann, é possível construir geometrias:

- em que uma reta seja limitada;
- em que as perpendiculares a uma reta passam por um só ponto;
- sobre uma esfera em que as perpendiculares passam por dois pontos diametralmente opostos;
- em que duas perpendiculares a uma mesma reta sempre se cruzam.

Investigou e propôs que, por um ponto do plano, não se pode traçar nenhuma reta paralela a uma reta dada. Essa hipótese tem sua validade na superfície esférica, e o enunciado do axioma que contraria o quinto postulado de Euclides, conforme Lázaro Coutinho, no livro Convite às Geometrias Não Euclidianas, é: “Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro”.

O postulado da Geometria Hiperbólica e o da Geometria Elíptica que contrariam o quinto postulado de Euclides representam o fundamento que provocou mudanças em conceitos geométricos. Embora esses postulados difiram apenas do postulado das paralelas da Geometria Euclidiana, é a partir deles que outros tantos teoremas surgem. [...]

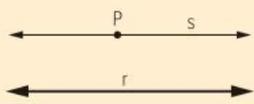
CRUZ, Donizete Gonçalves da; SANTOS, Carlos Henrique dos. "Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas Hiperbólica e Elíptica a serem abordados nas séries do Ensino Médio". Portal Educacional do Estado do Paraná. Disponível em: <www.diaadiaeducacao pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1734 8 pdf> Acesso em: 18 out. 2018. (Adapt.).

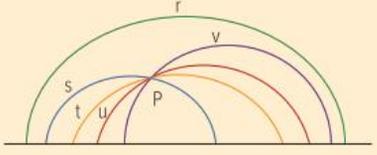
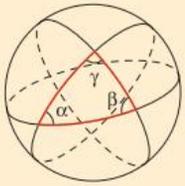
Principais diferenças entre as geometrias

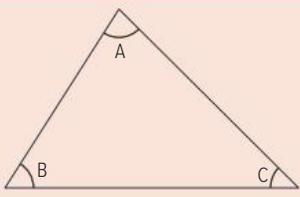
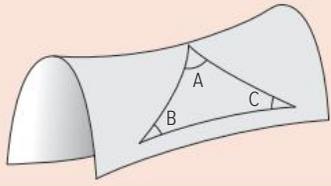
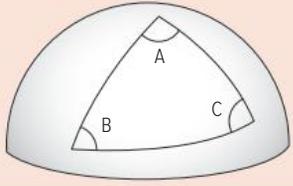
Em relação ao postulado das paralelas:

Geometria Euclidiana

“Por um ponto P fora de uma reta r, existe uma única reta que passa pelo ponto P e é paralela a r.”

Geometria Hiperbólica

“Por um ponto P fora de uma reta r, existem infinitas retas que passam pelo ponto P e são paralelas a r.”

Geometria Elíptica

“Por um ponto P fora de uma reta r, não existe reta que passe pelo ponto P e seja paralela a r.”

Em relação à curvatura e à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo:

Geometria Euclidiana (curvatura nula)	Geometria Hiperbólica (curvatura negativa)	Geometria Elíptica (curvatura positiva)
$A + B + C = 180°$	$A + B + C < 180°$	$A + B + C > 180°$

Resumindo

Os entes primitivos da Geometria são o ponto, a reta e o plano. Todas as demais figuras geométricas podem ser definidas a partir deles.

- Figuras congruentes possuem mesma forma e mesmo tamanho.
- Figuras semelhantes têm mesma forma, mas tamanhos diferentes
- Figuras equivalentes podem apresentar formas diferentes, mas, necessariamente, mesmo tamanho.

O tamanho de uma figura geométrica pode ser encontrado a partir de seu comprimento, sua área ou seu volume, dependendo do número de dimensões da figura.

De acordo com os postulados de Euclides para a Geometria Plana, é permitido:

1. traçar um segmento de reta unindo dois pontos.
2. prolongar um segmento de reta na direção em que ele se encontra.
3 traçar uma circunferência conhecendo-se o seu centro e a medida de seu raio
4. traçar uma reta que seja perpendicular a uma reta dada.
5. traçar uma reta que seja paralela a uma reta dada.

Os principais casos de congruência de triângulos são: LAL, LLL, ALA e LAA_o.

As transformações geométricas que conservam a congruência das figuras transformadas são denominadas transformações isométricas. São elas: a translação, a rotação e a reflexão.

As translações conservam também o paralelismo entre os lados correspondentes das figuras transformadas.

Se uma figura geométrica apresenta mais do que um eixo de simetria de reflexão (bilateral), então essa figura é, necessariamente, invariante por rotações com menos do que 360° em torno de seu centro, e o menor ângulo para essas rotações é dado por $\theta = \frac{360}{n}$, sendo n o número de eixos de simetria da figura.

Certos polígonos são denominados isósceles, como alguns triângulos ou trapézios, quando possuem um eixo de simetria.

O eixo de simetria de um segmento de reta é chamado de mediatriz do segmento

O eixo de simetria de um ângulo recebe o nome de bissetriz do ângulo.

Os paralelogramos são quadriláteros que possuem os lados opostos congruentes e paralelos entre si.

Os losangos são os paralelogramos que apresentam todos os lados congruentes.

Os retângulos são os paralelogramos que têm todos os ângulos congruentes.

Os quadrados são os paralelogramos que possuem tanto as propriedades dos losangos quanto as dos retângulos.

Os ângulos nulos medem 0°, os rasos medem 180°, e os ângulos são aqueles cujas medidas estão compreendidas entre 0° e 180°.

Os ângulos retos medem 90°, os agudos têm medidas entre 0° e 90°, e os obtusos medem entre 90° e 180°.

Dois ângulos adjacentes apresentam um lado em comum

As medidas de dois ângulos complementares somam 90°.

As medidas de dois ângulos suplementares somam 180°.

No cruzamento de duas retas, os ângulos opostos pelo vértice (opv) são congruentes, e os ângulos adjacentes são suplementares.

Nos cruzamentos de duas retas paralelas com uma transversal, os pares de ângulos correspondentes, alternos internos e alternos externos são congruentes, e os pares de ângulos colaterais internos e colaterais externos são suplementares.

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer equivale a 180°.

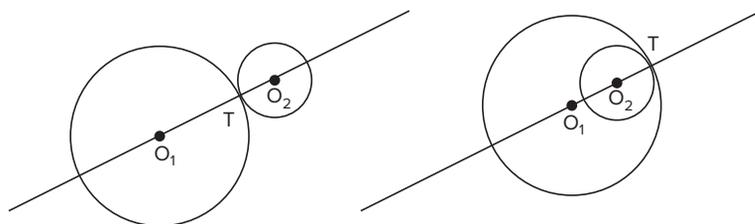
A medida de cada ângulo externo de um triângulo equivale à soma das medidas dos dois ângulos internos do triângulo que não lhe são adjacentes.

Os ângulos da base de um triângulo, ou de um trapézio isósceles, são congruentes

Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

O comprimento de uma circunferência de raio r é dado por $C = 2\pi\ r$

A área de um círculo de raio r é dada por $A = \pi \cdot r^2$.

Se duas circunferências são tangentes, então a distância entre seus centros é igual à soma ou à diferença das medidas de seus raios.

A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco da circunferência contido na região convexa do ângulo.

A medida de um ângulo circunscrito a uma circunferência é igual ao suplemento da medida do arco da circunferência contido na região convexa do ângulo

Um polígono convexo com n lados também possui:

- n vértices;
- $\frac{n\,(n\quad 3)}{2}$ diagonais;
- n ângulos internos cuja soma das medidas é $(n - 2)\cdot 180°$;
- n ângulos externos cuja soma das medidas é 360°.

Os polígonos cujos lados têm o mesmo comprimento são chamados de **equiláteros**

Os polígonos cujos ângulos internos têm a mesma medida são denominados **equiângulos**, e essas medidas são expressas por:

- Medida de cada ângulo externo: $e = \frac{360°}{n}$.
- Medida de cada ângulo interno: $i = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

Um polígono é **regular** se, e somente se, for um polígono **equilátero** e **equiângulo**.

Todo polígono **regular** é inscritível em uma circunferência.

Quer saber mais?

Sites

- Sobre a obra de Euclides
<www.infoescola.com/livros/elementos-obra-de-euclides-de-alexandria>
- Sobre a isometria
<novaescola.org.br/conteudo/2711/geometria das-transformacoes>.
- Sobre a medição dos ângulos
<www.esaas.com/grupos/matematica/estagios/Paginas/HiparcoDeNiceia.htm>
- Sobre os arcos de circunferência
<www.obaricentrodamente.com/2014/09/arcos-de-circunferencia.html>.
- Sobre os polígonos
<clubes.obmep.org.br/blog/um-pouco-sobre-poligonos-poligonos-uma-primeira-definicao-2>.

Exercícios complementares

1 O radiano (rad) é uma unidade de medida angular tal que 1 rad equivale a, aproximadamente, 57°17'45". Qual a medida aproximada, em graus, minutos e segundos, de um ângulo de 3,14 rad?

2 Calcule, em graus e minutos, a medida do ângulo descrito pelo ponteiro das horas de um relógio durante o tempo de 135 minutos.

3 João adquiriu um *software* capaz de calcular a área de um terreno poligonal a partir dos comprimentos de seus lados e das inclinações desses lados em relação a determinado referencial. Denominadas azimutes, essas inclinações costumam ser expressas nas plantas e escrituras dos terrenos em graus, minutos e segundos, mas deveriam ser digitadas apenas em graus no *software*. Assim, um azimute igual a 124°30', por exemplo, deveria ser digitado como 124,5°
João consultou os valores indicados na planta de seu terreno poligonal, digitou-os no *software* e percebeu um erro considerável no valor da área obtido.
O erro aconteceu porque João tomou os algarismos que indicavam os minutos e os segundos dos azimutes indicados na planta como os algarismos das quatro primeiras casas decimais desses valores em graus Assim, o azimute 216°21'45" acabou sendo digitado como 216,3245°.
Se esse azimute tivesse sido digitado corretamente, qual seria a soma dos quatro algarismos digitados?

4 Sobre a superfície de uma parede plana, foram pintadas duas linhas retas, r e s, uma no alto da parede e outra mais baixa. As linhas pintadas deveriam ter ficado paralelas, mas o pintor desconfiou de que elas não ficaram. Para ter certeza disso, ele traçou uma reta vertical interceptando as duas linhas já pintadas e mediu os ângulos colaterais internos formados à direita da reta vertical. Então, confiando nos resultados das medições, ele concluiu corretamente que os prolongamentos das linhas r e s deverão se interceptar em um ponto situado à esquerda da reta vertical.
Sendo x e y as medidas angulares encontradas pelo pintor, pode-se concluir que:

A $x + y = 180°$
B $x + y < 180°$
C $x + y > 180°$
D $x > 90°$ e $y > 90°$
E $x < 90°$ e $y < 90°$

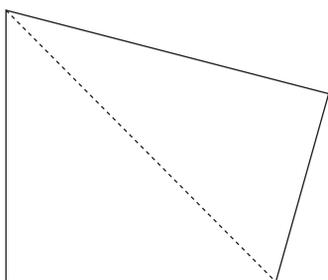
5 Um quadrilátero ABCD de diagonal $\overline{AC}$ é tal que os triângulos ABC e ACD são escalenos. Além disso, sabe-se que quadrilátero não possui lados paralelos de modo que os prolongamentos dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ se interceptam em um ponto P. Se as medidas x e y dos ângulos internos de vértices A e B desse quadrilátero forem tais que $x + y < 180°$, então a área do triângulo PAC será, necessariamente, menor do que a área do triângulo:

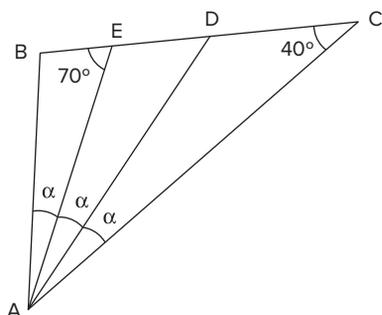
A PCD
B BCD
C ACD
D ABC
E PBA

6 Os irmãos Ana, Beto, Carlos e Diana dividiram uma *pizza* retangular em quatro pedaços desiguais:

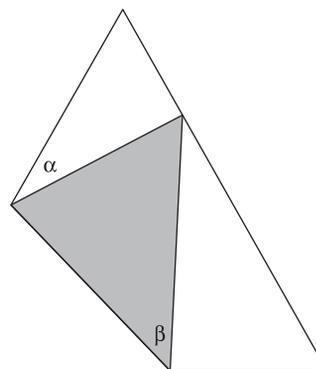
- Ana ganhou um pedaço equivalente ao dobro do pedaço de Beto.
- Beto ganhou um pedaço equivalente ao dobro do pedaço de Carlos.
- Carlos ganhou um pedaço equivalente ao dobro do pedaço de Diana.

Se todos os cortes foram feitos na direção do centro da *pizza* e não sobrou nenhum pedaço, então qual a medida do ângulo correspondente ao pedaço de Ana?

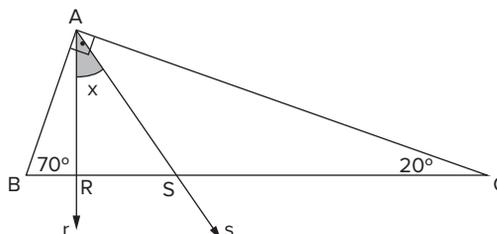
7 Inicialmente Bruno tinha dois pedaços de cartolina, um em formato de quadrado e outro em formato de triângulo equilátero. Ele os cortou ao meio de modo que o quadrado foi cortado sobre uma de suas diagonais e o triângulo sobre uma de suas alturas Depois disso, Bruno percebeu que os pedaços eram triângulos retângulos com hipotenusas de mesmo comprimento e os colou formando a seguinte figura de quatro lados:

Quais são as medidas do maior e do menor ângulo interno desse quadrilátero?

8 **EEAR 2017**

Se ABC é um triângulo, o valor de α é

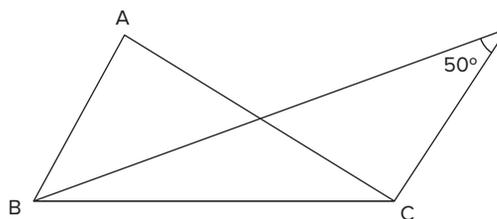
A 10°
B 15°
C 20°
D 25°

9 Um pedaço de cartolina, branco de um lado e cinza do outro, tem a forma de triângulo equilátero que foi dobrado de modo que um de seus vértices encontre o lado oposto, como mostra a figura.

Sendo α e β as medidas em radianos dos ângulos indicados na figura, calcule o valor de $6\beta - 3\alpha$.

10 Em um trapézio isósceles ABCD, a base menor $\overline{BC}$ tem a mesma medida que os lados não paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; e a base maior $\overline{AD}$ tem a mesma medida que a diagonal $\overline{AC}$. Encontre as medidas dos ângulos inter nos desse trapézio.

11 Seja x a medida, em graus, do ângulo formado pelas semirretas r e s de origem no vértice A do triângulo retângulo ABC, como mostra a figura.

Sendo R e S os pontos em que as semirretas r e s interceptam a hipotenusa $\overline{BC}$ e sabendo que o menor ângulo agudo do triângulo mede 20°, calcule x nos seguintes casos:

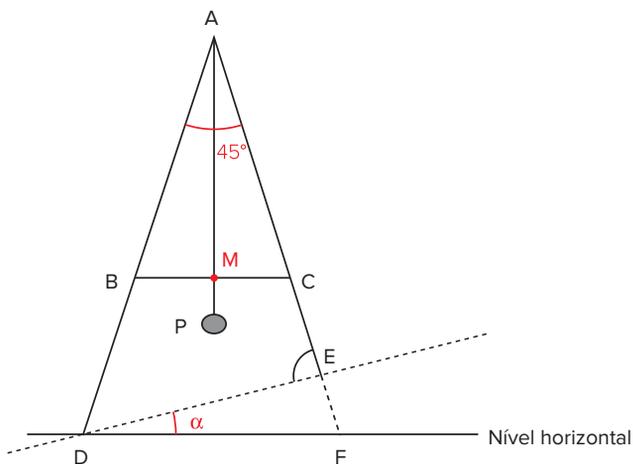
a) $\overline{AR}$ é altura, e $\overline{AS}$ é bissetriz interna do ΔABC.
b) $\overline{AR}$ é altura, e $\overline{AS}$ é mediana do ΔABC.
c) $\overline{AR}$ é bissetriz interna, e $\overline{AS}$ é mediana do ΔABC.

12 **Unesp** Considere o triângulo ABC da figura

Se a bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$ forma com a bissetriz externa do ângulo $\hat{C}$ um ângulo de 50°, determine a medida do ângulo interno $\hat{A}$.

13 Sendo P um ponto do interior do triângulo ABC tal que os ângulos $P\hat{B}A$ e $P\hat{C}A$ medem 30° e 50° respectivamente, determine a diferença entre as medidas dos ângulos $B\hat{P}C$ e $B\hat{A}C$

14 **Uerj 2015** Uma ferramenta utilizada na construção de uma rampa é composta pela seguinte estrutura:

- duas varas de madeira, correspondentes aos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$, que possuem comprimentos diferentes e formam o ângulo $D\hat{A}E$ igual a 45°.
- uma travessa, correspondente ao segmento $\overline{BC}$, que une as duas varas e possui uma marca em seu ponto médio M.
- um fio fixado no vértice A e amarrado a uma pedra P na outra extremidade.
- nesse conjunto, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são congruentes.

Observe o esquema que representa essa estrutura.

Quando o fio passa pelo ponto M, a travessa $\overline{BC}$ fica na posição horizontal. Com isso, obtém-se, na reta que liga os pontos D e E, a inclinação α desejada.
Calcule α, supondo que o ângulo $A\hat{E}D$ mede 85°.

15 A respeito de um triângulo isósceles ABC cuja base $\overline{BC}$ é menor que os lados congruentes, sabemos que:

- o ângulo oposto à base mede 36°.
- a bissetriz do ângulo interno de vértice B intercepta o lado oposto no ponto D.
- pelo ponto D, passa uma reta paralela à base $\overline{BC}$ do triângulo que intercepta o lado AB no ponto E.

Qual dos pares de triângulos a seguir são congruentes um ao outro?

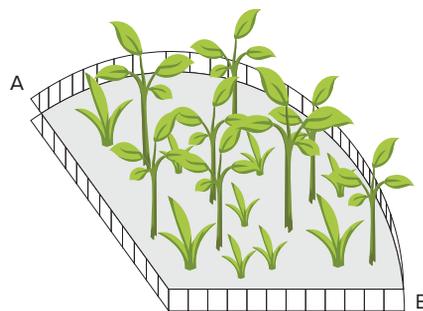
A ABC e ADE.
B ABD e BCE.
C ADE e BCD.
D BCE e CDE.
E BCD e CDE.

16 Qual o número inteiro que mais se aproxima da medida em metros:

a) do raio de uma circunferência cujo comprimento total é de 62,8 m?
b) de um arco com 90° de uma circunferência cujo raio é 7 m?
c) do raio de uma circunferência na qual um arco de 300° tem 2 km de comprimento?

17 **IFMG 2012** Uma partícula descreve um arco de 1080° sobre uma circunferência de 15 cm de raio. A distância percorrida por essa partícula, em cm, é igual a:

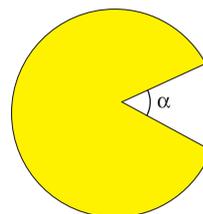
A 90π
B 120π
C 140π
D 160π

18 A figura a seguir representa um canteiro de plantas que foi cercado colocando-se uma estaca por metro ao longo de todo o seu contorno

Sabendo que o canteiro tem a forma de um setor circular de raio 14 m e ângulo central de 135°, determine:

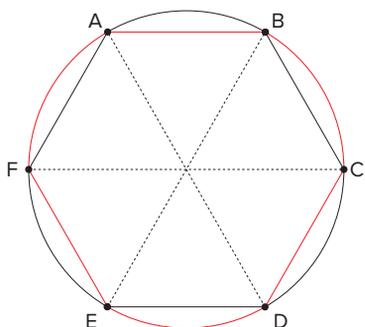
a) o comprimento aproximado do arco AB.
b) quantas estacas foram usadas.

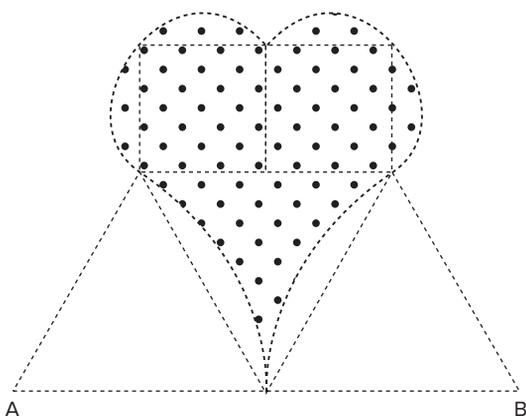
19 **IFSC 2016** Considere a seguinte situação: durante a Oktoberfest, em Blumenau SC, um conjunto de bicicletas com rodas de diâmetro 26 polegadas percorreu 855,6 m em linha reta, durante o desfile na Rua XV de Novembro. Sabendo-se que 1 polegada equivale a 2,5 cm e que $\pi = 3{,}1$, é correto afirmar que, durante o desfile, a roda realizou:

A 600 voltas.
B 800 voltas.
C menos de 400 voltas.
D mais de 1200 voltas.
E entre 400 e 500 voltas.

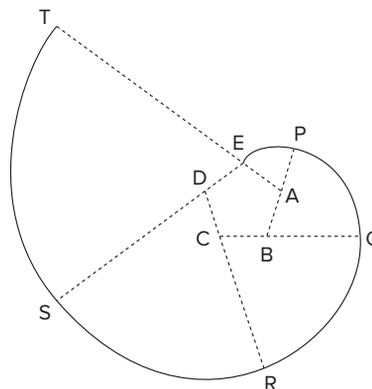
20 Um famoso personagem dos jogos eletrônicos da década de 1970 tinha o formato de um setor circular com apenas 0,5 cm de raio e 3,5 cm de perímetro

Determine a medida aproximada do ângulo α.

FRENTE 3

21 Um circuito de corridas ABCDEF é formado por três arcos e três cordas de uma mesma circunferência que circunscreve um hexágono regular, como mostra a figura a seguir.

Se o raio dessa circunferência mede 100 m, determine o comprimento aproximado do circuito.

22 No dia do seu aniversário de casamento, João resolveu fazer uma surpresa para sua esposa cobrindo o jardim de sua casa com flores cercadas por um enfeite constituído de uma série de pequenas lâmpadas ligadas por um fio. João fez com que esse fio formasse o contorno de um coração, de acordo com a figura a seguir, que apresenta dois quadrados com 1,5 m de lado e três triângulos equiláteros congruentes entre si.

Sabendo que o fio dá apenas uma volta no coração, que é formado por quatro arcos de circunferência, tais que duas delas têm seus centros nos centros de cada um dos quadrados e as outras duas têm centros nos pontos A e B, o número inteiro mais próximo do comprimento, em metros, da parte do fio que contorna todo o coração é:

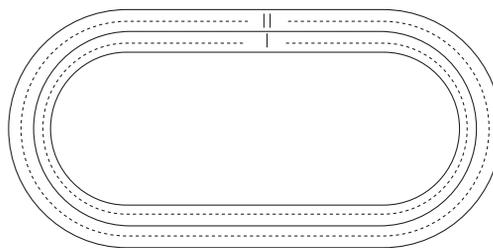
A 7
B 10
C 13
D 26
E 29

23 A espiral regular de cinco centros é construída, com régua e compasso, a partir dos vértices de um pentágono regular, ABCDE, como mostra a figura a seguir

Primeiro, usamos a régua para prolongar os lados do pentágono. Depois, usamos o compasso para traçar os seguintes arcos:

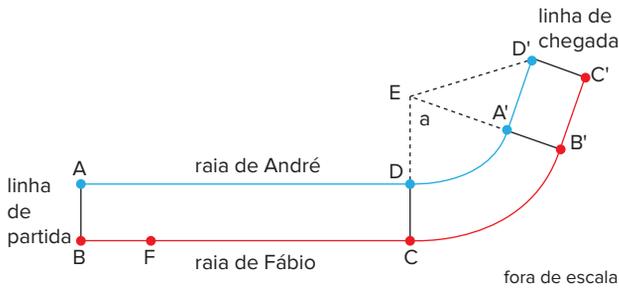
- $\overset{\frown}{EP}$ de centro no ponto A.
- $\overset{\frown}{PQ}$ de centro no ponto B
- $\overset{\frown}{QR}$ de centro no ponto C.
- $\overset{\frown}{RS}$ de centro no ponto D.
- $\overset{\frown}{ST}$ de centro no ponto E.

Se o lado do pentágono regular ABCDE mede 1 cm, o comprimento total da espiral desenhada é de:

A 2π cm.
B 3π cm
C 4π cm.
D 5π cm.
E 6π cm.

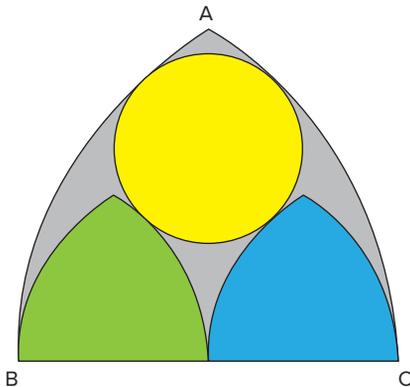
24 **IFSP 2013** Uma pista de atletismo é formada por duas raias cujo percurso é formado por duas partes retas intercaladas com duas semicircunferências, conforme a figura

Dois atletas estavam correndo, um na raia I e outro na raia II, quando pararam para descansar. O atleta da raia II disse que dera 10 voltas na pista e correra mais, pois sua raia é maior; já o outro atleta discordou, pois ele acreditava ter dado mais voltas.
Se a semicircunferência tracejada da raia I tem raio igual a 10 metros, a da raia II tem raio de 12 metros e as partes retas têm 100 metros de comprimento, então o número mínimo de voltas que o atleta da raia I deve completar para correr mais que o outro é:

A 11
B 12
C 13
D 14
E 15

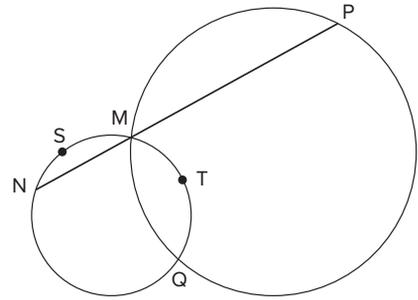
25 **Unesp 2015** A figura representa duas raias de uma pista de atletismo plana. Fábio (F) e André (A) vão apostar uma corrida nessa pista, cada um correndo em uma das raias. Fábio largará à distância FB da linha de partida para que seu percurso total, de F até a chegada em C', tenha o mesmo comprimento do que o percurso total de André, que irá de A até D'

Considere os dados:

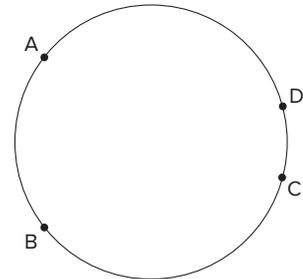
- ABCD e A'B'C'D' são retângulos
- B', A' e E estão alinhados.
- C, D e E estão alinhados
- $\overset{\frown}{A'D}$ e $\overset{\frown}{B'C}$ são arcos de circunferência de centro E.

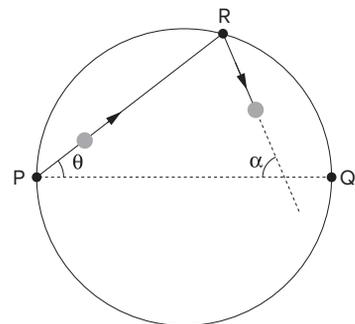
Sabendo que AB = 10 m, BC = 98 m, ED = 30 m, ED' = 34 m e $\alpha = 72°$, calcule o comprimento da pista de A até D' e, em seguida, calcule a distância FB. Adote nos cálculos finais $\pi = 3$.

26 Uma das características mais marcantes da arquitetura gótica é o uso dos arcos em forma de ogiva nos vitrais das janelas. A figura a seguir ilustra o esquema gráfico típico de um desses vitrais

Na ogiva maior, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero de lado 15 metros, o arco $\overset{\frown}{AB}$ tem centro no ponto C, e o arco $\overset{\frown}{AC}$ tem centro no ponto B. Sabendo que as ogivas menores são semelhantes à ogiva maior e que as menores são congruentes entre si, pode-se concluir que o raio do círculo que tangencia as três ogivas mede:

A 375 cm.
B 400 cm.
C 425 cm.
D 450 cm.
E 475 cm.

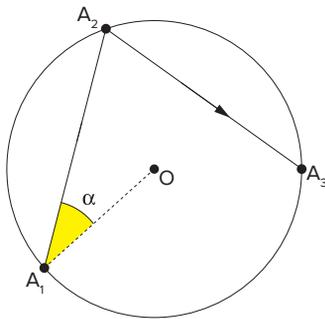
27 Na figura a seguir, os arcos $\overset{\frown}{QMP}$ e $\overset{\frown}{MTQ}$ medem, respectivamente, 170° e 130°.

Determine a medida do arco $\overset{\frown}{MSN}$.

28 A figura a seguir apresenta uma circunferência e quatro de seus pontos: A, B, C e D. Nessa circunferência, o menor arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 80°, e o menor arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 10°.

Sabendo que as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ se interceptam no ponto P, e as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ se interceptam no ponto Q, calcule as medidas, em graus, dos ângulos agudos de vértices P e Q, determinados pelas retas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$.

29 **Fuvest 2016** Uma bola de bilhar, inicialmente em repouso em um ponto P, situado na borda de uma mesa de bilhar com formato circular, recebe uma tacada e se desloca em um movimento retilíneo. A bola atinge a borda no ponto R e é refletida elasticamente, sem deslizar. Chame de Q o ponto da borda diametralmente oposto a P e de θ a medida do ângulo $Q\hat{P}R$

a) Para qual valor de θ, após a primeira reflexão, a trajetória da bola será paralela ao diâmetro $\overline{PQ}$?

b) Para qual valor de θ, após a primeira reflexão, a trajetória da bola será perpendicular a $\overline{PQ}$?

c) Supondo agora que $30° < \theta < 60°$, encontre uma expressão, em função de θ, para a medida α do ângulo agudo formado pela reta que contém P e Q e pela reta que contém a trajetória da bola após a primeira reflexão na borda.

30 **UEM 2016** Um espelho tem a forma de uma circunferência de centro O. A partir de um ponto A_1 na circunferência é emitido um feixe de luz na direção de um ponto A_2, também na circunferência, como mostra a figura adiante. O feixe de luz é então refletido para um ponto A_3 e segue refletindo até tocar novamente em A_1, de modo que sua trajetória forme um polígono regular. Sabendo que a medida do ângulo α, em graus, entre o raio $\overline{OA_1}$ da circunferência e o feixe de luz $\overline{A_1A_2}$, é um número inteiro, assinale o que for correto.

01 Se $\alpha = 60°$, então os feixes de luz refletidos formarão um hexágono.
02 É impossível que os feixes de luz tenham formado um octógono regular
04 Há exatamente 16 possibilidades para o valor do ângulo α nas condições consideradas
08 O menor valor possível para a medida do ângulo α, em graus, é 30°
16 O polígono com a maior quantidade de lados que pode ser formado nessas condições é um dodecágono (12 lados)

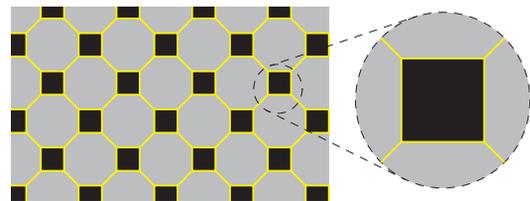
Soma:

31 A imagem a seguir é de uma calçada da Avenida Paulista, na cidade de São Paulo O mosaico presente nessa calçada, que imita o formato do estado de São Paulo, pode ser obtido usando-se peças de cerâmica quadradas que são completamente brancas ou completamente pretas ou, ainda, metade brancas e metade pretas

a) Como pode ser classificado o polígono que representa o formato do estado de São Paulo na calçada?
b) Qual é o valor do maior ângulo interno desse po lígono?
c) Quanto vale a soma das medidas de todos os ângulos internos desse polígono?
d) Sabendo que os lados das peças quadradas de cerâmica que compõem esse mosaico medem 20 cm cada, determine o perímetro aproximado desse polígono que representa o formato do es tado de São Paulo.

32 **Unifesp** A soma de $n - 1$ ângulos internos de um polígono convexo de n lados é 1900° O ângulo remanescente mede

A 120°
B 105°
C 95°
D 80°
E 60°

33 A figura a seguir mostra um piso de cerâmica composto de peças em forma de polígonos regulares de dois tipos diferentes, em que as peças menores são quadradas e as maiores são octogonais.

Um segundo piso também é composto de peças de dois tipos diferentes de polígonos regulares e segue o mesmo princípio de distribuição, porém as peças menores desse segundo piso têm a forma de triângulos equiláteros, como mostra o detalhe a seguir.

De acordo com os princípios geométricos formadores desses pisos, as peças maiores do segundo piso têm a forma de:

A hexágonos regulares.
B heptágonos regulares
C eneágonos regulares.
D decágonos regulares.
E dodecágonos regulares

34 **IFCE 2014** Um robô, caminhando em linha reta, parte de um ponto A em direção a um ponto B, que distam entre si cinco metros Ao chegar ao ponto B, gira novamente 60° à esquerda e caminha mais cinco metros, repetindo o movimento e o giro até retornar ao ponto de origem. O percurso do robô formará um polígono regular de:

A 10 lados.
B 9 lados.
C 8 lados
D 7 lados.
E 6 lados.

35 Considere a figura de um pentágono regular ABCDE e um ponto P em seu interior, de modo que $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tenham o mesmo comprimento e o ângulo $A\hat{P}B$ tenha 40°. Considere também que, pelo ponto P, passa uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$ desse pentágono, interceptando os lados $\overline{DE}$ e $\overline{CD}$ nos pontos Q e R, respectivamente

Nessas condições, encontre as medidas de todos os ângulos internos do quadrilátero EAPQ determinado por essa figura.

36 Dados n pontos que dividem uma circunferência em partes iguais, podemos obter formas geométricas poligonais e regulares ligando esses pontos por meio de segmentos de diversas maneiras Cada uma dessas maneiras é designada por um número p, chamado de passo de ligação. As figuras a seguir apresentam circunferências divididas em partes iguais por 9 pontos ligados com passos 1, 2, 3 e 4.

Calcule as medidas dos ângulos determinados nos vértices de cada uma dessas figuras.

37 Um pedaço de papel na forma de um paralelogramo é tal que pode ser dobrado formando um pentágono regular Para isso, basta fazer coincidirem as extremidades da sua diagonal maior, como mostram as figuras a seguir.

Sabendo que, para isso acontecer, o vinco da dobradura deve ser perpendicular à diagonal maior do paralelogramo, determine a medida, em graus, do ângulo formado entre o lado menor e a diagonal maior desse paralelogramo.

38 A teoria dos grafos é uma estrutura matemática usada para representar mapas rodoviários, sistemas de distribuição de água, hierarquia de cargos em uma empresa ou mesmo para estudar o relacionamento social entre pessoas etc. Ela tem muita relação com a Geometria. Por exemplo, o número máximo de ligações que podem existir entre dois dos n elementos de determinado conjunto G pode ser observado geometricamente, de modo que cada ligação entre os elementos de G seja representada por um lado ou por uma diagonal de um polígono convexo P com n lados.

Sendo y = f(n) a função que expressa esse número máximo de ligações entre os n vértices de um polígono regular e sabendo que existem coeficientes reais a, b e c tais que $f(n) = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$, determine:

a) os valores dos coeficientes a, b e c.
b) o conjunto domínio da função f.
c) os valores de n para y = 28 e para y = 32.

39 Uma das etapas da produção do copo americano tradicional consiste na determinação de um tetradecágono regular (14 lados)

a) Quantas diagonais de um tetradecágono regular não passam pelo centro do polígono?
b) Nomeando, em ordem alfabética, os vértices consecutivos de um tetradecágono regular de centro O com as letras A, B, C, ..., qual será a medida aproximada, em graus, dos ângulos $A\hat{O}F$ e $F\hat{A}C$?

40 Assinale V (verdadeira) ou F (falsa) para cada uma das seguintes afirmações:

- [ ] A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a 360°
- [ ] A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.
- [ ] A soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono é 720°.
- [ ] O hexágono regular tem exatamente 9 diagonais.
- [ ] O pentadecágono regular tem 50 lados.
- [ ] Todo hexágono convexo que pode ser inscrito em uma circunferência é regular.
- [ ] O ângulo externo do octógono regular mede 45°.
- [ ] Todo quadrilátero equilátero é quadrado.
- [ ] A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular pode ser igual a 14π radianos.
- [ ] Existe polígono convexo com exatamente 40 diagonais

FRENTE 3

CAPÍTULO

3

Teoria das proporções geométricas

As relações de proporcionalidade existentes entre as medidas das figuras geométricas sempre despertaram grande interesse nos estudiosos da Geometria. Afinal, essas relações nos permitem deduzir grandezas em escalas inalcançáveis para a medição humana, como calcular o raio da Terra e a distância entre a Terra e a Lua ou determinar o diâmetro de um átomo e a inclinação angular entre duas ligações químicas de uma molécula.

A noção de proporção que será discutida neste capítulo é uma das mais utilizadas na história da Geometria Plana, sendo aplicada em situações do cotidiano, na planta ou maquete de uma casa ou de um edifício, no mapa de uma região em um GPS, em obras de arte ou, simplesmente, na resolução de questões de vestibulares.

Razão de divisão de segmento

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, dizemos que qualquer ponto S de $\overline{AB}$ divide o segmento na razão de AS para SB. Assim, se o ponto S não coincide com o ponto B, existe *k* real e positivo tal que $k = \frac{AS}{SB}$. Da mesma forma, se S não coincide com A, também existe *k'* real e positivo tal que $k' = \frac{BS}{SA}$.

De modo geral, podemos escolher qualquer extremidade de um segmento como referência para o denominador da razão de divisão. As razões *k* e *k'* são tais que $k \cdot k' = 1$.

Nos exemplos a seguir, a extremidade B foi escolhida como referência para o denominador da razão *k* de divisão do segmento $\overline{AB}$.

Exemplo 1:

Se S está mais próximo de B, então $k > 1$

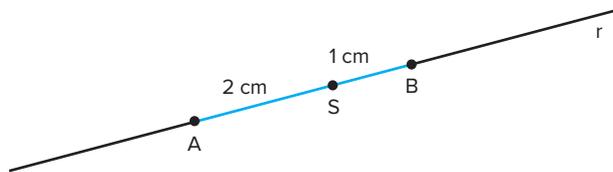



Fig. 1 Segmentos consecutivos $\overline{AS}$ e $\overline{SB}$.

$$k = \frac{AS}{SB} = \frac{2\text{ cm}}{1\text{ cm}} \Leftrightarrow k = 2$$

Exemplo 2:

Se S está mais próximo de A, então $k < 1$.

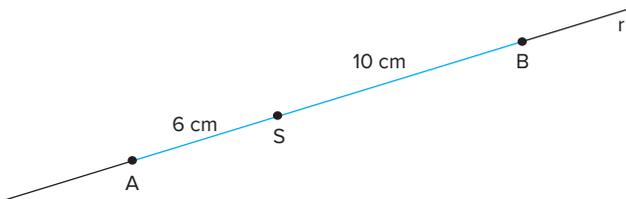



Fig 2 Segmentos consecutivos $\overline{AS}$ e $\overline{SB}$.

$$k = \frac{AS}{SB} = \frac{6\text{ cm}}{10\text{ cm}} \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$$

Exemplo 3:

Também é possível que o ponto S esteja no prolongamento do segmento $\overline{AB}$.

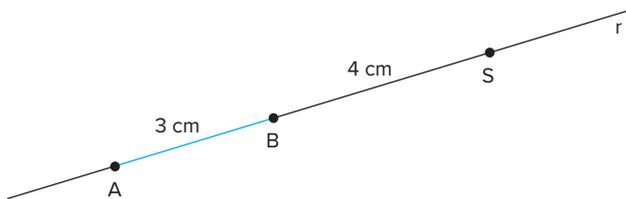



Fig 3 Segmentos consecutivos AB e BS

$$k = \frac{AS}{SB} = \frac{7\text{ cm}}{4\text{ cm}} \Leftrightarrow k = \frac{7}{4}$$

Divisão média

Quando $k = 1$, dizemos que S é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, por isso é comum usar a letra M para representar essa posição particular do ponto S.

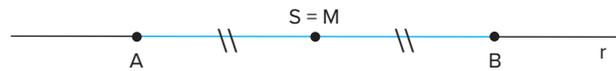
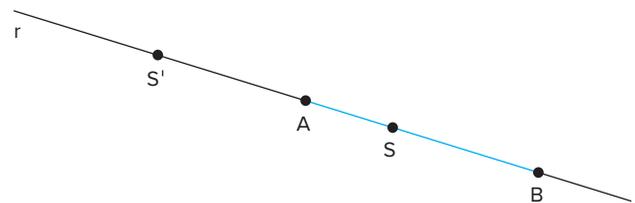
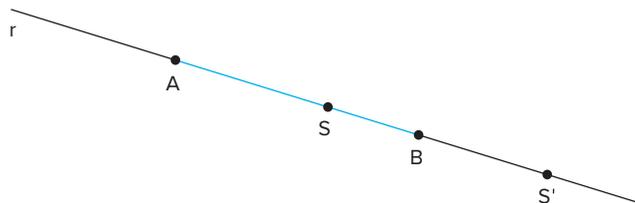



Fig 4 Ponto médio (M) do segmento $\overline{AB}$

Assim, se M é o ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, então: $MA = MB$.

Divisão harmônica

Sempre que $k \neq 1$, a relação $k = \frac{AS}{SB}$ admite duas possibilidades para a posição do ponto S sobre a reta *r*: uma interior e outra exterior ao segmento $\overline{AB}$. Indicando essas posições por S e S', tem-se que $k = \frac{AS}{SB} = \frac{AS'}{S'B}$.

- $k < 1$:

- $k > 1$

Os pontos S e S' são chamados de conjugados har mônicos

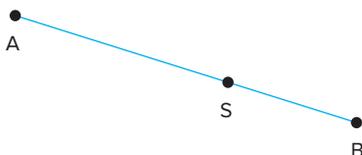
Divisão áurea

Particularmente, as divisões harmônicas internas e externas, em que $k = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$, são chamadas de seções áureas, ou divisões de extrema razão. Já as constantes irracionais $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ são conhecidas como números áureos ou números de ouro. Seus valores aproximados, 0,618 e 1,618, costumam ser indicados pela letra grega Φ (*phi*) e pela expressão $\frac{1}{\Phi}$, não necessariamente nessa ordem. Assim, ao atribuir qualquer um desses valores à Φ, o outro deverá ser $\frac{1}{\Phi}$.

Portanto, se $\frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0{,}618$,

então $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1{,}618$

Nesse caso, as atribuições dos valores Φ e $\frac{1}{\Phi}$ podem ser trocadas de acordo com a conveniência, a qual depende da intenção de se considerar a razão do menor para o maior segmento ou a razão do maior para o menor.

Então, considerando que um ponto S divide internamente um segmento AB na razão $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ de A para B, tem-se que o segmento AS deve ser maior que o segmento SB, como mostra a figura a seguir:

Nessa situação, os comprimentos dos segmentos envolvidos seguem se em ordem decrescente (AB > AS > SB) e a proporção existente entre esses comprimentos para que a divisão seja áurea é $\frac{AB}{AS} = \frac{AS}{SB}$. Desse modo, dizemos que AS é segmento áureo de AB.

A razão áurea tem muitas aplicações no estudo da Geometria. Pode se observar, por exemplo, que os comprimentos dos lados de um pentágono regular coin cidem com o comprimento dos segmentos áureos de suas diagonais.

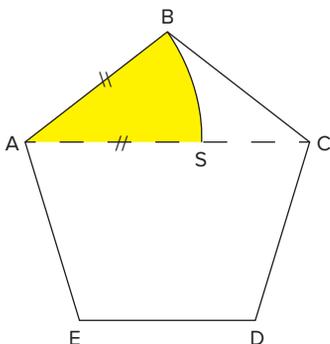
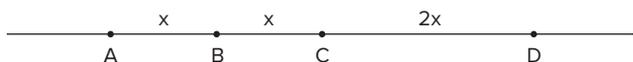



Fig. 5 AS é segmento áureo de AC.

Exercícios resolvidos

1 Em uma reta *r* com os pontos A, B, C e D, nessa ordem, B é ponto médio de $\overline{AC}$, e C é ponto médio de $\overline{AD}$. Se BD = 30 cm, quais são as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$?

Resolução:

Como B é ponto médio de $\overline{AC}$, então AB = BC.
Como C é ponto médio de $\overline{AD}$, então AC = CD.
Assim, sendo *x* a medida do segmento $\overline{AB}$:

Como BD = 30 cm, então $x + 2x = 30$ cm $\Leftrightarrow$ $x = 10$ cm.
Portanto, AB = 10 cm, AC = 20 cm e AD = 40 cm

2 Dado um segmento $\overline{AB}$ com 30 cm de comprimento, qual é a distância entre os conjugados harmônicos desse segmento para k = 3?

A 7,5 cm
B 15 cm.
C 22,5 cm.
D 37,5 cm.
E 40 cm.

Resolução:

Sejam S e S' os conjugados harmônicos, interior e ex terior:

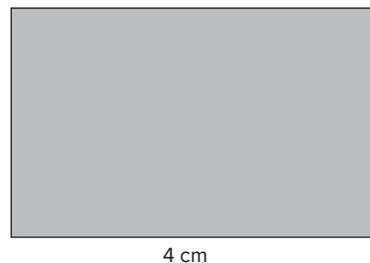
Se *x* é a medida em centímetros do segmento $\overline{BS}$, então:

$$\frac{AS}{BS} = 3 \Rightarrow \frac{30 \quad x}{x} = 3 \Leftrightarrow x = 7{,}5$$

Se *y* é a medida em centímetros do segmento $\overline{BS}$, então:

$$\frac{AS'}{BS'} = 3 \Rightarrow \frac{30 + y}{y} = 3 \Leftrightarrow y = 15$$

Logo, SS' = BS + BS' = 7,5 + 15 = 22,5 cm.
Alternativa: C.

3 Sabendo que os lados do retângulo a seguir, cuja base mede 4 cm, estão em proporção áurea, determi ne o comprimento da altura dessa figura.

Resolução:

Sendo *x* o comprimento, em centímetros, da altura do retângulo e considerando que a altura dele é menor do que a base, temos:

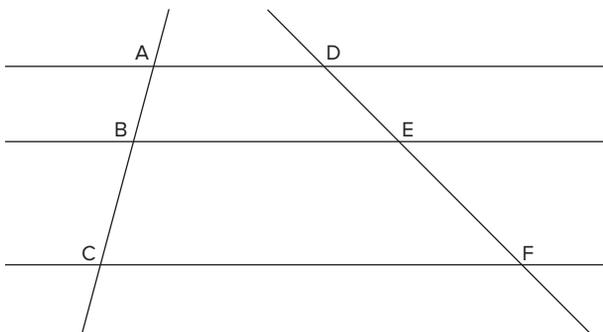
$$\frac{4}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow x\left(\sqrt{5}+1\right) = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{5}+1}$$

Racionalizando o denominador dessa fração, obtemos:

$$x = \frac{8}{\left(\sqrt{5}+1\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{8\left(\sqrt{5}-1\right)}{5 \quad 1} = \frac{8\left(\sqrt{5}-1\right)}{4} = 2\left(\sqrt{5}-1\right)$$

Teorema de Tales

Entre os teoremas mais importantes que tratam de segmentos proporcionais, o mais conhecido é, certamente, o teorema de Tales. Seu enunciado clássico é:

Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.

$$\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BE} \,//\, \overleftrightarrow{CF} \Leftrightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

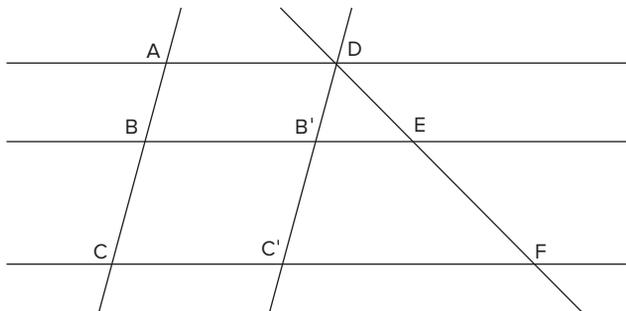
Em outros termos, esse teorema garante que o ponto B divida o segmento $\overline{AC}$ na mesma razão que o ponto E divide o segmento $\overline{DF}$

Existem muitas demonstrações desse teorema, mas é comum seguirmos a ideia da demonstração de Euclides No entanto, essa prova é incompleta, pois admite que todos os segmentos sejam comensuráveis, como se acreditava na Grécia Antiga Outra demonstração desse teorema encontra-se no livro *Geometria Moderna*, de Moise Downs, e utiliza a noção postulada da área do retângulo como sendo o produto da medida da base pela medida da altura do retângulo

A partir dessa noção, podemos concluir que:

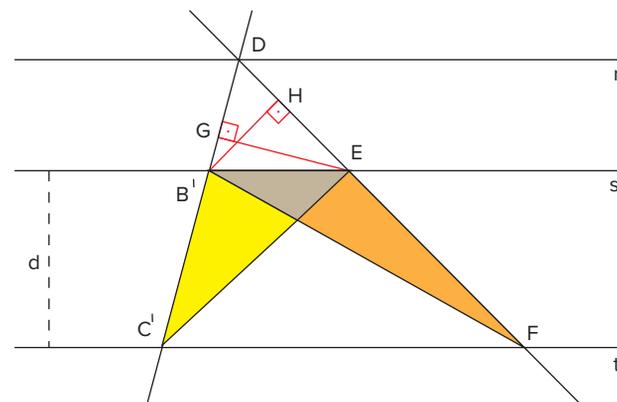
- A área de um paralelogramo também resulta do produto entre os comprimentos da base e da altura
- A área de um triângulo é igual à metade do produto entre os comprimentos da base e da altura
- Se dois triângulos têm bases de mesmo comprimento e alturas de mesmo comprimento, então esses triângulos também têm a mesma área

Veja a demonstração:

Traçando uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, passando pelo ponto D da figura anterior, obtemos dois pontos sobre as retas $\overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{CF}$

Sendo esses pontos B' e C', a nova figura apresenta os paralelogramos ABB'D e BCC'B', bem como o triângulo DB'E e o trapézio B'C'FE

Como os lados opostos de um paralelogramo têm o mesmo comprimento, temos que AB = DB' e BC = B'C'

Assim, provando que $\frac{B'D}{DE} = \frac{B'C'}{EF}$, também ficará provado que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

Agora vamos considerar as alturas $\overline{EG}$ e $\overline{B'H}$ do mesmo triângulo DB'E, as diagonais $\overline{B'F}$ e $\overline{C'E}$ do trapézio e a distância d entre as retas paralelas *s* e *t*.

Adotando o lado $\overline{DB'}$ como base, a área do triângulo DB'E será expressa por:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot B'D \cdot GE$$

Adotando o lado $\overline{DE}$ como base, a área do triângulo DB'E será expressa por:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot B'H$$

Como se trata do mesmo triângulo:

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow B'D \cdot GE = DE \cdot B'H$$

Como nenhum desses segmentos é nulo, temos:

$$\frac{B'D}{DE} = \frac{B'H}{GE} \quad (I)$$

Adotando o lado $\overline{B'C}$ como base, a área do triângulo B'C'E será expressa por:

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot B'C' \cdot GE$$

Adotando o lado $\overline{EF}$ como base, a área do triângulo B'EF será expressa por:

$$S_4 = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot B'H$$

Observe que as áreas dos triângulos B'C'E e B'EF são iguais, pois têm a mesma base $\overline{B'E}$ e alturas de mesmo comprimento, igual à distância d entre as paralelas *s* e *t*. Assim:

$$S_3 = S_4 \Leftrightarrow B'C' \cdot GE = EF \cdot B'H$$

Novamente, como nenhum desses segmentos é nulo:

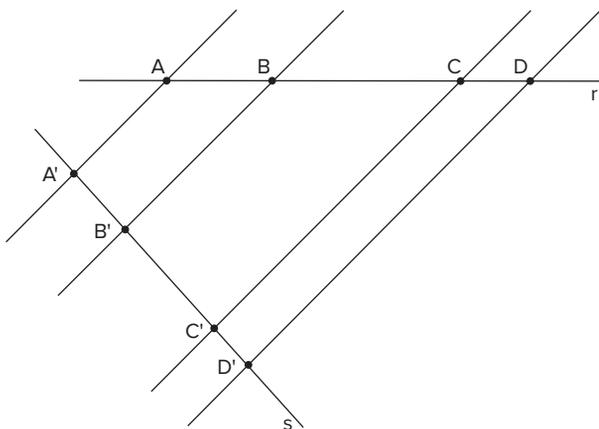
$$\frac{B'C'}{EF} = \frac{B'H}{GE} \quad (II)$$

Como a fração $\frac{B'H}{GE}$ está presente nas proporções (I) e (II), temos que $\frac{B'D}{DE} = \frac{B'C'}{EF}$

Saiba mais

Proporções geométricas decorrentes do teorema de Tales

Há duas maneiras de obtermos equações algébricas que expressem as proporções garantidas pelo teorema de Tales.

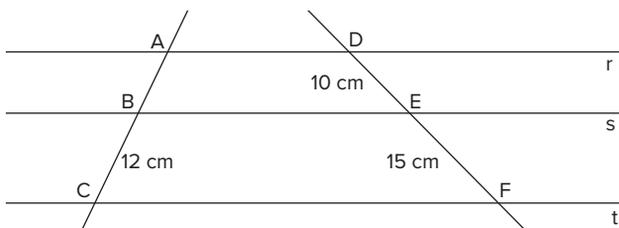
Considere que um feixe de quatro retas paralelas *a*, *b*, *c* e *d* intercepte duas transversais *r* e *s* nos pontos A, B, C, D, A', B', C' e D', como mostra a figura a seguir:

Uma das maneiras consiste em usar as medidas de dois segmentos de uma mesma transversal como numerador e denominador de uma mesma fração da equação, desde que as medidas dos segmentos correspondentes na outra transversal sejam respectivamente usadas como numerador e denominador da outra fração da equação. Essa técnica permite expressar 15 diferentes proporções entre as medidas dos segmentos da figura Veja algumas:

$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ $\frac{AC}{AD} = \frac{A'C'}{A'D'}$ $\frac{AC}{BD} = \frac{A'C'}{B'D'}$ $\frac{BC}{AD} = \frac{B'C'}{A'D'}$

A outra maneira de se obter equações que expressem as proporções entre os segmentos da figura consiste em encontrar uma constante de proporcionalidade *k* entre os segmentos de uma transversal e seus correspondentes na outra. Para isso, basta usar as medidas dos segmentos de uma mesma transversal sempre como numeradores das frações da proporção, e as medidas dos segmentos correspondentes na outra transversal como denominadores das mesmas frações Essa técnica permite expressar a constante *k* por meio de seis frações equivalentes:

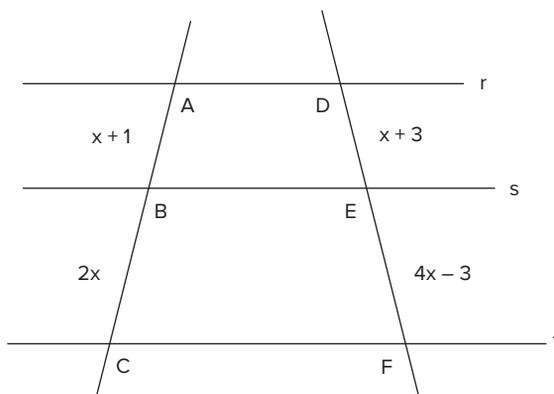
$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{AD}{A'D'}$$

Exercícios resolvidos

4 Sabendo que as retas *r*, *s* e *t* são paralelas, determine o valor da medida do segmento $\overline{AB}$ na figura a seguir.

Resolução:

Pelo teorema de Tales:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{AB}{10\ cm} = \frac{12\ cm}{15\ cm} \Rightarrow AB = 8\ cm$$

5 Na figura a seguir, as retas *r*, *s* e *t* são paralelas. Sabendo disso, calcule os possíveis valores dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$.

Resolução:

Pelo teorema de Tales: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$. Assim:

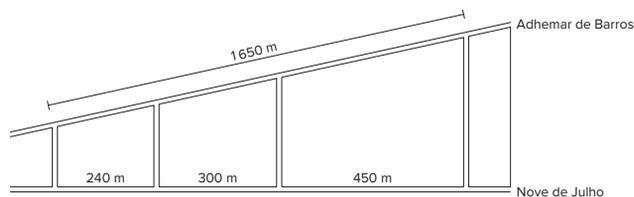
$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{2x}{4x\quad 3} \Rightarrow (x+1)(4x-3) = 2x(x+3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3x + 4x - 3 = 2x^2 + 6x \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = (\quad 5)^2 \quad \cdot 4 \cdot 2\ (\quad 3) = 25 + 24 = 49$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \quad \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como EF > 0, x_2 deve ser desconsiderado, pois neste caso teríamos $\overline{EF}$ com comprimento igual a $4x \;=3 \quad 4\left(\;\frac{1}{2}\right) =3 \;= 2 \quad 3 \qquad 5$. Portanto, para $x_1 =$ 3, temos: AC = 3x + 1 = 10 e DF = 5x = 15.

6 Quatro alamedas paralelas ligam a Avenida Nove de Julho à Avenida Adhemar de Barros, como mostra a figura. Uma pessoa que anda pela Avenida Adhemar de Barros percorre 1650 m entre as esquinas da pri meira e da última alameda.

Determine os comprimentos, em metros, de cada quadra da Avenida Adhemar de Barros, sabendo que, na Avenida Nove de Julho, elas têm, respectivamente, 240 m, 300 m e 450 m de comprimento.

Resolução:

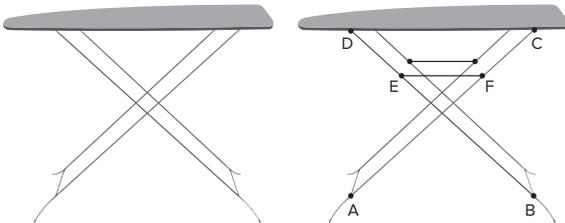
Sendo *x*, *y* e *z* as medidas das quadras da Avenida Adhemar de Barros e, como as alamedas são paralelas, pelo teorema de Tales, temos que:

$$\frac{x}{1650} = \frac{240}{240+300+450} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x}{1650} = \frac{240}{990} \Rightarrow x = 400 \text{ m}$$

Ainda de acordo com o teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{240}{300} \Leftrightarrow \frac{400}{y} = \frac{240}{300} \Rightarrow y = 500 \text{ m}$$

Então, como $x + y + z = 1650$, temos que $z = 750$.

7 Um fabricante de tábuas de passar roupas precisa instalar nos seus produtos uma haste de segurança, que deve ser encaixada em orifícios feitos nos pontos E e F das pernas da tábua, como mostra a ilustração.

Sabendo que os comprimentos AC e BD das pernas da tábua são, respectivamente, 114 cm e 96 cm, e que o orifício E foi feito a 20 cm de distância do ponto D, a que distância do ponto C deve ser feito o orifício F para que a haste $\overline{EF}$ fique paralela aos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$?

A 15,02 cm.
B 16,84 cm.
C 20,45 cm
D 23,75 cm.
E 25,50 cm.

Resolução:

O enunciado apresenta as seguintes medidas em centímetros: $AC = 114$ cm, $BD = 96$ cm, $DE = 20$ cm. Assim, sendo x a medida em centímetros do segmento CF, pelo teorema de Tales temos:

$$\frac{CF}{AC} = \frac{DE}{BD} \Leftrightarrow \frac{x}{114} = \frac{20}{96} \Rightarrow x = 23,75 \text{ cm}$$

Alternativa: D.

! Atenção

O teorema de Tales não diz nada a respeito das medidas dos seg mentos que são determinados no feixe de retas paralelas. Portanto, as relações entre as medidas dos segmentos paralelos só podem ser expressas por outros modelos da Geometria Euclidiana, como o da semelhança de triângulos. Mas, antes de estudarmos esse modelo, vamos explorar a ideia de figuras semelhantes.

Saiba mais

Um estudo mais aprofundado das propriedades algébricas das proporções pode facilitar os processos para a resolução de questões geométricas que envolvem o assunto abordado neste capítulo Conheça algumas dessas propriedades:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Semelhança

Quando dizemos que duas figuras são semelhantes, queremos dizer que elas têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Vejamos alguns casos:

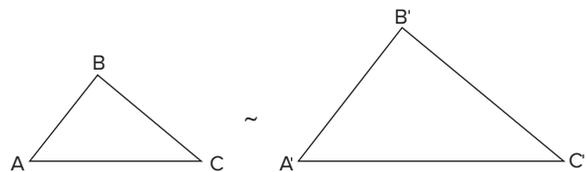
- Todos os quadrados são semelhantes, pois têm a mesma forma.
- Todos os círculos são semelhantes, pois têm a mesma forma.
- Os retângulos não são todos semelhantes, pois suas formas diferem muito de um para outro.
- Os triângulos também não são todos semelhantes, pois podem ser equiláteros, escalenos ou isósceles.
- Todos os triângulos equiláteros serão considerados semelhantes, pois têm a mesma forma.

Rigorosamente, duas figuras serão consideradas semelhantes quando todos os comprimentos correspondentes forem proporcionais e todos os ângulos correspondentes forem congruentes.

A seguir, vamos explorar o caso da semelhança de triângulos.

Semelhança de triângulos

Como vimos, dois triângulos serão considerados seme lhantes se as medidas dos lados correspondentes forem proporcionais e os ângulos correspondentes forem con gruentes

~

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k \\ \hat{A} = \hat{A'} \text{ e } \hat{B} = \hat{B'} \text{ e } \hat{C} = \hat{C'} \end{cases}$$

Indicamos por *k* a razão de semelhança entre os triângulos.

De acordo com essa definição de semelhança e usando propriedades simples de proporções, podemos provar que todas as medidas e comprimentos correspondentes são proporcionais, ou seja, não são apenas os lados que estão na mesma razão; as alturas, as medianas e os perímetros também estão na razão *k*.

Critérios de semelhança de triângulos

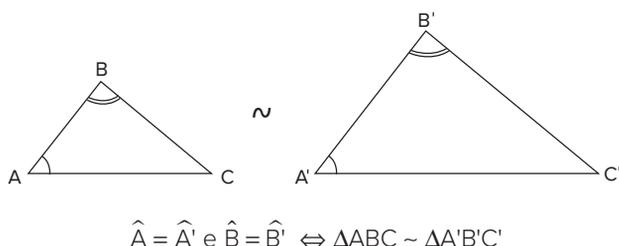
Para afirmar que dois triângulos são semelhantes, não é necessário conhecer todas as medidas dos ângulos e dos lados. Em alguns casos, sabendo poucas medidas, já é possível afirmar se os triângulos são ou não semelhantes.

A semelhança entre figuras geométricas é indicada pelo símbolo ~.

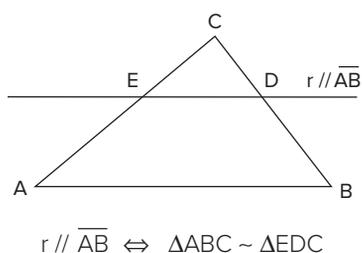
É correto afirmar que dois triângulos são semelhantes nos casos indicados a seguir.

Caso AA

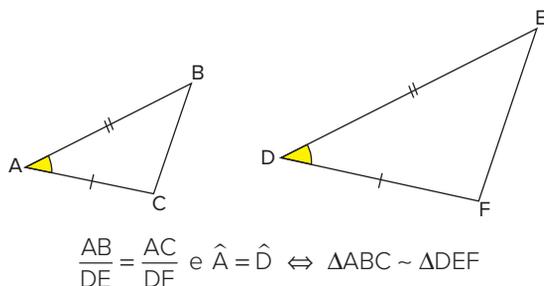
Se dois triângulos têm dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes.

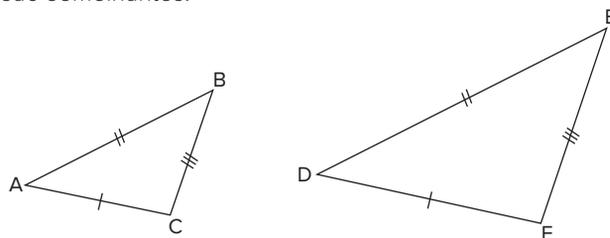
$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ e } \hat{B} = \hat{B}' \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Reta paralela a um lado do triângulo

Se uma reta paralela a um lado de um triângulo corta os outros dois lados, ela forma um novo triângulo semelhante ao original.

$$r \,//\, \overline{AB} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta EDC$$

Caso LAL

Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados homólogos (correspondentes) de outro triângulo, e se o ângulo formado por esses lados for congruente ao ângulo correspondente do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes

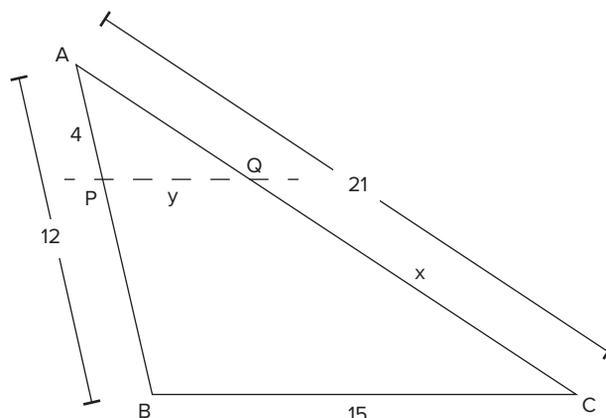
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \text{ e } \hat{A} = \hat{D} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Caso LLL

Se os três lados de um triângulo são proporcionais aos três lados de outro triângulo, então esses triângulos são semelhantes.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Exercícios resolvidos

8 Um ponto P situado no menor lado do triângulo ABC de lados AB = 12, BC = 15 e AC = 21 é tal que AP = 4 Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ desse triângulo passa pelo ponto P e determina um ponto Q sobre o lado $\overline{AC}$. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{CQ}$ e $\overline{PQ}$.

Resolução:

O enunciado pode ser representado pela seguinte figura:

A medida x de $\overline{CQ}$ pode ser obtida a partir do teorema de Tales, pois PQ // BC, logo: $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.

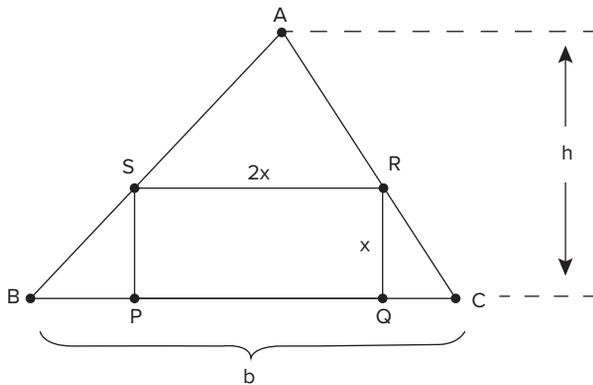
Observando que PB = 12 – 4 = 8 e AQ = 21 – x, temos: $\frac{4}{8} = \frac{21-x}{x}$. Resolvendo a equação, temos x = 14.

Já a medida *y* do segmento $\overline{PQ}$ pode ser obtida a partir da semelhança entre os triângulos APQ e ABC, apresentados na figura, pois como PQ // BC $\Rightarrow$ ΔAPQ ~ ΔABC

Dessa semelhança, temos: $\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC}$. Assim, resolvendo a equação $\frac{4}{12} = \frac{y}{15}$, temos y = 5.

Portanto, CQ = 14 e PQ = 5

FRENTE 3

9 **Fuvest** O retângulo PQRS está inscrito no triângulo ABC e tem sua base $\overline{PQ}$ com medida igual ao dobro de sua altura

Sendo *b* e *h* os valores da base e da altura do triângulo ABC, podemos afirmar que *x* vale:

A $\frac{hb}{h+b}$

B $\frac{hb}{2h+b}$

C $\frac{hb}{2(h+b)}$

D $\frac{hb}{h+2b}$

E $\frac{2hb}{h+b}$

Resolução:

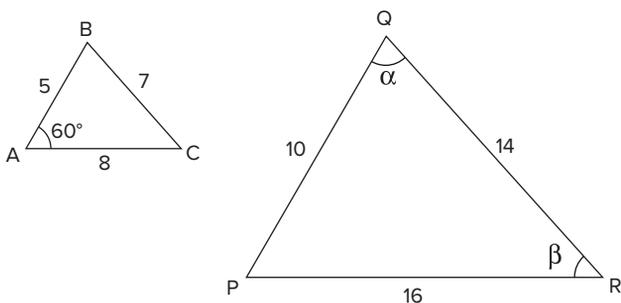
Como os lados opostos de um retângulo são paralelos, $\overline{SR}\ //\ \overline{BC} \Rightarrow \Delta ASR \sim \Delta ABC$.

Dessa semelhança, temos, por exemplo, que a razão entre as alturas desses triângulos é igual à razão entre suas bases. Assim:

$$\frac{h\ \ \ x}{h} = \frac{2x}{b} \Rightarrow 2xh = b(h\ \ \ x) \Rightarrow 2hx = bh\ \ bx$$

$$2\ \ x + bx = bh \Rightarrow x(2h+b) = bh \Rightarrow x = \frac{hb}{2h+b}$$

Alternativa: B

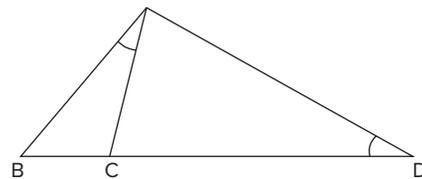
10 As medidas dos lados do triângulo ABC são AB = 5, AC = 8 e BC = 7. As medidas dos lados do triângulo PQR são PQ = 10, PR = 16 e QR = 14.

Sabendo que o ângulo interno de vértice A do triângulo menor mede 60°, determine a soma das medidas dos ângulos internos de vértices Q e R do triângulo maior

Resolução:

Observando que as medidas dos lados do triângulo menor correspondem à metade das medidas dos lados do triângulo maior, concluímos que $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$. Assim, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ pelo caso LLL.

Como o vértice A do triângulo menor corresponde ao vértice P do triângulo maior, o ângulo interno do vértice P do triângulo maior também mede 60°. Assim, sendo α e β as medidas dos outros dois ângulos do triângulo maior, temos que $\alpha + \beta + 60° = 180°$. Logo, $\alpha + \beta = 120°$.

11 Na figura a seguir, os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{D}C$ têm a mesma medida

Sabendo que AB = 12, AC = 7 e CD = 18, determine a medida do segmento $\overline{BC}$.

Resolução:

Nos triângulos ABC e DBA, o ângulo de vértice B é comum aos dois, e os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{D}C$ têm a mesma medida. Logo, podemos concluir que esses triângulos são semelhantes pelo caso AA. Assim:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{DA}$$

Então, sendo *x* a medida do segmento $\overline{BC}$, temos que:

$$\frac{12}{x+18} = \frac{x}{12} = \frac{7}{DA}$$

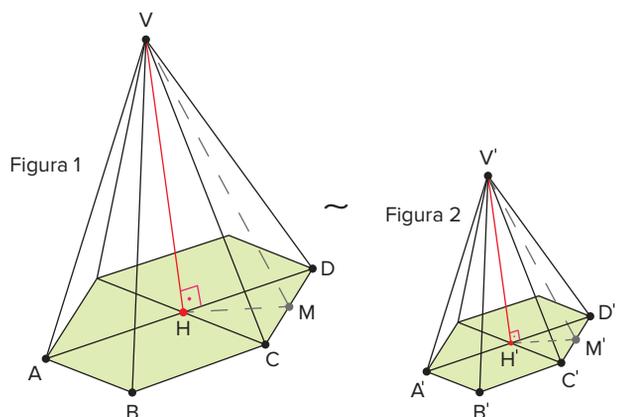
Do produto cruzado entre as primeiras razões da proporção, temos a equação:

$$x(x+18) = 12 \cdot 12 \Rightarrow x^2 + 18x - 144 = 0$$

$$\Delta = 18^2 \cdot\ \cdot 4\ \ 1\ (\ \ 144) = 324 + 576 = 900$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-18 \pm 30}{2} \begin{cases} \nearrow x_1 = 6 \\ \searrow x_2 = \ \ 24 \end{cases}$$

Como $x > 0$, podemos concluir que BC = 6.

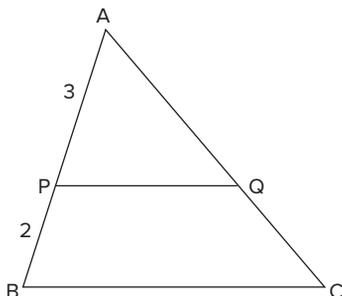
Duas figuras, mais complexas que os triângulos, também podem ser semelhantes uma a outra. Para isso, é necessário que todos os triângulos determinados pelos pontos de uma figura sejam semelhantes aos triângulos formados pelos pontos correspondentes na outra figura

Propriedades da razão de semelhança

Uma vez garantida a semelhança de duas figuras, basta tomarmos os comprimentos de dois segmentos correspondentes e dividir o valor de um pelo valor do outro para obtermos a **razão de semelhança** entre as duas figuras

O quociente entre quaisquer medidas de elementos que são correspondentes em figuras semelhantes resulta na potência k^n, sendo *k* a razão de semelhança e *n* o número de dimensões dos elementos medidos. Assim, se duas figuras geométricas são semelhantes, então:

- Os ângulos que se correspondem em cada figura têm a mesma medida
- A razão entre quaisquer comprimentos correspondentes é igual a *k*.
- A razão entre as áreas de regiões correspondentes é igual a k^2.
- A razão entre os volumes, no caso de serem figuras espaciais, é igual a k^3

Exercícios resolvidos

12 Na figura a seguir, o segmento $\overline{PQ}$ é paralelo à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC e divide os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ na razão de 3 para 2.

Se o triângulo APQ tem 18 cm^2 de área, qual é a área do triângulo ABC?

A 8 cm^2
B 12 cm^2.
C 27 cm^2.
D 30 cm^2
E 50 cm^2.

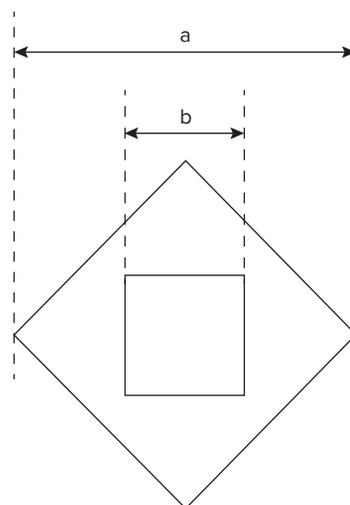
Resolução:

Os triângulos APQ e ABC são semelhantes, e a razão dessa semelhança é $k = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$.

Sendo X a área do triângulo ABC em centímetros quadrados, temos que $k^2 = \frac{18}{X}$ Assim:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{18}{X} \Rightarrow \frac{9}{25} = \frac{18}{X} \Rightarrow 9X = 25 \cdot 18 \Rightarrow X = 50$$

Alternativa: E

13 Na figura a seguir, o quadrado maior tem o triplo da área do quadrado menor.

Determine a razão $\frac{a}{b}$.

Resolução:

Todos os quadrados são semelhantes. Sendo $k > 0$ a razão de semelhança entre os quadrados da figura, a razão entre suas áreas é $k^2 = 3$, logo, $k = \sqrt{3}$. Como a diagonal do quadrado menor mede $b\sqrt{2}$, a razão entre as diagonais desses quadrados é $k = \frac{a}{b\sqrt{2}}$.

Portanto: $\frac{a}{b\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{6}$.

14 Na década de 1970, era difícil encontrar uma pista de dança sem um globo espelhado, que, na verdade, é uma esfera plástica (ou de isopor) revestida de pequenos pedaços quadrados de espelho. Considere dois desses globos: um completamente cercado por 500 pedaços de espelho, e outro menor com apenas 320. Se os pedaços usados em ambos são do mesmo tamanho, qual é o número inteiro mais próximo da razão entre seus volumes?

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

Resolução:

Como todas as esferas são figuras semelhantes, temos que *k* é a razão de semelhança entre a maior e a menor das esferas que dão formato aos globos espelhados.

A quantidade de pedaços de espelhos que cerca cada globo deve ser diretamente proporcional à área da superfície de cada esfera Portanto, $k^2 = \frac{500}{320} = \frac{25}{16}$ e, como $k > 0$, temos que $k = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

Assim, a razão entre os volumes dos globos é $k^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} = 1{,}953125 \cong 2$

Alternativa: B

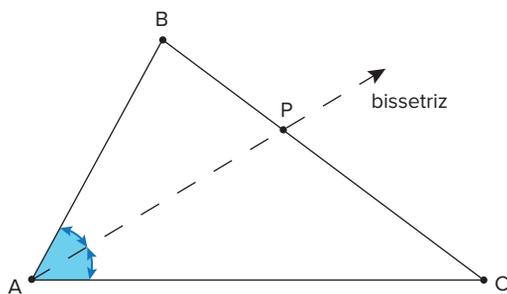
FRENTE 3

Teoremas decorrentes da semelhança e de Tales

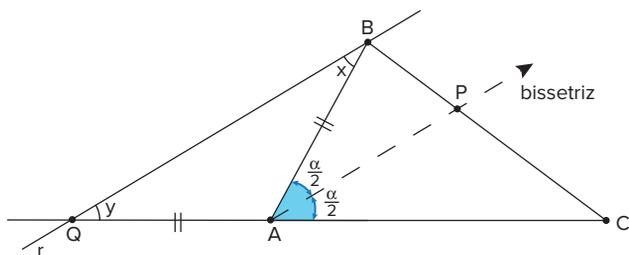
Muitos são os teoremas da Geometria Euclidiana que podem ser deduzidos a partir do teorema de Tales e do conceito de semelhança de triângulos Esses teoremas também dependem de algumas definições geométricas que veremos a seguir

Bissetriz interna

Chamamos de bissetriz interna o segmento de reta que une o vértice de um triângulo a um ponto do lado oposto a esse vértice, de modo que o ângulo interno do vértice fique dividido ao meio.

Teorema: as bissetrizes internas de um triângulo dividem os lados opostos aos ângulos de origem em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Na figura, se $B\hat{A}P = C\hat{A}P$, então $\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$.

Demonstração:

Considere a reta r que passa pelo ponto B e é paralela à bissetriz $\overrightarrow{AP}$. Considere também o ponto Q de interseção da reta r com o prolongamento do lado $\overline{AC}$ do triângulo.

Sejam $\alpha = med(B\hat{A}C)$, $x = med(A\hat{B}Q)$ e $y = med(B\hat{Q}C)$. Como $\overline{BQ} // \overline{AP}$, os ângulos alternos internos $A\hat{B}Q$ e $B\hat{A}P$, determinados pelo lado $\overline{AB}$ do triângulo, têm a mesma medida. Assim, $x = \frac{\alpha}{2}$.

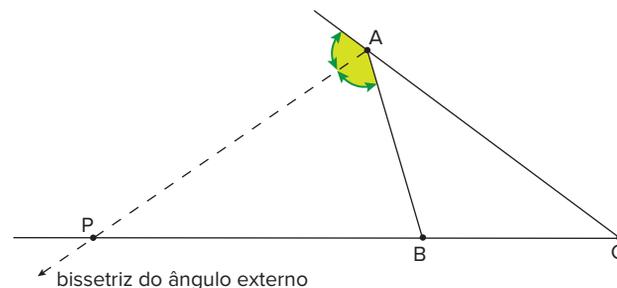
Pelo mesmo motivo, os ângulos correspondentes $B\hat{Q}C$ e $P\hat{A}C$, determinados pelo lado $\overline{AC}$ e seu prolongamento $\overline{AQ}$, têm a mesma medida, ou seja, $y = \frac{\alpha}{2}$.

Como $x = y$, o triângulo ABQ é isósceles de base $\overline{BQ}$; logo, QA = AB.

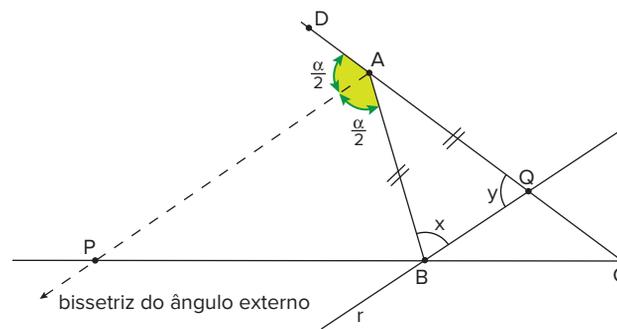
Pelo teorema de Tales, temos que $\frac{PB}{QA} = \frac{PC}{AC}$ Assim, substituindo QA por AB, temos $\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$.

Bissetriz externa

Chamamos de bissetriz externa o segmento de reta que une o vértice de um triângulo a um ponto do prolongamento do lado oposto a esse vértice, de modo que o ângulo externo do vértice fique dividido ao meio.

Teorema: as bissetrizes externas de um triângulo deter minam, no prolongamento do lado oposto, dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Na figura, se $\overrightarrow{AP}$ é bissetriz externa do triângulo ABC, então $\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$

Demonstração:

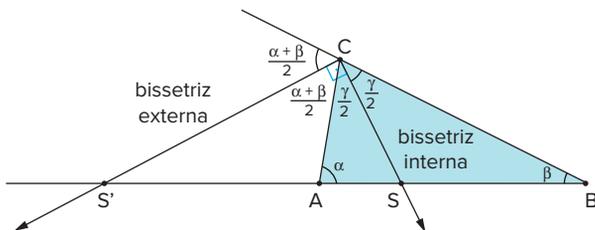
Considere a reta *r* que passa pelo ponto B e é paralela à bissetriz $\overrightarrow{AP}$. Considere também o ponto Q de interseção da reta *r* com o lado $\overline{AC}$ do triângulo, e um ponto D do prolongamento do lado $\overline{AC}$ no sentido de C para A

Sejam $\alpha = med(B\hat{A}D)$, $x = med(A\hat{B}Q)$ e $y = med(B\hat{Q}A)$. Como $\overline{BQ} // \overline{AP}$, os ângulos alternos internos $A\hat{B}Q$ e $B\hat{A}P$, determinados pelo lado $\overline{AB}$ do triângulo, têm a mesma medida. Assim, $x = \frac{\alpha}{2}$.

Pelo mesmo motivo, os ângulos correspondentes $B\hat{Q}A$ e $P\hat{A}D$, determinados pelo lado $\overline{AC}$ e seu prolongamento $\overline{AD}$, têm a mesma medida, ou seja: $y = \frac{\alpha}{2}$

Como $x = y$, o triângulo ABQ é isósceles de base $\overline{BQ}$, logo, QA = AB.

Pelo teorema de Tales, temos que $\frac{PB}{QA} = \frac{PC}{AC}$. Assim, substituindo QA por AB, temos $\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$.

Saiba mais

Os pontos onde as bissetrizes interna e externa que partem do mesmo vértice C de um triângulo ABC interceptam a reta $\overleftrightarrow{AB}$ são os conjugados harmônicos do segmento $\overline{AB}$ para uma mesma razão k ≠ 1

$$\frac{AS}{BS} = \frac{AS'}{BS'} = k \neq 1$$

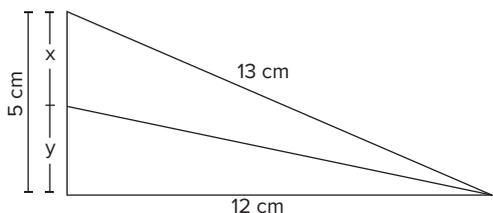
Também é importante observar que essas bissetrizes são perpendiculares entre si.

Exercícios resolvidos

15 A bissetriz do menor ângulo interno de um triângulo, cujos lados medem 5 cm, 12 cm e 13 cm, divide o lado oposto a esse ângulo em segmentos de reta que diferem um do outro em:

A 0,0 mm.
B 0,2 mm.
C 1,2 mm.
D 2,0 mm
E 2,2 mm.

Resolução:

Sendo *x* e *y* as medidas dos segmentos mencionados, o enunciado pode ser representado pela seguinte figura:

Pelo teorema da bissetriz interna do triângulo: $\frac{x}{y} = \frac{13 \text{ cm}}{12 \text{ cm}}$.

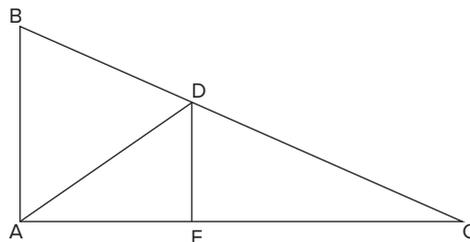
Então, como $x + y = 5$ cm $\Leftrightarrow$ $y = (5 - x)$ cm:

$$\frac{x}{5 \quad x} = \frac{13}{12} \Rightarrow 12x = 13 \cdot (5 \Rightarrow x)$$

$$\Rightarrow 12x = 65 \Rightarrow 13x \quad = 25x \Rightarrow 65 = \quad x \quad 2{,}6 \text{ cm}$$

Portanto, $y = 5 - 2{,}6 = 2{,}4$ cm.
Logo, a diferença será $x \quad y = 2{,}6 \quad 2{,}4 = 0{,}2$ cm $= 2$ mm.
Alternativa: D.

16 Na figura a seguir, ABC é um triângulo retângulo em A. O ponto D da hipotenusa $\overline{BC}$ e o ponto E do cateto $\overline{AC}$ determinam um segmento paralelo ao lado $\overline{AB}$.

Determine a medida AE sabendo que DE = 9, CD = 15 e os ângulos $A\hat{D}B$ e $A\hat{D}E$ são congruentes

Resolução:

Como $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$, o triângulo CDE também é retângulo. Assim, pelo teorema de Pitágoras:

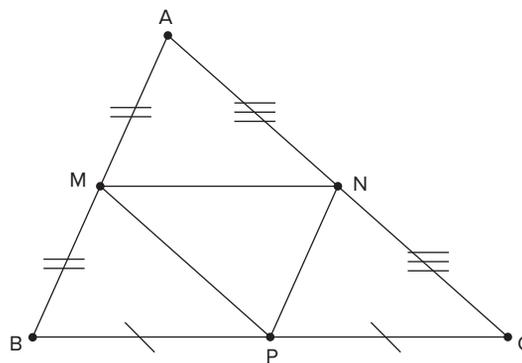
$$CD^2 = EC^2 + DE^2 \Leftrightarrow 15^2 = EC^2 + 9^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow EC^2 = 22\Rightarrow 5 \quad 81 \quad 144$$

Portanto, EC = 12.
Como $\overline{DA}$ é bissetriz do ângulo externo de vértice D do triângulo DEC, pelo teorema da bissetriz externa, temos que $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{DC}$.
Então, sendo x = AE:

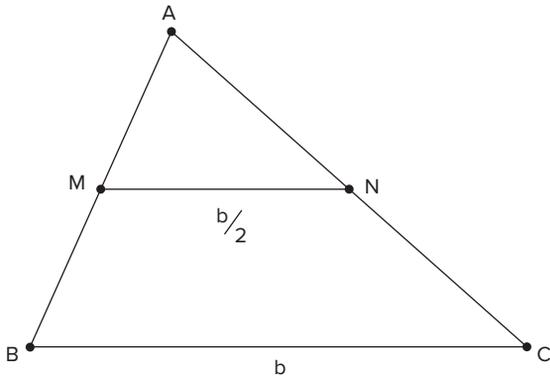
$$\frac{x}{x+12} = \frac{9}{15} \Leftrightarrow \frac{x}{x+12} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x = 3(x+12) \Rightarrow 5x = 3x + 36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = 18$$

Portanto, AE = 18.

Base média do triângulo

Qualquer segmento de reta com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo é uma base média do triângulo Desse modo, como qualquer lado de um triângulo pode ser considerado sua base, todo triângulo tem três bases médias

Na figura, como M é ponto médio de $\overline{AB}$ e N é ponto médio de $\overline{AC}$, então $\overline{MN}$ é a base média relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo. Porém, como P também é ponto médio de $\overline{BC}$, então $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$ também são bases médias relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triângulo, respectivamente

FRENTE 3

Teorema: cada base média de um triângulo é paralela e tem a metade do comprimento da base correspondente no triângulo.

$$AM = MB \text{ e } AN = NC \iff \overline{MN} \mathbin{//} \overline{BC} \text{ e } MN = \frac{BC}{2}$$

Demonstração:

Como AM = MB e AN = NC, então AB = 2 · AM e AC = 2 · AN, ou seja: $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = 2$

Assim, pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} \Rightarrow \overline{MN} \mathbin{//} \overline{BC}$$

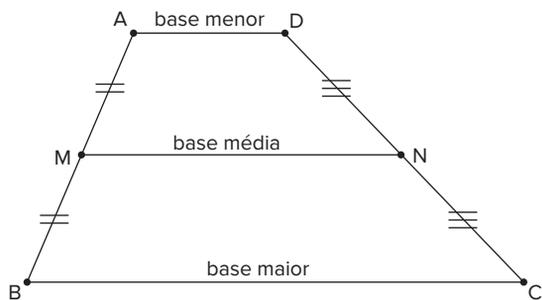
Então, como esse paralelismo garante a semelhança dos triângulos AMN e ABC:

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = 2 \Rightarrow BC = 2 \cdot MN \iff MN = \frac{BC}{2}$$

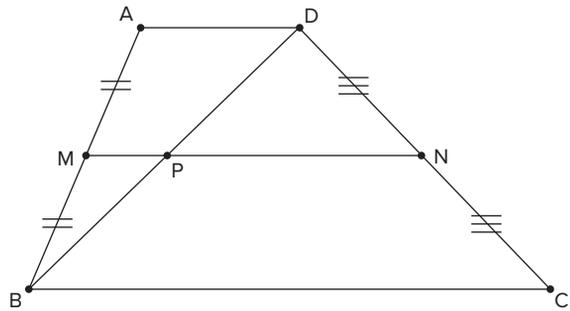
Base média do trapézio

O segmento que une os pontos médios dos lados oblíquos de um trapézio é chamado de base média do trapézio.

Teorema: a base média de um trapézio é paralela às bases dele e mede a média aritmética dos comprimentos dessas bases.

$$\text{Base média} = \frac{\text{base maior} + \text{base menor}}{2}$$

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC},\ AM = MB \text{ e } DN = NC \iff \overline{MN} \mathbin{//} \overline{AD} \mathbin{//} \overline{BC} \text{ e}$$
$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Demonstração:

Considere que a diagonal $\overline{BD}$ do trapézio ABCD intercepte sua base média no ponto P.

Como as igualdades AM = MB e DN = NC implicam $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC}$, pelo teorema de Tales, $\overline{MN} \mathbin{//} \overline{AD} \mathbin{//} \overline{BC}$.

Como AM = MB e $\overline{MP} \mathbin{//} \overline{AD}$, de acordo com o mesmo teorema, concluímos que BP = PD

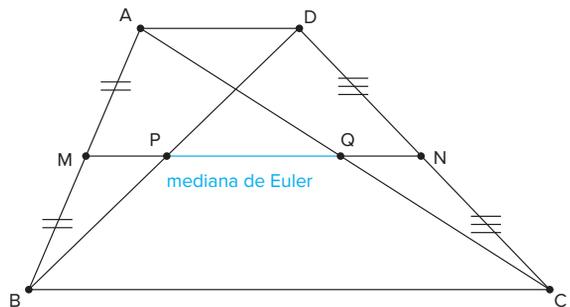
Portanto, $\overline{MP}$ é base média do triângulo ABD, logo, $MP = \frac{AD}{2}$.

Analogamente, $\overline{PN}$ é base média do triângulo BCD, logo, $PN = \frac{BC}{2}$.

Então, como MN = MP + PN:

$$MN = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} \iff MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Mediana de Euler

O segmento com extremidades nos pontos determinados pela base média de um trapézio em suas duas diagonais é chamado de mediana de Euler

Teorema: a mediana de Euler equivale à metade da diferença absoluta entre as bases de um trapézio.

$$\text{Mediana de Euler} = \frac{\text{base maior} \quad \text{base menor}}{2}$$

Demonstração:

Pelo teorema da base média do trapézio, temos que $\overline{AD} \mathbin{//} \overline{MN} \mathbin{//} \overline{BC}$. Assim, pelo teorema de Tales:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{DP}{PB} = \frac{DN}{NC}$$

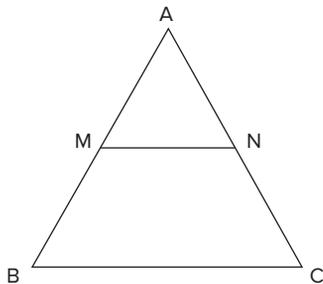
Portanto, P e Q são os respectivos pontos médios das diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ Então:

- como $\overline{MP}$ é base média relativa ao lado $\overline{AD}$ do ΔABD, temos: $MP = \dfrac{AD}{2}$
- como $\overline{MQ}$ é base média relativa ao lado $\overline{BC}$ do ΔABC, temos: $MQ = \dfrac{BC}{2}$.

Assim, como $PQ = MQ \quad MP$:

$$PQ = \frac{BC}{2} - \frac{AD}{2} \Leftrightarrow PQ = \frac{BC \quad AD}{2}$$

Exercícios resolvidos

17 Na figura a seguir, M e N são os pontos médios dos lados do triângulo equilátero ABC de lado 6 cm.

O perímetro do trapézio MNCB é de:

A 15 cm.
B 18 cm
C 21 cm.
D 12 cm.
E 9 cm

Resolução:

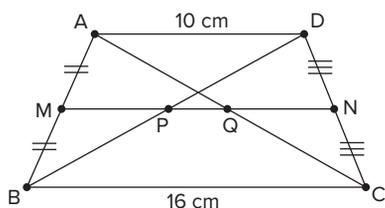
Como M e N são pontos médios dos lados do triângulo ABC, temos: $MB = NC = \dfrac{6\ cm}{2} = 3\ cm$.

Como $\overline{MN}$ é base média do triângulo ABC: $MN = \dfrac{6\ cm}{2} = 3\ cm$.

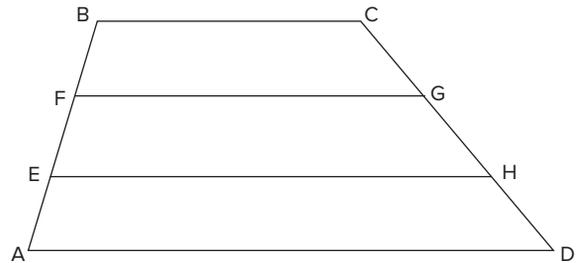
Portanto, o perímetro do trapézio MNCB mede:
$MN + NC + BC + MB = (3 + 3 + 6 + 3)\ cm = 15\ cm$
Alternativa: A.

18 Determine a medida da base média e da mediana de Euler de um trapézio ABCD cujas bases medem 10 cm e 16 cm.

Resolução:

O enunciado pode ser representado pela seguinte figura:

A base média desse trapézio é o segmento $\overline{MN}$, que mede: $\dfrac{16\ cm + 10\ cm}{2} = 13\ cm$

A mediana de Euler desse trapézio é o segmento $\overline{PQ}$, que mede: $\dfrac{16\ cm \quad 10\ cm}{2} = 3\ cm$.

19 No trapézio ABCD a seguir, os pontos E e F dividem o lado $\overline{AB}$ em três partes iguais, e os pontos G e H divi dem o lado $\overline{CD}$ em três partes também iguais.

Se BC = 10 e AD = 20, determine as medidas dos segmentos FG e EH.

Resolução:

A figura apresenta um total de 6 trapézios distintos. Considerando $x = FG$ e $y = EH$, concluímos:

- Como FG é base média do trapézio BCHE, então $x = \dfrac{y + 10}{2}$
- Como EH é base média do trapézio FGDA, então $y = \dfrac{x + 20}{2}$.

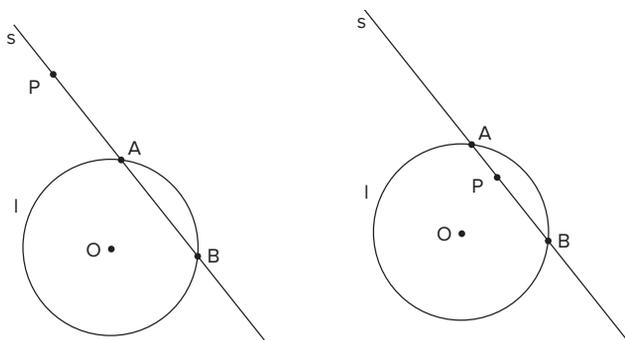
Da primeira equação, temos $2x = y + 10 \Leftrightarrow y = 2x - 10$.
Da segunda equação: $2y = x + 20$.
Substituindo a expressão de *y* na segunda equação:

$$2 \cdot (2x \quad 10) = x + 20$$
$$4x \quad = 20 + x \quad 20$$
$$3x = 40$$
$$x = \frac{40}{3}$$

Assim: $y = 2 \cdot \dfrac{40}{3} \Rightarrow 10 \quad = y \quad \dfrac{80 - 30}{3} \Rightarrow y = \dfrac{50}{3}$

Potência de um ponto em relação a uma circunferência

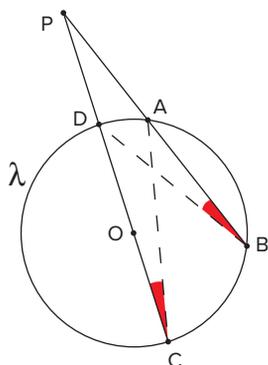
Considere, em um mesmo plano, um ponto P e uma circunferência λ de centro O e raio r Para toda reta s que passe por P e intercepte λ em dois pontos A e B, podemos definir a potência de P em relação a λ como o produto $PA \cdot PB$.

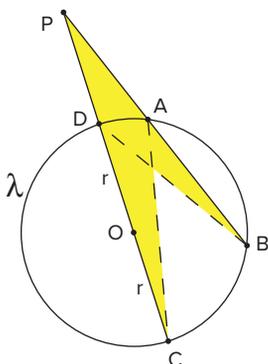
Inicialmente, há apenas dois casos a serem considerados: quando P está situado na região exterior da circunferência e quando P está situado em seu interior

$$Pot(P) = PA \cdot PB$$

Teorema: a potência de um ponto P em relação a uma circunferência λ de centro O e raio *r* equivale à diferença absoluta entre os quadrados de PO e *r*.

$$Pot(P) = |PO^2 - r^2|$$

Demonstração (primeiro caso):

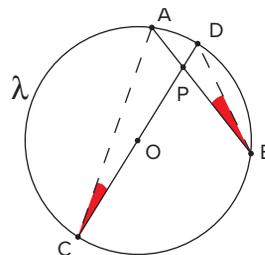
Considere o diâmetro $\overline{CD}$ contido na reta que passa pelo ponto P e pelo centro O da circunferência. Considere também as cordas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ da circunferência.

Pelo teorema do ângulo inscrito na circunferência, os ângulos $D\hat{C}A$ e $A\hat{B}D$ têm a mesma medida, pois ambos têm a metade da medida do menor arco $\overset{\frown}{AD}$ da circunferência.

Então, como $med(D\hat{C}A) = med(A\hat{B}D)$ e o ângulo de vértice P é comum aos triângulos PCA e PBD, a semelhança entre esses triângulos fica garantida pelo caso AA.

$$\Delta PCA \sim \Delta PBD \Leftrightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD} = \frac{AC}{DB}$$

Assim, pelo produto cruzado da primeira proporção entre os lados, indicada na sentença apresentada anteriormente:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$
$$PA \cdot PB = (PO + OC) \cdot (PO - OD)$$
$$PA \cdot PB = (PO + r) \cdot (PO \quad r)$$
$$PA \cdot PB = PO^2 \quad r^2$$
$$PA \cdot PB = |PO^2 \quad r^2|$$

Demonstração (segundo caso):

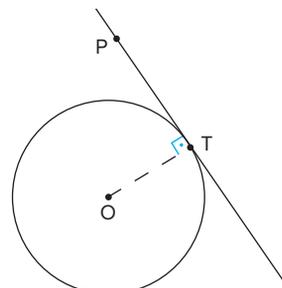
Considere novamente o diâmetro $\overline{CD}$ contido na reta que passa pelo ponto P e pelo centro O da circunferência Considere também as cordas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ da circunferência.

Pelo teorema do ângulo inscrito na circunferência, os ângulos $A\hat{C}D$ e $D\hat{B}A$ têm a mesma medida, pois ambos têm a metade da medida do menor arco $\overset{\frown}{AD}$ da circunferência

Então, como $med(A\hat{C}D) = med(D\hat{B}A)$ e $med(A\hat{P}C) =$ $= med\ D\hat{P}B$, pois esses ângulos são opostos pelo vértice, os triângulos PCA e PBD são semelhantes pelo caso AA.

$$\Delta PCA \sim \Delta PBD \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD}$$

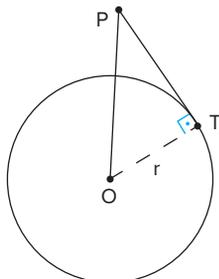
Assim, pelo produto cruzado da proporção:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$
$$PA \cdot PB = (PO + OC) \cdot (OD \quad PO)$$
$$PA \cdot PB = (PO + r) \cdot (r \quad PO)$$
$$PA \cdot PB = r^2 - PO^2$$
$$PA \cdot PB = |PO^2 - r^2|$$

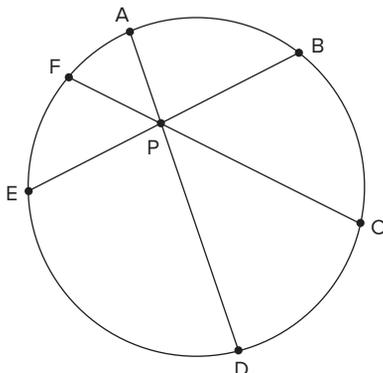
Há ainda um terceiro caso a ser considerado: quando, por um ponto P, situado na região exterior de uma circunferência, passa uma reta tangente a ela

$$Pot(P) = PT^2$$

Nesse caso, sendo T o ponto onde ocorre a tangência, a potência do ponto P em relação a essa circunferência pode ser expressa pelo quadrado da medida do segmento $\overline{PT}$.

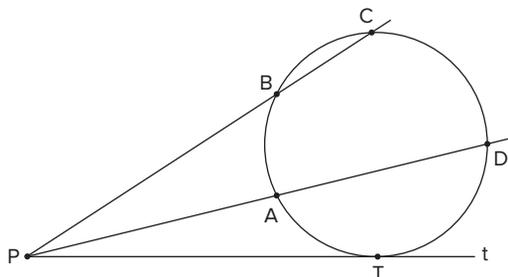
Demonstração (terceiro caso):

Considerando que o segmento $\overline{PO}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo OPT, pelo teorema de Pitágoras, temos $PO^2 = PT^2 + OT^2$

Então, como OT é um raio da circunferência: $PT^2 = PO^2 - r^2$.

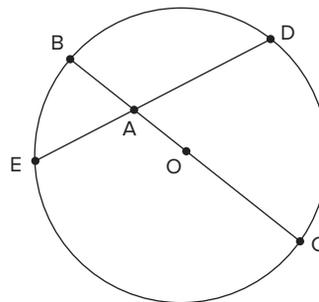
Saiba mais

É importante observar que o teorema da potência de um ponto em relação a uma circunferência não depende da posição das retas secantes que não passam pelo centro da circunferência

Desse modo, como o teorema diz que Pot(P) é constante em relação aos segmentos contidos nas cordas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{FC}$ dessa circunferência, então:

$$PA \cdot PD = PB \cdot PE = PC \cdot PF$$

Caso o ponto P seja exterior à circunferência, temos:

$$PT^2 = PA \cdot PD = PB \cdot PC$$

Exercícios resolvidos

20 Na figura a seguir, o ponto A é a interseção do diâmetro $\overline{BC}$ com uma corda $\overline{ED}$ da circunferência de centro O.

Determine o comprimento do raio dessa circunferência sabendo que:

- AE = 6 cm.
- AD = 10 cm.
- AO = 2 cm.

Resolução:

Sendo *r* a medida do raio da circunferência, a potência do ponto A em relação a essa circunferência é, pela definição, $Pot(A) = AE \cdot AD$, mas também é, pelo teorema da potência de ponto, $Pot(A) = |AO^2 \quad r^2|$. Assim: $|AO^2 - r^2| = AE \cdot AD$.

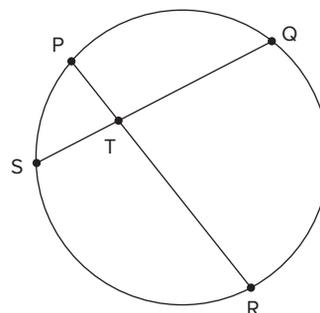
Como r > AO, pois o ponto A está situado no interior da circunferência, então:

$$r^2 \quad = 2^2 \cdot \; 6 \;\; 10$$
$$r^2 = 60 + 4$$
$$r^2 = 64$$

Portanto, r = 8 cm.

21 Os pontos P, Q, R e S pertencem a uma mesma cir cunferência e estão posicionados nessa ordem, no sentido horário As cordas $\overline{PR}$ e $\overline{QS}$ interceptam-se no ponto T de tal modo que TP = 2, TS = 4 e TR = 6 Cal cule a medida do segmento $\overline{TQ}$

Resolução:

De acordo com o enunciado, podemos representar a seguinte figura:

Na corda $\overline{PR}$: $Pot(T) = TP \cdot TR$.

Na corda $\overline{QS}$: $Pot(T) = TS \cdot TQ$.

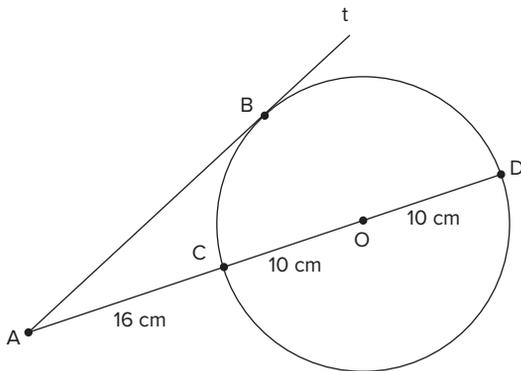
FRENTE 3

Então, como a potência de um ponto em relação a uma circunferência é constante:

$$TP \cdot TR = TS \cdot TQ$$
$$2 \cdot 6 = 4 \cdot TQ$$
$$12 = 4 \cdot TQ$$
$$TQ = \frac{12}{4} = 3$$

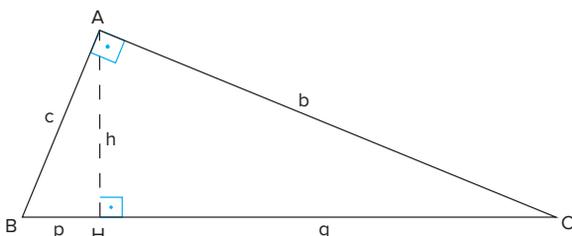
22 Por um ponto A, situado a 16 cm de distância de uma circunferência, passa uma reta que tangencia essa circunferência em um ponto B. Se o raio da circunferência mede 10 cm, qual é o comprimento do segmento $\overline{AB}$?

Resolução:

Sendo $\overline{CD}$ o diâmetro da circunferência determinado pela reta $\overleftrightarrow{AO}$, de acordo com o enunciado, podemos representar a seguinte figura:

Na reta secante $\overleftrightarrow{AO}$: $Pot(A) = AC \cdot AD$.
Na reta tangente $\overleftrightarrow{AB}$: $Pot(A) = AB^2$.
Então, como a potência de um ponto em relação a uma circunferência é constante:

$$AB^2 = AC \cdot AD$$
$$AB^2 = 16 \cdot (16 + 10 + 10)$$
$$AB^2 = 16 \cdot 36$$
$$AB = \sqrt{16 \cdot 36}$$
$$AB = 4 \cdot 6$$
$$AB = 24 \text{ cm}$$

Relações métricas no triângulo retângulo

Traçando a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, obtemos dois segmentos denominados projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

No triângulo ABC da figura:

- A medida da hipotenusa é $BC = a$.
- As medidas dos catetos são $AB = c$ e $AC = b$.
- A altura relativa à hipotenusa desse triângulo é $AH = h$.
- As medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa são $BH = p$ e $CH = q$.

$\overline{BH}$ é a projeção do cateto $\overline{AB}$.
$\overline{CH}$ é a projeção do cateto $\overline{AC}$.
Observe, ainda, que a medida da hipotenusa é a soma das medidas das projeções, ou seja, $a = p + q$.

Teoremas:

1 O produto da medida da altura pela medida da hipotenusa equivale ao produto das medidas dos catetos

$$a \cdot h = b \cdot c$$

2. O quadrado da medida de um cateto equivale ao produto das medidas da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

$$b^2 = a \cdot q \qquad c^2 = a \cdot p$$

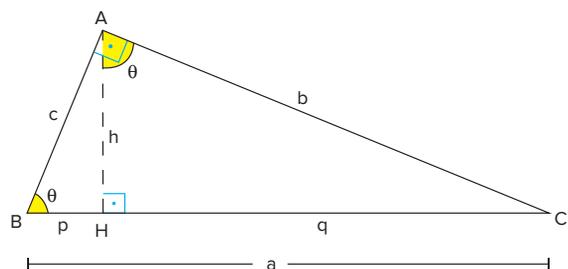
3. O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa equivale ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

$$h^2 = p \cdot q$$

Demonstração:

Se $\theta = med(\hat{B})$, pela soma dos ângulos internos do triângulo ABH, temos que $med(B\hat{A}H) = 90° - \theta$.

Então, como $B\hat{A}C$ é um ângulo reto:

$$med(H\hat{A}C) = 90° \quad med(B\hat{A}H)$$
$$med(H\hat{A}C) = 90° \quad (90 \quad \theta)$$
$$med(H\hat{A}C) = 90° \quad 90° + \theta$$
$$med(H\hat{A}C) = \theta$$

Como os triângulos ABC, HBA e HAC são todos re tângulos e possuem um ângulo interno de medida θ, concluímos que os três triângulos são semelhantes pelo caso AA

$$\Delta ABC \sim \Delta HAC \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a \cdot h = b \cdot c$$
$$\Delta ABC \sim \Delta HAC \Rightarrow \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{b}{q} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b^2 = a \cdot q$$
$$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{c}{p} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c^2 = a \cdot p$$
$$\Delta HAC \sim \Delta HBA \Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HA} \Rightarrow \frac{h}{p} = \frac{q}{h} \Leftrightarrow h^2 = p \cdot q$$

Observe que a soma das relações $b^2 = a \cdot q$ e $c^2 = a \cdot p$ produz outra possível demonstração para o teorema de Pitágoras:

$$a \cdot q + a \cdot p = b^2 + c^2$$
$$a \cdot (q + p) = b^2 + c^2$$
$$a \cdot a = b^2 + c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Exercícios resolvidos

23 Encontre a medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 dm e 4 dm.

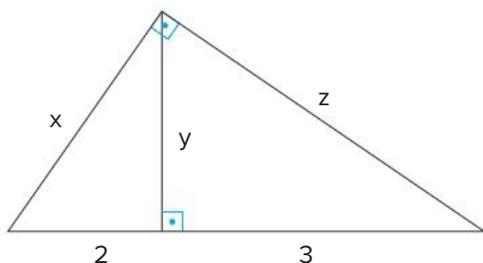
A 2,4 cm.
B 6,2 cm
C 10 cm.
D 20 cm.
E 24 cm.

Resolução:

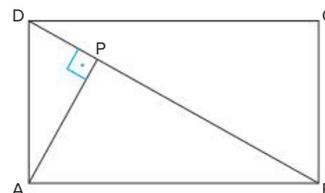
A partir do teorema de Pitágoras, verificamos que a hipotenusa do triângulo mede 5 dm = 50 cm.
Assim, como o produto da altura pela hipotenusa equivale ao produto dos catetos, sendo h a medida dessa altura em centímetros, temos:

$$h \cdot 50 = 30 \cdot 40$$
$$h = \frac{1200}{50}$$
$$h = 24 \text{ cm}$$

Alternativa: E.

24 Determine as medidas *x*, *y* e *z* na figura a seguir:

Resolução:

Como o quadrado da altura relativa à hipotenusa equivale ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, temos que $y^2 = 2 \cdot 3$, portanto, $y = \sqrt{6}$
Como o quadrado de cada cateto equivale ao produto de sua projeção na hipotenusa pela própria hipotenusa, temos $x^2 = 2 \cdot (2 + 3)$ e $z^2 = 3 \cdot (2 + 3)$. Assim, $x = \sqrt{10}$ e $z = \sqrt{15}$

25 No retângulo ABCD de lados AB = 3 cm e BC = $\sqrt{7}$ cm, o segmento $\overline{AP}$ é perpendicular à diagonal $\overline{BD}$.

O segmento $\overline{BP}$ mede, em centímetros:

A $\frac{9}{2}$
B $\frac{7}{4}$
C $\frac{9}{4}$
D $\frac{3}{4}$
E $\frac{5}{4}$

Resolução:

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCD temos $BD^2 = CD^2 + BC^2$. Então, como CD = AB:

$$BD^2 = 3^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2$$
$$BD^2 = 9 + 7$$
$$BD^2 = 16$$
$$BD = 4 \text{ cm}$$

No triângulo retângulo ABD, o segmento $\overline{BP}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{BD}$. Assim, como o quadrado de um cateto equivale ao produto de sua projeção pela hipotenusa:

$$AB^2 = BP \cdot BD$$
$$3^2 = BP \cdot 4$$
$$BP = \frac{9}{4} \text{ cm}$$

Alternativa: C.

Revisando

1 Considere cinco pontos colineares P, Q, R, S e T posicionados nessa ordem sobre uma reta r tais que:

- Q seja ponto médio do segmento PR;
- R seja ponto médio do segmento PS;
- S seja ponto médio do segmento QT;
- RS = 10 cm.

Faça uma figura que represente corretamente a situação apresentada e determine o comprimento de $\overline{PT}$.

2 Considere todos os pontos da reta que contém o segmento $\overline{AB}$ tais que a distância de cada um deles até uma das extremidades do segmento $\overline{AB}$ seja $\frac{2}{5}$ da distância do mesmo ponto até a outra extremidade. Agora, responda às seguintes perguntas:

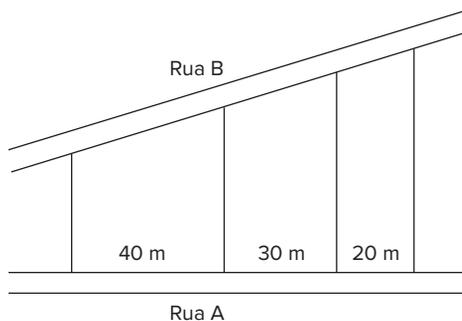
a) Quantos pontos há nessas condições?

b) Quantos segmentos de reta esses pontos determinam?

Considerando AB = 42, determine:

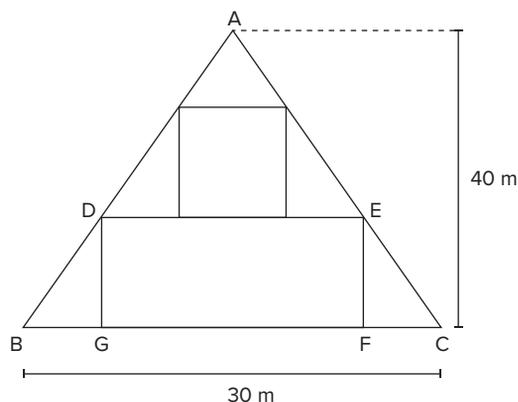
c) Qual o comprimento do menor segmento de reta que os pontos encontrados determinam?

d) Qual o comprimento do maior segmento de reta que os pontos encontrados determinam?

3 Três terrenos têm frente para a Rua A e para a Rua B, como mostra a figura. As divisas laterais são perpendiculares à Rua A. Quais as medidas das frentes de cada lote para a Rua B, sabendo que a frente total para essa rua tem 108 m?

A 48 m, 34 m e 26 m
B 48 m, 36 m e 24 m
C 46 m, 38 m e 24 m
D 44 m, 36 m e 28 m
E 46 m, 34 m e 28 m

4 **IFMG 2014** Numa festa junina, além da tradicional brincadeira de roubar bandeira no alto do pau de sebo, quem descobrisse a sua altura ganharia um prêmio. O ganhador do desafio fincou, paralelamente a esse mastro, um bastão de 1 m. Medindo-se as sombras projetadas no chão pelo bastão e pelo pau, ele encontrou, respectivamente, 25 dm e 125 dm. Portanto, a altura do pau de sebo, em metros, é

A 5,0
B 5,5
C 6,0
D 6,5

5 Em um triângulo ABC estão inscritos um retângulo e um quadrado, como mostra a figura:

Sabendo que os lados $\overline{DG}$ e $\overline{EF}$ do retângulo e os lados do quadrado têm a mesma medida, determine:

a) a medida do lado do quadrado

b) a medida da base $\overline{FG}$ do retângulo.

c) a porcentagem da área do triângulo ABC ocupada pelo triângulo ADE

6 **PUC-Rio 2012** Considere um triângulo ABC retângulo em A, onde AB = 21 e AC = 20. $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Quanto mede $\overline{AD}$?

A $\frac{42}{5}$

B $\frac{21}{20}$

C $\frac{20}{21}$

D 9

E 8

7 Assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo da distância entre os pontos de interseção das bissetrizes interna e externa, relativas ao vértice B do triângulo ABC com a reta $\overleftrightarrow{AC}$, sabendo que AB = = AC = 20 cm e BC = 5 cm.

A 10 cm.

B 11 cm.

C 12 cm.

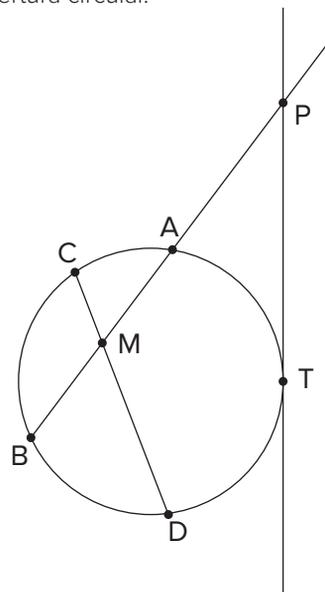
D 13 cm.

E 14 cm.

8 Os pontos P e Q pertencem aos lados oblíquos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ de um trapézio ABCD cujas bases medem AB = 1,8 m e CD = 80 cm. Se o segmento $\overline{PQ}$ é paralelo às bases do trapézio ABCD, qual deve ser a medida PQ para que os trapézios ABQP e PQCD:

a) tenham a mesma altura?

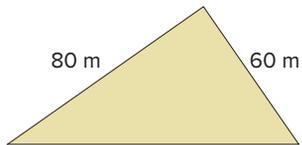
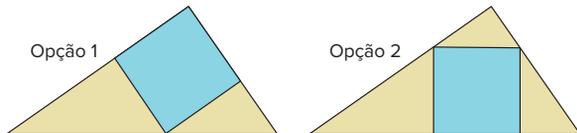
b) sejam semelhantes entre si?

9 Na figura a seguir, os pontos A, B, C, D e T indicam onde serão fixadas as colunas de uma construção com cobertura circular.

Nesse esquema, vemos duas retas secantes e uma reta tangente à circunferência no ponto T. Sabendo que M é o ponto médio de $\overline{AB}$, MC = $\sqrt{5}$ m, MD = $5\sqrt{5}$ m e PT = 12 m, determine:

a) o comprimento de $\overline{AB}$.

b) o comprimento de $\overline{AP}$.

FRENTE 3

10 Um terreno em formato de triângulo retângulo tem catetos que medem 60 m e 80 m, como mostra a figura a seguir.

Nele, será construído um casarão cuja base quadrada deve ficar inscrita de modo a ocupar a maior área possível do terreno. Para isso, o arquiteto considerou as seguintes opções:

Determine os comprimentos aproximados dos lados dos quadrados nas duas opções.

11 Um triângulo ABC tem lados AB = 26 m, BC = 24 m e AC = 10 m. No maior lado, toma-se um ponto P. Determine o valor da razão $\frac{AP}{BP}$ nos seguintes casos:

a) $\overline{CP}$ é bissetriz interna do triângulo ABC.

b) $\overline{CP}$ é altura do triângulo ABC.

12 Determine os comprimentos das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa BC de um triângulo retângulo ABC, sabendo que BC = 4 cm e que a altura relativa à hipotenusa mede 1 cm.

Exercícios propostos

1 Uma rodovia retilínea de extremidades A e B liga as cidades de Arlândia e Berlândia. Nessa rodovia, há apenas dois postos para abastecimento, localizados nos pontos X e Y, de modo que X fica no ponto médio do segmento de extremos A e B, e Y no ponto médio do segmento de extremos X e B. Benedito, que mora em Arlândia e precisava viajar a negócios para a cidade de Berlândia, pegou essa rodovia a partir do ponto A, mas, antes de chegar a seu destino, parou no posto Y para abastecer. Enquanto abastecia, Benedito verificou que tinha percorrido 51 km desde o momento em que entrou na rodovia e perguntou ao frentista quantos quilômetros ainda faltavam até a cidade de Berlândia.
Se as informações dadas no texto e a verificação feita por Benedito estão corretas, qual deve ser a resposta do frentista?
A 17 km.
B 34 km.
C 51 km.
D 68 km.
E 71 km.

2 **Fuvest** No segmento $\overline{AC}$, toma-se um ponto B de tal forma que $\frac{AB}{AC} = 2\frac{BC}{AB}$ Então, o valor de $\frac{BC}{AB}$ é:

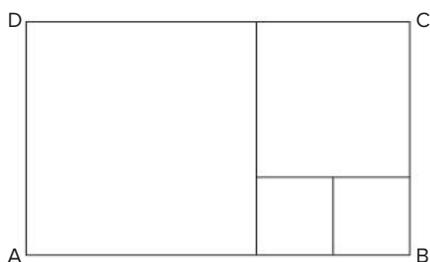
A $\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{3}\ \ 1}{2}$

C $\sqrt{5}\ \ 1$

D $\frac{\sqrt{5}\ \ 1}{2}$

E $\frac{\sqrt{5}\ \ 1}{3}$

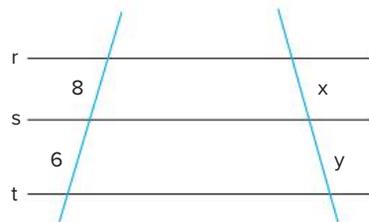
3 **Unicamp 2015** A figura a seguir exibe um retângulo ABCD decomposto em quatro quadrados.

O valor da razão $\frac{AB}{BC}$ é igual a:

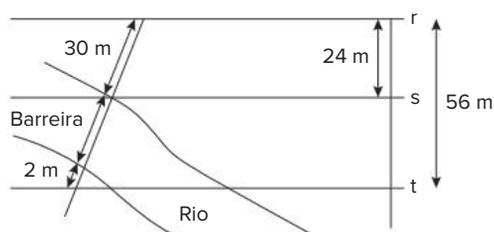
A $\frac{5}{3}$

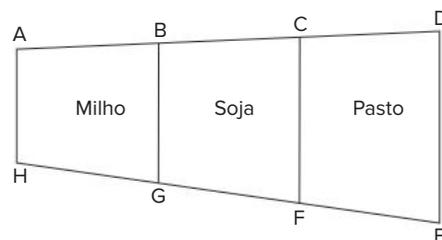
B $\frac{5}{2}$

C $\frac{4}{3}$

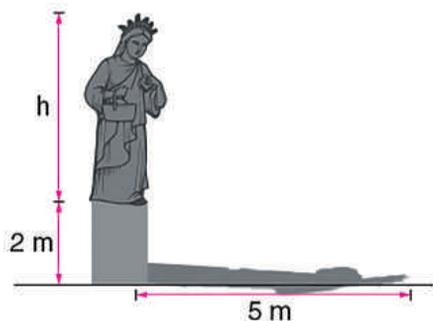
D $\frac{3}{2}$

4 **UFRRJ** Pedro está construindo uma fogueira, representada pela figura a seguir. Ele sabe que a soma de *x* com *y* é 42 e que as retas *r*, *s* e *t* são paralelas.

A diferença x – y é:
A 2 B 4 C 6 D 10 E 12

5 A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscar alternativas para a geração de energia elétrica necessária para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo de suas instalações.

Observando a figura e admitindo que as linhas retas r, s e t sejam paralelas, é correto afirmar que a barreira mede:
A 33 m
B 38 m
C 43 m
D 48 m
E 53 m

6 **CPS 2012** Para melhorar a qualidade do solo, aumentando a produtividade do milho e da soja, em uma fazenda, é feito o rodízio entre essas culturas e a área destinada ao pasto. Com essa finalidade, a área produtiva da fazenda foi dividida em três partes conforme a figura.

Considere que:
- os pontos A, B, C e D estão alinhados;
- os pontos H, G, F e E estão alinhados;
- os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são, dois a dois, paralelos entre si;
- AB = 500 m, BC = 600 m, CD = 700 m e HE = 1980 m.

Nessas condições, a medida do segmento $\overline{GF}$ é, em metros:
A 665
B 660
C 655
D 650
E 645

7 Instalada sobre um pedestal com 2 m de altura, uma estátua projeta uma sombra de 5 m sobre o solo plano em determinada hora do dia.

Uma pessoa consegue identificar onde termina a sombra do pedestal e começa a sombra da estátua no solo Se essa pessoa medir a distância *x*, em metros, desse ponto ao pedestal, ela poderá descobrir a altura, também em metros, a partir da expressão:

A $10x \quad 2$

B $\frac{10}{x} - 2$

C $10 \quad \frac{2}{x}$

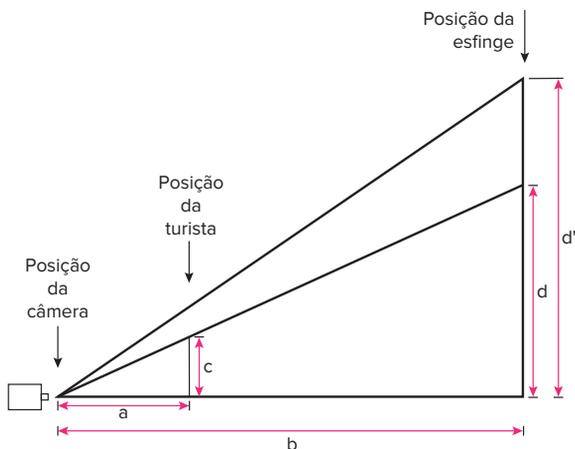
D $\frac{x}{5} \quad 10$

E $\frac{x}{2} - 5$

8 **Enem** A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir:

A 30 cm.
B 45 cm.
C 50 cm.
D 80 cm.
E 90 cm.

9 **Enem** A fotografia mostra uma turista aparentemente beijando a esfinge de Gizé, no Egito. A figura a seguir mostra como, na verdade, foram posicionadas a câmera fotográfica, a turista e a esfinge.

Fotografia obtida da internet.

Medindo-se com uma régua diretamente na fotografia, verifica-se que a medida do queixo até o alto da cabeça da turista é igual a 2/3 da medida do queixo da esfinge até o alto da sua cabeça. Considere que essas medidas na realidade são representadas por *d* e *d'*, respectivamente, que a distância da esfinge à lente da câmera fotográfica, localizada no plano horizontal do queixo da turista e da esfinge, é representada por *b*, e que a distância da turista à mesma lente, por *a*.
A razão entre *b* e *a* será dada por:

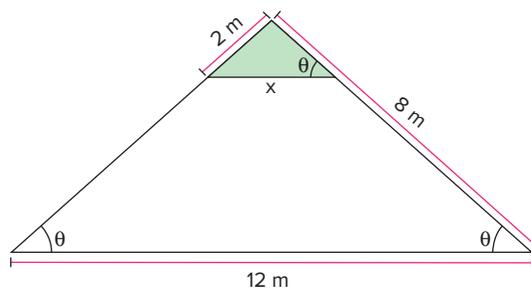
A $\frac{b}{a} = \frac{d'}{c}$

B $\frac{b}{a} = \frac{2d}{3c}$

C $\frac{b}{a} = \frac{3d'}{2c}$

D $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{3c}$

E $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{c}$

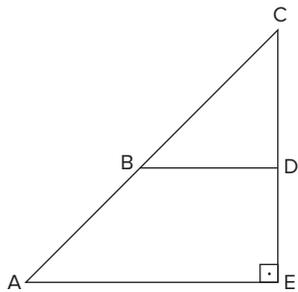
10 **PUC-RS 2014** Considere a imagem a seguir, que representa o fundo de uma piscina em forma de triângulo com a parte mais profunda destacada.

O valor em metros da medida “x” é:

A 2
B 2,5
C 3
D 4
E 6

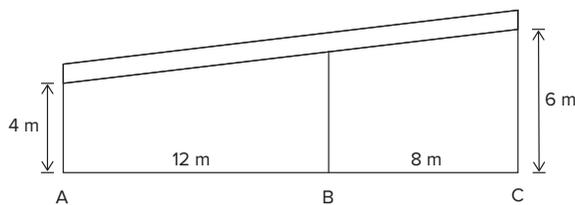
11 **Enem** A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

A 1,16 m.
B 3,0 m.
C 5,4 m.
D 5,6 m.
E 7,04 m.

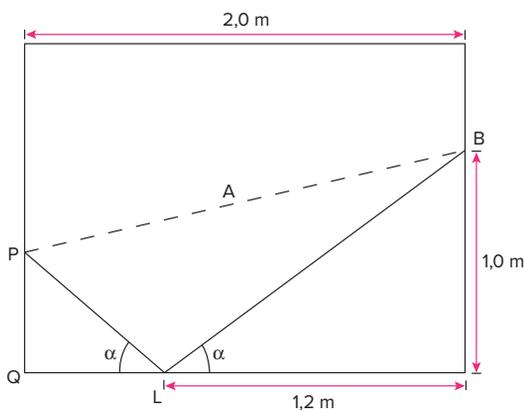
12 **IFMG 2014** A figura a seguir tem as seguintes características:

- o ângulo $\hat{E}$ é reto;
- o segmento de reta $\overline{AE}$ é paralelo ao segmento $\overline{BD}$;
- os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$ medem, respectivamente, 5, 4 e 3.

O segmento $\overline{AC}$, em unidades de comprimento, mede:

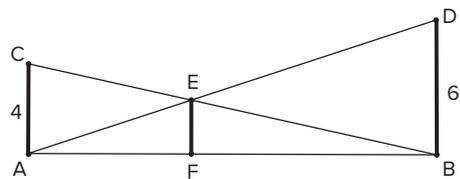
A 8
B 12
C 13
D $\sqrt{61}$
E $5\sqrt{10}$

13 **UFPR 2011** Um telhado inclinado reto foi construído sobre três suportes verticais de aço, colocados nos pontos A, B e C, como mostra a figura a seguir. Os suportes nas extremidades A e C medem, respectivamente, 4 metros e 6 metros de altura.

A altura do suporte em B é, então, de:

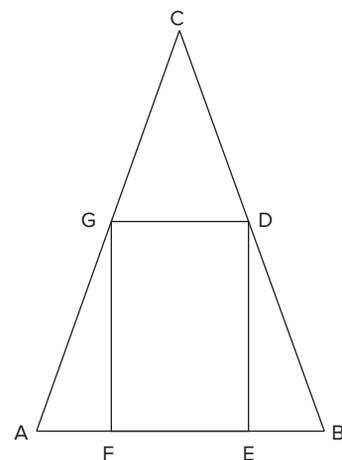
A 4,2 m.
B 4,5 m.
C 5 m.
D 5,2 m.
E 5,5 m.

14 **IFMG 2015** A ilustração a seguir representa uma mesa de sinuca retangular, de largura e comprimento iguais a 1,5 m e 2,0 m, respectivamente. Um jogador deve lançar a bola branca do ponto B e acertar a preta no ponto P, sem acertar em nenhuma outra antes. Como a amarela está no ponto A, esse jogador lançará a bola branca até o ponto L, de modo que a mesma possa rebater e colidir com a preta

Se o ângulo da trajetória de incidência da bola na lateral da mesa e o ângulo de rebatimento são iguais, como mostra a figura, então a distância de P a Q, em cm, é, aproximadamente:

A 67
B 70
C 74
D 81

15 **Enem 2013** O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, e a haste é representada pelo $\overline{EF}$, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados.

Qual deve ser o valor do comprimento da haste $\overline{EF}$?

A 1 m.
B 2 m.
C 2,4 m.
D 3 m.
E $2\sqrt{6}$ m.

16 **PUC-Rio** O retângulo DEFG está inscrito no triângulo isósceles ABC, como na figura a seguir.

Assumindo DE = GF = 12, EF = DG = 8 e AB = 15, a altura do triângulo ABC é:

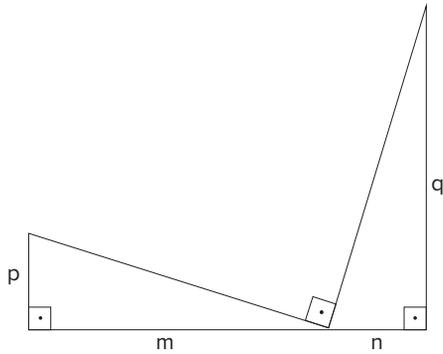
A $\frac{35}{4}$

B $\frac{150}{7}$

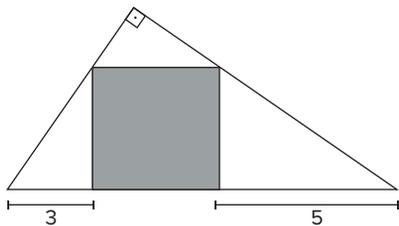
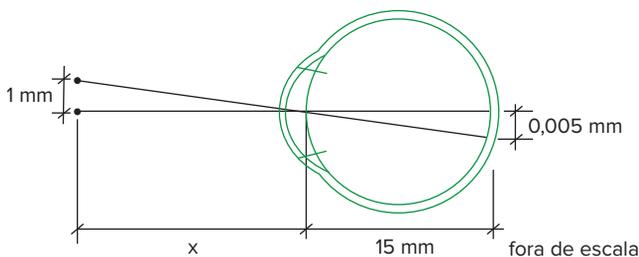
C $\frac{90}{7}$

D $\frac{180}{7}$

E $\frac{28}{5}$

17 Assinale a alternativa que apresenta uma relação correta entre as medidas *m*, *n*, *p* e *q* dos catetos dos dois triângulos retângulos da figura a seguir, em que os segmentos de medidas *m* e *n* são colineares.

A $p \cdot m = n \cdot q$
B $p \cdot n = m \cdot q$
C $p \cdot q = m \cdot n$
D $p + m = n + q$
E $p + q = m + n$

18 **Mackenzie 2011** A área do quadrado assinalado na figura é igual a:

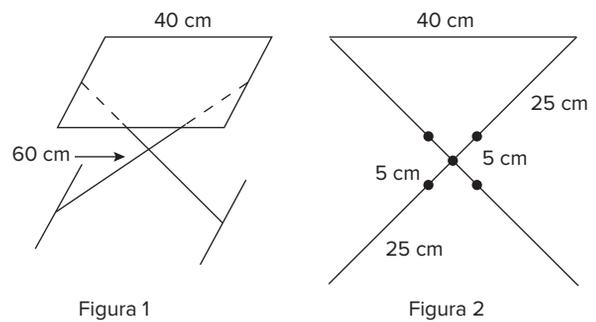
A 15
B 20
C 12
D 18
E 16

19 **Unesp 2011** Para que alguém, com o olho normal, possa distinguir um ponto separado de outro, é necessário que as imagens desses pontos, que são projetadas em sua retina, estejam separadas uma da outra a uma distância de 0,005 mm.

Adotando-se um modelo muito simplificado do olho humano no qual ele possa ser considerado uma esfera, cujo diâmetro médio é igual a 15 mm, a maior distância *x*, em metros, que dois pontos luminosos, distantes 1 mm um do outro, podem estar do observador, para que este os perceba separados, é:

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

20 **Fuvest 2014** Uma circunferência de raio 3 cm está inscrita no triângulo isósceles ABC, no qual AB = AC. A altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 8 cm. O comprimento de $\overline{BC}$ é, portanto, igual a:

A 24 cm.
B 13 cm.
C 12 cm.
D 9 cm.
E 7 cm.

21 **Fuvest** Um banco de altura regulável, cujo assento tem forma retangular, de comprimento 40 cm, apoia se sobre duas barras iguais, de comprimento 60 cm (ver Figura 1) Cada barra tem três furos, e o ajuste da altura do banco é feito colocando-se o parafuso nos primeiros, ou nos segundos, ou nos terceiros furos das barras (ver visão lateral do banco, na Figura 2).

Figura 1 Figura 2

A menor altura que pode ser obtida é:

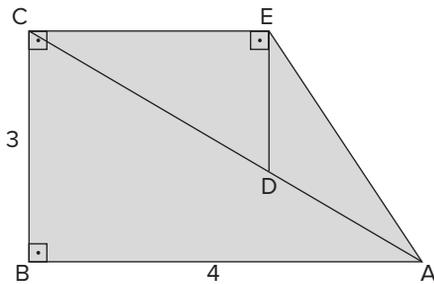
A 36 cm
B 38 cm
C 40 cm.
D 42 cm
E 44 cm

22 O futebol de mesa, também conhecido como "jogo de botão", é praticado sobre uma mesa de madeira que representa um campo de futebol em uma escala menor.

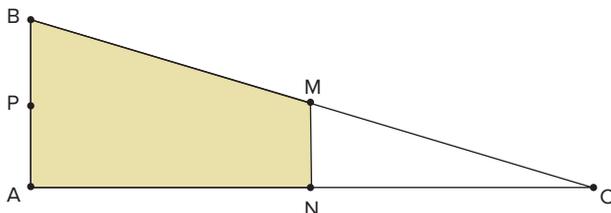
Luciano_Marques/iStockphoto.com

Se as dimensões das traves de um campo oficial de futebol são de 7,32 m : 2,44 m e as dimensões da trave de um “campo” de futebol de mesa são de 13,6 cm : 4,5 cm, então podemos concluir que essa escala de representação é de, aproximadamente:

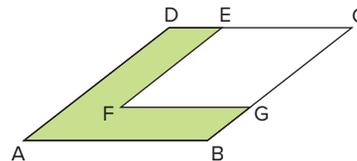
A 1 : 54000
B 1 : 5400
C 1 : 540
D 1 : 54
E 1 : 5,4

23 **ESPM 2012** Na figura a seguir, sabe-se que os ângulos $E\hat{A}D$ e $D\hat{E}A$ são congruentes.

A medida do segmento $\overline{CE}$ é igual a:

A 2,8
B 2,4
C 2,0
D 2,5
E 2,3

24 **Enem** Em canteiros de obras de construção civil, é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras

A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.
Nessas condições, a área a ser calçada corresponde:

A à mesma área do triângulo AMC.
B à mesma área do triângulo BNC.
C à metade da área formada pelo triângulo ABC.
D ao dobro da área do triângulo MNC.
E ao triplo da área do triângulo MNC.

25 **Unesp 2017** Na figura, o losango FGCE possui dois lados sobrepostos aos do losango ABCD e sua área é igual à área indicada em verde.

Se o lado do losango ABCD mede 6 cm, o lado do losango FGCE mede:

A $2\sqrt{5}$ cm.
B $2\sqrt{6}$ cm.
C $4\sqrt{2}$ cm.
D $3\sqrt{3}$ cm.
E $3\sqrt{2}$ cm

26 Uma distribuidora de alimentos oferece refeições para viagem em embalagens cúbicas de três tamanhos. A aresta da maior delas, chamada de “tamanho família”, mede o dobro da aresta da menor delas, que é chamada de “porção individual”.
Supondo que a “porção individual” seja honesta, ou seja, que alimente satisfatoriamente uma única pessoa, determine quantas pessoas a refeição “tamanho família” deve alimentar.

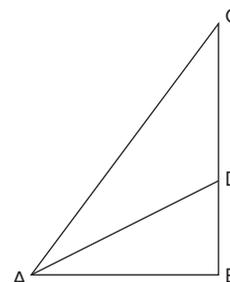
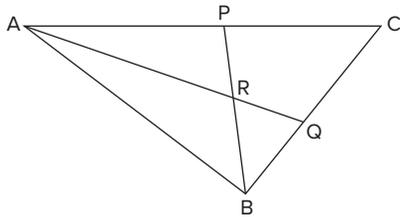
A 4 pessoas.
B 6 pessoas.
C 8 pessoas.
D 10 pessoas.
E 12 pessoas.

27 Se $\overline{BP}$ é uma bissetriz interna do triângulo ABC de lados AB = 12 cm, BC = 15 cm e AC = 9 cm, então as medidas dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$ são, respectivamente:

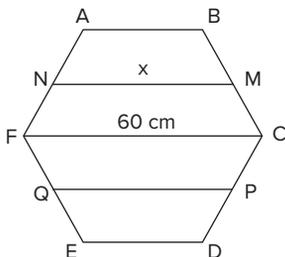
A 1 cm e 8 cm.
B 2 cm e 7 cm.
C 3 cm e 6 cm.
D 4 cm e 5 cm.
E 4,5 cm e 4,5 cm.

28 **PUC-Rio 2012** Seja ABC um triângulo retângulo em B. Seja $\overline{AD}$ a bissetriz de $C\hat{A}B$. Sabemos que $\overline{AB}$ mede 1 e que $\overline{BD}$ mede $\frac{1}{2}$. Quanto mede o cateto $\overline{BC}$?

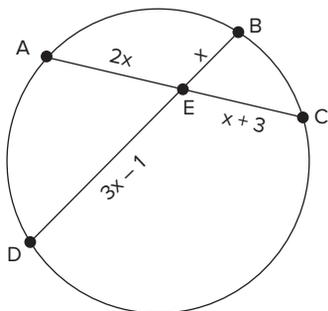
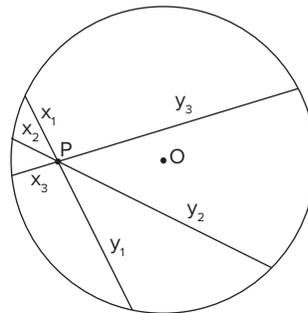
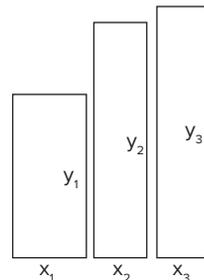
A 1
B 2
C $\frac{3}{2}$
D $\frac{4}{3}$
E $\sqrt{2}$

FRENTE 3

29 **FGV** Na figura, ABC é um triângulo com AC = 20 cm, AB = 15 cm e BC = 14 cm.

Sendo $\overline{AQ}$ e $\overline{BP}$ bissetrizes interiores do triângulo ABC, o quociente $\frac{QR}{AR}$ é igual a:

A 0,3
B 0,35
C 0,4
D 0,45
E 0,5

30 Uma loja de móveis vende estantes no formato de hexágonos regulares com cinco prateleiras paralelas, como mostra a ilustração a seguir.

As prateleiras menores da estante são os próprios lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ do hexágono ABCDEF. A prateleira maior, que mede 60 cm, ocupa a posição da diagonal $\overline{CF}$ do hexágono. As demais prateleiras se apoiam sobre os pontos médios M, N, P e Q dos lados do hexágono.
Assim, o comprimento x da prateleira $\overline{MN}$, em centímetros, é:

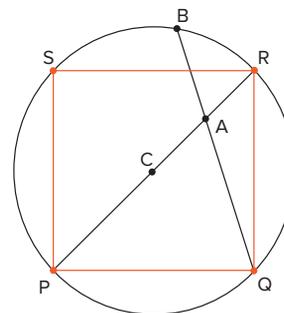
A 40 cm.
B 42 cm.
C 43 cm.
D 45 cm.
E 48 cm.

31 **Unesp 2014** Em um plano horizontal, encontram-se representadas uma circunferência e as cordas AC e BD. Nas condições apresentadas na figura, determine o valor de x.

32 Para determinar as dimensões x_n e y_n dos retângulos que serão usados na composição de um mosaico, um artista plástico tomou um ponto P diferente do centro de uma circunferência e traçou três cordas passando por esse ponto, determinando três pares de segmentos colineares, como mostra a Figura 1.

Depois, as medidas desses segmentos foram usadas para construir os retângulos da Figura 2 Sobre esses retângulos, é correto afirmar que todos:

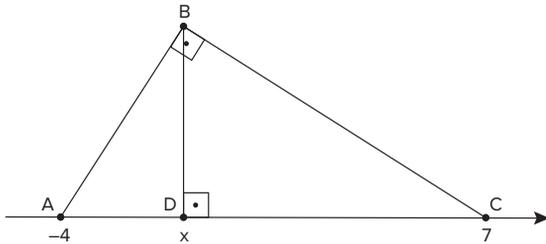
A têm o mesmo perímetro.
B têm a mesma área
C têm a mesma medida diagonal.
D são semelhantes.
E são inscritíveis numa mesma circunferência.

33 **UFSJ 2013** Considere uma corda $\overline{AB}$, perpendicular ao diâmetro $\overline{EC}$ de um círculo de centro O. Sendo o ponto D a interseção dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{EC}$ e sabendo que CD = 4 cm e ED = 9 cm, a área do triângulo AED, em cm^2, é igual a:

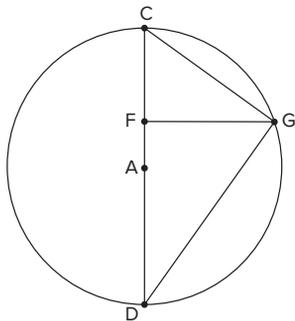
A 18
B 27
C 36
D 78

34 **FGV 2017** O quadrado PQRS está inscrito em um círculo de centro C. A corda $\overline{BQ}$ intersecta a diagonal $\overline{PR}$ do quadrado em A, sendo que QA = 6 cm e AB = 4 cm.

Nas condições descritas, a medida do lado do qua drado PQRS, em cm, é igual a

A $2\sqrt{10}$
B $5\sqrt{2}$
C $2\sqrt{15}$
D $6\sqrt{2}$
E $7\sqrt{2}$

35 **UFSCar** A hipotenusa do triângulo retângulo ABC está localizada sobre a reta real, conforme indica a figura.

Se $x > 0$ e a medida da altura $\overline{BD}$ relativa ao lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC é $2\sqrt{6}$, então *x* é o número real

A $2\sqrt{3}$
B 4
C $3\sqrt{2}$
D 5
E $3\sqrt{3}$

36 **IFMG 2017** Na figura, A é o centro da circunferência, $\overline{CD}$ é o diâmetro e $\overline{GF}$ é a altura do triângulo CDG.

Sendo CG = 3 cm e DG = 4 cm, o segmento $\overline{AF}$ mede, em centímetros,

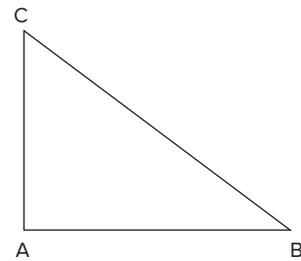
A 0,3
B 0,5
C 0,7
D 0,9

37 **Ifal 2011** Num triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 4 m e 1 m, respectivamente Calcule a área desse triângulo

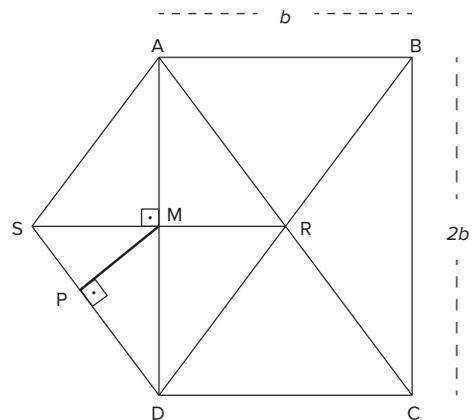
A 5 cm^2
B 50 cm^2
C 50000 cm^2
D 50 dm^2
E 5 dm^2

38 **IFCE 2011** A altura, baixada sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, mede 12 cm, e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa diferem de 7 cm. Os lados do triângulo são, em centímetros, iguais a

A 10, 15 e 20.
B 12, 17 e 22.
C 15, 20 e 25.
D 16, 21 e 26.
E 18, 23 e 28.

39 **G1 – CP2 2017** Observe o esquema a seguir, que representa certo trecho do Oceano Atlântico na costa brasileira. Um navio de pesquisas, situado inicialmente no ponto B, deve seguir rumo ao ponto C em linha reta. Sabe-se que a distância BC é igual a 10 km. No ponto A, encontra-se uma ilha e o navio deve parar, na sua trajetória, em um ponto o mais próximo possível dessa ilha para que uma equipe de biólogos siga em um barco auxiliar a fim de coletar algumas espécies de plantas nativas para análise.
Considere que a região limitada por $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ seja plana e que o ângulo $B\hat{A}C$ meça 90°.

Se a distância do navio à ilha, ao iniciar sua trajetória em B, era de 8 km, podemos afirmar que, nesse percurso, a menor distância do navio à ilha será igual a

A 5,2 km.
B 5,0 km.
C 4,8 km
D 3,6 km

40 **IFMG 2014** Na figura, ABCD é um retângulo cujos lados medem AB = b e BC = 2b. O ponto R pertence aos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e ARDS é um quadrilátero em que M é ponto médio do segmento $\overline{RS}$.

O segmento $\overline{MP}$, expresso em função de *b*, é

A $\frac{b\sqrt{5}}{5}$
B $\frac{b\sqrt{5}}{3}$
C $\frac{2b\sqrt{5}}{3}$
D $\frac{3b\sqrt{5}}{5}$

FRENTE 3

Texto complementar

A razão áurea

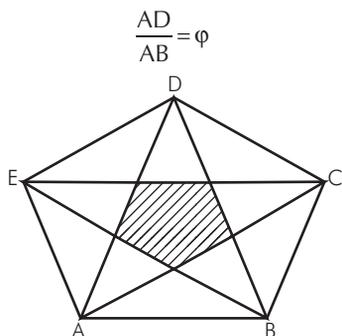
Também denominada média e extrema razão, a razão áurea é um número irracional indicado pela letra grega φ que depende da raiz quadrada de cinco Esse número pode ser obtido por meio das medidas de um pentagrama regular de diversas formas diferentes

[...]

Dizem que Platão estudou matemática com o pitagórico Teodoro de Cirene, que foi o primeiro a provar que, além da raiz quadrada de dois, números como raiz quadrada de três, raiz quadrada de cinco, até a raiz quadrada de dezessete também eram irracionais Considerando o papel de Platão na matemática em geral, e em relação à razão áurea, em particular, temos que analisar não só suas contribuições puramente matemáticas, mas o efeito de sua influência e de seu estímulo para a matemática de outras pessoas da sua e das gerações seguintes. Até certo ponto Platão pode ser considerado um dos primeiros teóricos autênticos Platão tinha um grande interesse pelas propriedades dos números e das figuras geométricas. [ ]

Um pentagrama regular é obtido traçando-se as diagonais do pentágono regular ABCDE, como na figura a seguir O pentágono menor (hachurado), formado pelas interseções das diagonais, está em proporção com ABCDE A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado do número de ouro A razão entre a área do pentágono maior e a do pentágono menor é igual à quarta potência do número de ouro No triângulo isósceles ABD, seus lados maiores AD e BD estão em média e extrema razão com sua base.

Isto é:

$$\frac{AD}{AB} = \varphi$$

No pentagrama, as medidas das diagonais estão em razão áurea com as medidas dos lados do pentágono Pode-se observar na figura anterior que a razão entre a medida da diagonal DA e a medida do lado AB do pentágono é φ, a razão entre a medida da diagonal DB e a medida do lado BC também é φ, e a razão entre a medida da diagonal CA e a medida do lado AE também é φ.

Ou seja:

$$\frac{DA}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{AC}{AE} = \varphi$$

Quando Pitágoras descobriu que as proporções no pentagrama eram a proporção áurea, tornou esse símbolo estrelado como a representação da Irmandade Pitagórica Esse era um dos motivos que levava Pitágoras a dizer que tudo é número, ou seja, que a natureza segue padrões matemáticos. [...]

Por mais de 500 anos antes de Cristo, os gregos (pitagóricos) estudaram as relações entre os segmentos de um pentagrama Determinaram um número que desempenha um importante papel na geometria, na estética, nas artes, na arquitetura e na biologia [ ]

A razão áurea, além de um conceito matemático, é uma expressão de harmonia e beleza Os antigos gregos avaliavam essa harmonia nos seres vivos e não-vivos, buscando em suas dimensões uma proporção que se aproximasse da razão áurea.

Um segmento de reta ou linha dividida na razão áurea é uma das primeiras situações que aparece quando se pesquisa sobre a razão áurea

O estudo da razão áurea pode se começar por um segmento de reta qualquer, que podemos imaginar que esteja dividido de tal forma que resulte em um segmento maior e outro segmento menor A razão áurea ocorre quando o segmento menor dividido pelo maior é igual ao maior dividido pelo segmento todo

Na figura a seguir, podemos mostrar como isso ocorre.

Segmento em média e extrema razão

O segmento maior da figura anterior, $\overline{AD}$ possui o valor 1 e o menor $\overline{DB}$ o valor X.

Temos que:

$$\frac{X}{1} = \frac{1}{1+X}$$

Ou, então,

$$\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{AB}$$

Para esclarecermos como o segmento da figura está dividido em uma razão áurea, pode-se resolver a equação:

$$\frac{X}{1} = \frac{1}{1+X} \Rightarrow X^2 + X = 1 \Rightarrow X^2 + X1 = 0$$

Utilizando a fórmula quadrática temos:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\ 1\ (-1)}}{2 \cdot 1}$$

Ou seja,

$$X' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow X' = 0{,}6180339...$$

e o

$$X'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow X'' = -1{,}6180339$$

Portanto, o valor encontrado para X' é conhecido como o valor da razão áurea, que é representada pela letra grega fi minúscula $(\varphi = 0{,}6180339\ )$, resultado da razão do menor pelo maior. Como $X > 0$ e trata-se de um segmento, podemos desconsiderar o resultado encontrado do X" = – 1,6180339... por ser negativo.

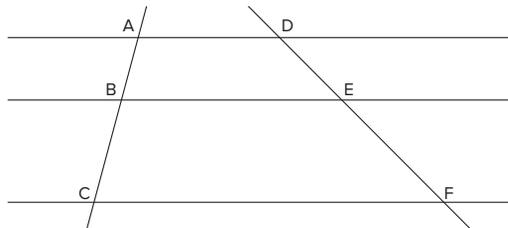
OLIVEIRA, Cristiano Barreto de *Razão áurea: suas aplicações e importância no ensino de matemática*. Monografia Faculdade Alfredo Nasser. Aparecida de Goiânia, 2010. p. 17-20. (Adapt.).

Resumindo

Razão de divisão de segmento

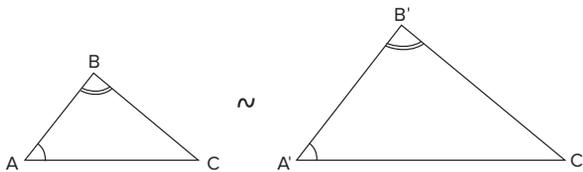
- Se um ponto S pertence à reta determinada pelos pontos A e B, e não coincide com B, então S divide o segmento $\overline{AB}$ na razão $k = \frac{SA}{SB}$.

Divisão média	**Divisão harmônica**	**Divisão áurea**
$k = 1$	$k \neq 1$	$k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Teorema de Tales

Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas transversais, então os segmentos determina dos pelas paralelas são proporcionais.

$$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BE} // \overleftrightarrow{CF} \Leftrightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se as medidas dos lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k \\ \hat{A} = \hat{A}' \text{ e } \hat{B} = \hat{B}' \text{ e } \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

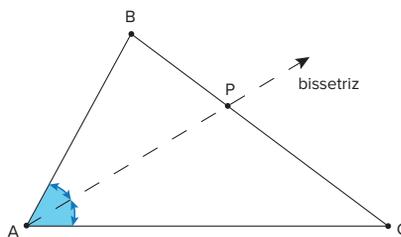
k é a razão de semelhança entre os triângulos

Razão de semelhança

Se *k* é a razão de semelhança entre duas figuras geométricas, então:

- A razão entre quaisquer comprimentos correspondentes é igual a *k*
- A razão entre as áreas de regiões correspondentes é igual a k^2.
- A razão entre os volumes, no caso de serem figuras espaciais, é igual a k^3.

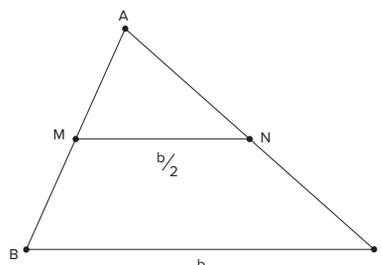
Teorema da bissetriz interna de um triângulo

As bissetrizes internas de um triângulo dividem os lados opostos aos ângulos de origem em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

$$B\hat{A}P = C\hat{A}P \Rightarrow \frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$$

Teorema da bissetriz externa de um triângulo

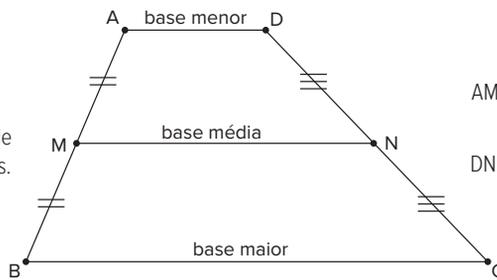
As bissetrizes externas de um triângulo determinam, no prolongamento do lado oposto, dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

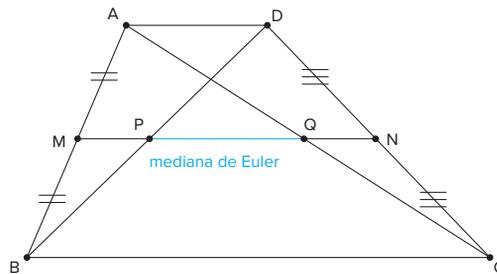
Teorema da base média do triângulo

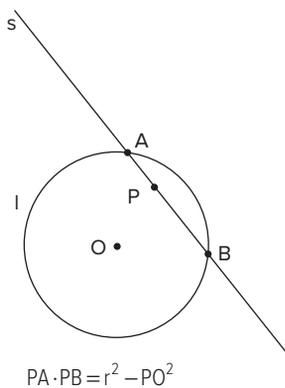
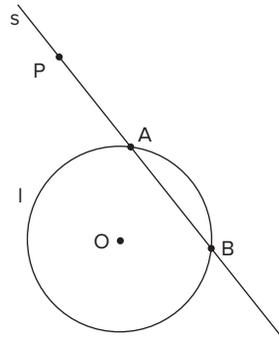
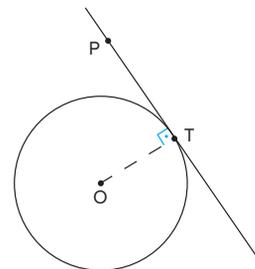
Cada base média de um triângulo é paralela e tem a metade do comprimento da base correspondente no triângulo

$$\left.\begin{matrix} AM = MB \\ \text{e} \\ AN = NC \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \overline{MN} // \overline{BC} \text{ e } MN = \frac{BC}{2}$$

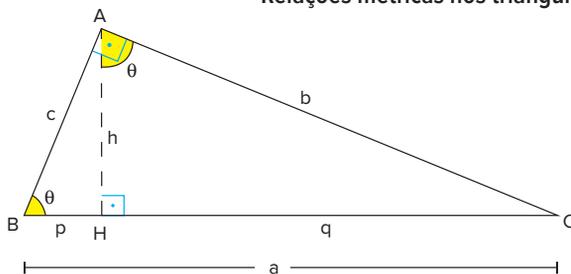
Teorema da base média do trapézio

A base média é paralela às bases do trapézio e mede a média aritmética dos comprimentos dessas bases.

$$\left.\begin{matrix} AM = MB \\ e \\ DN = NC \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \overline{MN} \ // \ \overline{AD} \ // \ \overline{BC} \\ e \ \ MN = \dfrac{AD + BC}{2} \end{matrix}\right.$$

Mediana de Euler

A mediana de Euler em um trapézio equivale à metade da diferença absoluta entre as bases desse trapézio.

$$\text{Mediana de Euler} = \frac{\text{base maior} \quad \text{base menor}}{2}$$

Teorema da potência de um ponto em relação a uma circunferência

$PA \cdot PB = r^2 - PO^2$ $\qquad PA \cdot PB = PO^2 \quad r^2$ $\qquad PT^2 = PO^2 - r^2$

Relações métricas nos triângulos retângulos

$a = p + q$
$a \cdot h = b \cdot c$
$b^2 = a \quad q$
$c^2 = a \cdot p$
$h^2 = p \cdot q$
$a^2 = b^2 + c^2$ (Pitágoras)

Quer saber mais?

Sites

- Sobre Tales e seu famoso teorema: <www.estudopratico.com br/teorema-de-tales/>
- Um pouco mais da filosofia geométrica: <www.ebah.com.br/content/ABAAAezQcAL/geometria-sagrada>
- A homotetia: <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/homotetia.htm>

Exercícios complementares

1 Os pontos P e Q dividem um segmento de reta $\overline{AB}$ em três partes iguais de modo que P está mais próximo de B do que de A. Se um ponto X pertence ao segmento $\overline{PQ}$ e é tal que $\frac{AX}{BX} = \frac{7}{5}$, então a razão $\frac{QX}{PX}$ equivale a:

A 3
B 2
C 1
D $\frac{1}{2}$
E $\frac{1}{3}$

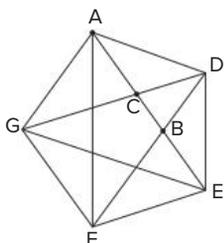
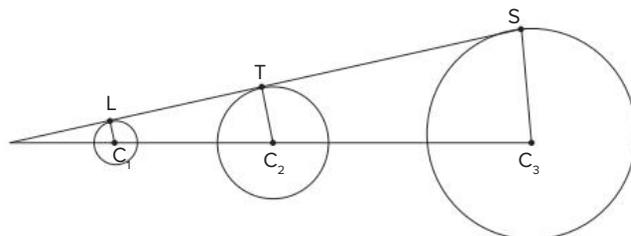
2 Uma determinada rodovia federal passa pelas proximidades das cidades A e B. A entrada para a cidade A fica no quilômetro 255, e a entrada principal para a cidade B fica no quilômetro 198. Um empresário deseja construir um posto de gasolina nessa rodovia de tal modo que a distância do posto à entrada principal de uma dessas cidades seja o dobro da distância do posto à entrada principal da outra cidade.
Diante disso, as opções para a localização do posto de gasolina desse empresário em relação ao sistema de quilometragem dessa rodovia são:

A apenas duas, nos quilômetros 217 e 236
B apenas duas, nos quilômetros 141 e 236.
C apenas três, nos quilômetros 141, 217 e 236
D apenas três, nos quilômetros 141, 236 e 312.
E apenas quatro, nos quilômetros 141, 217, 236 e 312

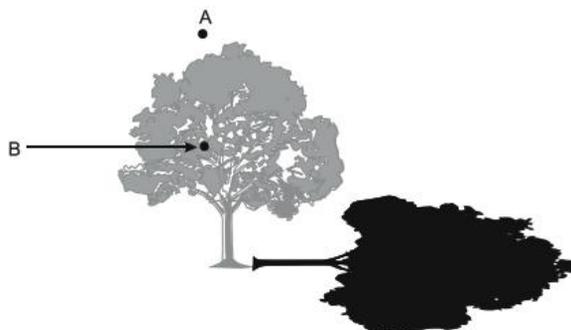
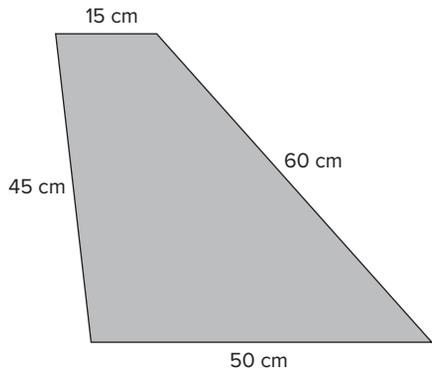
3 **Fuvest 2011 (Adapt.)** Define-se geometricamente a razão áurea do seguinte modo: o ponto C da figura a seguir divide o segmento $\overline{AB}$ na razão áurea quando os valores $\frac{AC}{AB}$ e $\frac{CB}{AC}$ são iguais. Esse valor comum é chamado razão áurea.

A razão áurea, também denominada proporção áurea, número de ouro ou divina proporção, conquistou a imaginação popular e é tema de vários livros e artigos. Em geral, suas propriedades matemáticas estão corretamente enunciadas, mas muitas afirmações feitas sobre ela na arte, na arquitetura, na literatura e na estética são falsas ou equivocadas. Infelizmente, essas afirmações sobre a razão áurea foram amplamente divulgadas e adquiriram *status* de senso comum. Mesmo livros de geometria utilizados no Ensino Médio trazem conceitos incorretos sobre ela.

Trecho traduzido e adaptado do artigo de G. Markowsky, "Misconceptions about the golden ratio", The College Mathematics Journal, 23, 1, january, 1992, p. 2-19.

Na figura a seguir, o polígono ADEFG é um pentágono regular Utilize a semelhança de triângulos para demonstrar que o ponto C da figura divide o segmento $\overline{AB}$ na razão áurea.

4 **IFMG 2017** A figura a seguir é um esquema representativo de um eclipse lunar em que a Lua, a Terra e o Sol estão representados pelas circunferências de centros C_1, C_2 e C_3, respectivamente, que se encontram alinhados. Considera-se que a distância entre os centros da Terra e do Sol é 400 vezes maior que a distância entre os centros da Terra e da Lua e que a distância do ponto T na superfície da Terra ao ponto S na superfície do Sol, como representados na figura, é de 150 milhões de quilômetros.

Sabendo-se que os segmentos de reta $\overline{C_1L}$, $\overline{C_2T}$ e $\overline{C_3S}$ são paralelos, a distância do ponto L, representado na superfície da Lua, ao ponto T, na superfície da Terra, é igual a

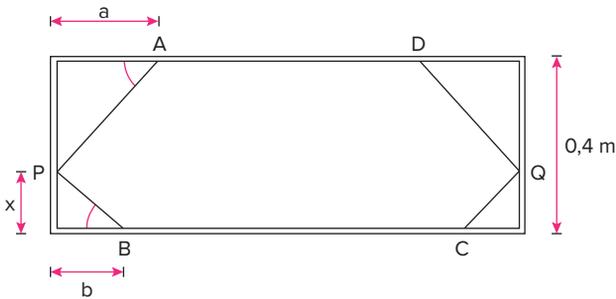
A 375000 km.
B 400000 km.
C 37500000 km.
D 40000000 km.

5 **FGV** Bem no topo de uma árvore de 10,2 metros de altura, um gavião casaca-de-couro, no ponto A da figura, observa atentamente um pequeno roedor que subiu na mesma árvore e parou preocupado no ponto B, bem abaixo do gavião, na mesma reta vertical em relação ao chão. Junto à árvore, um garoto fixa verticalmente no chão uma vareta de 14,4 centímetros de comprimento e, usando uma régua, descobre que a sombra da vareta mede 36 centímetros de comprimento.
Exatamente nesse instante ele vê, no chão, a sombra do gavião percorrer 16 metros em linha reta e ficar sobre a sombra do roedor, que não se havia movido de susto.
Calcule e responda: Quantos metros o gavião teve de voar para capturar o roedor, se ele voa verticalmente de A para B?

6 Uma chapa metálica no formato de um trapézio com bases de 15 cm e 50 cm, cujos lados não paralelos medem 45 cm e 60 cm, como mostra a figura, deverá ser cortada em duas peças com o mesmo perímetro.

Se o corte for feito sobre uma linha paralela às bases do trapézio, a razão entre as alturas dos trapézios obtidos será:

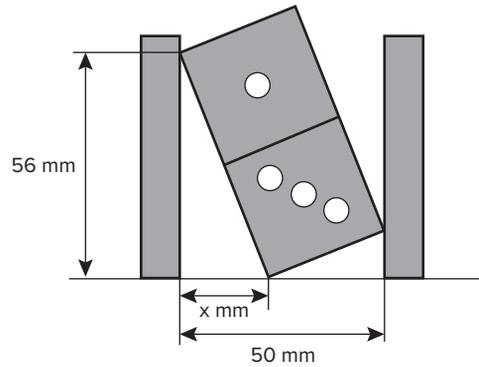
A de 2 para 1.
B de 3 para 1.
C de 4 para 1.
D de 3 para 2.
E de 4 para 3.

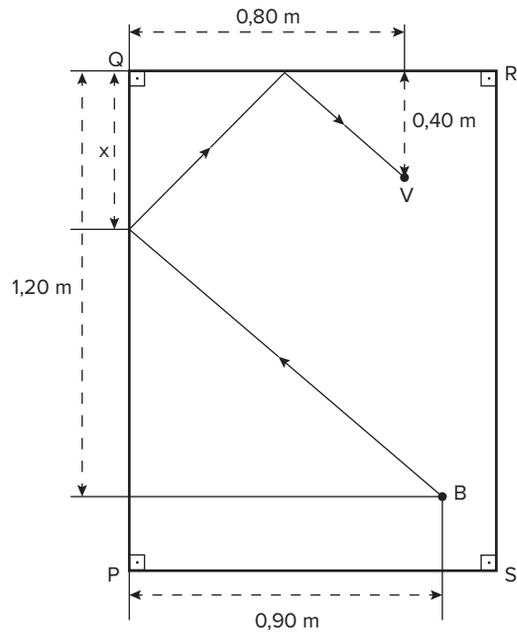
7 **Unesp 2011** Uma bola de tênis é sacada de uma altura de 21 dm, com alta velocidade inicial, e passa rente à rede, a uma altura de 9 dm Desprezando-se os efeitos do atrito da bola com o ar e do seu movimento parabólico, considere a trajetória descrita pela bola como sendo retilínea e contida num plano ortogonal à rede. Se a bola foi sacada a uma distância de 120 dm da rede, a que distância da rede, em metros, ela atingirá o outro lado da quadra?

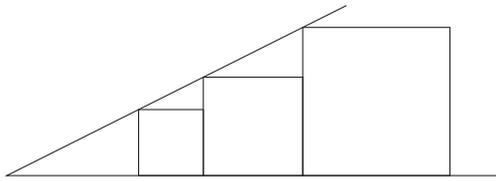
8 Qual é a medida da altura de um trapézio ABCD retângulo de bases AB = 9 cm e CD = 4 cm cujas diagonais são perpendiculares entre si?

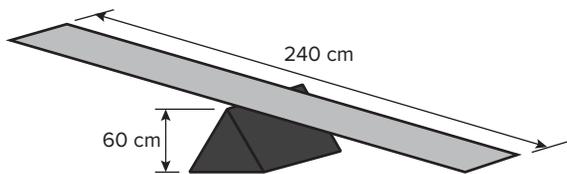
9 Uma estrutura metálica retangular, com dimensões de 1,5 m por 0,4 m, será reforçada por barras de aço presas nos pontos A, P, B, C, Q e D, como ilustra a figura a seguir.

Nessa situação, para usar a menor quantidade de aço possível, os ângulos de vértices A e B, mostrados na figura, devem ter a mesma medida. Dessa forma, se a = 20 cm e b = 5 cm, a medida *x* deverá ser igual a:

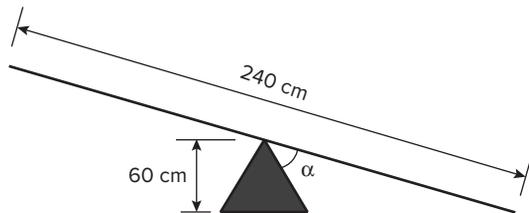
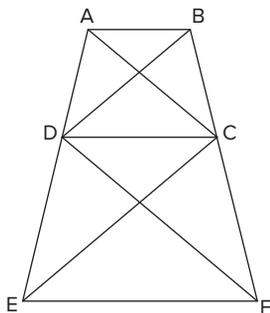
A 4 cm
B 8 cm.
C 10 cm.
D 12 cm
E 20 cm

10 Uma brincadeira muito popular que pode ser feita com as pedras do dominó consiste em enfileirar as pedras do jogo para depois derrubá-las todas, como uma reação em cadeia A internet está repleta de vídeos com as mais criativas cascatas de dominós dispostos em diversas posições diferentes, de modo a gerar pa drões esteticamente estimulantes para quem observa o evento da sucessiva queda das pedras. Em uma dessas cascatas de dominós, algumas pedras ficavam em posições oblíquas equilibradas entre duas outras pedras em posição vertical, como mostra a ilustração:

Observando que cada pedra do dominó tem a forma de um retângulo formado por dois quadrados idênti cos, determine a medida *x*, em milímetros, de acordo com as demais medidas indicadas na ilustração.

11 **Fuvest** Em uma mesa de bilhar, coloca-se uma bola branca na posição B e uma bola vermelha na posição V, conforme o esquema a seguir

Deve-se jogar a bola branca de modo que ela siga a trajetória indicada na figura e atinja a bola vermelha. Assumindo que, em cada colisão da bola branca com uma das bordas da mesa, os ângulos de incidência e de reflexão são iguais, a que distância *x* do vértice Q deve-se jogar a bola branca?

12 A figura a seguir apresenta três quadrados de bases consecutivas inscritos em um mesmo ângulo.

Se os lados dos quadrados menores medem 24 cm e 36 cm, determine o lado do quadrado maior.

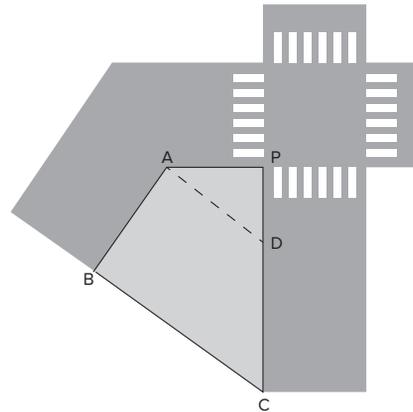
13 **Unicamp 2011** Considere uma gangorra composta por uma tábua de 240 cm de comprimento, equilibrada, em seu ponto central, sobre uma estrutura na forma de um prisma cuja base é um triângulo equilátero de altura igual a 60 cm, como mostra a figura. Suponha que a gangorra esteja instalada sobre um piso perfeitamente horizontal.

a) Desprezando a espessura da tábua e supondo que a extremidade direita da gangorra está a 20 cm do chão, determine a altura da extremidade esquerda.

b) Supondo, agora, que a extremidade direita da tábua toca o chão, determine o ângulo α formado entre a tábua e a lateral mais próxima do prisma, como mostra a vista lateral da gangorra, exibida a seguir.

14 A estrutura de sustentação de um palco praticável distribui o peso recebido no topo $\overline{AB}$ pelas vigas metálicas soldadas sobre as diagonais dos trapézios ABCD e CDEF, como mostra a figura.

Na figura, as formas geométricas trapezoidais que compõem a estrutura são semelhantes, e as bases do trapézio maior medem 90 cm e 60 cm Então, se as diagonais do trapézio maior medem exatamente 1 metro, determine:

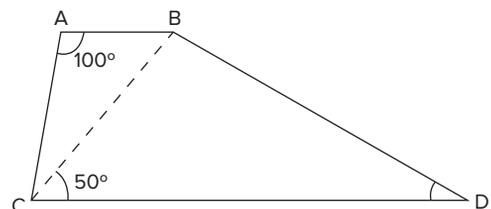
a) o comprimento do topo $\overline{AB}$ da estrutura.

b) o comprimento aproximado da diagonal $\overline{AC}$ do trapézio.

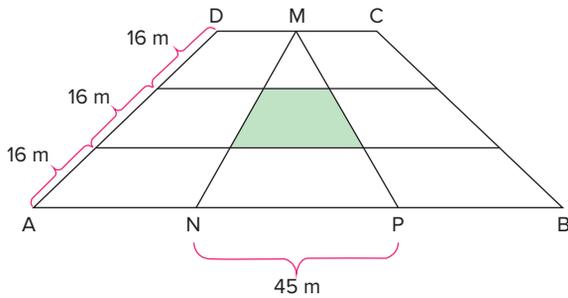
15 A figura a seguir mostra um terreno na forma de um quadrilátero ABCP, situado na esquina de duas ruas de um condomínio fechado.

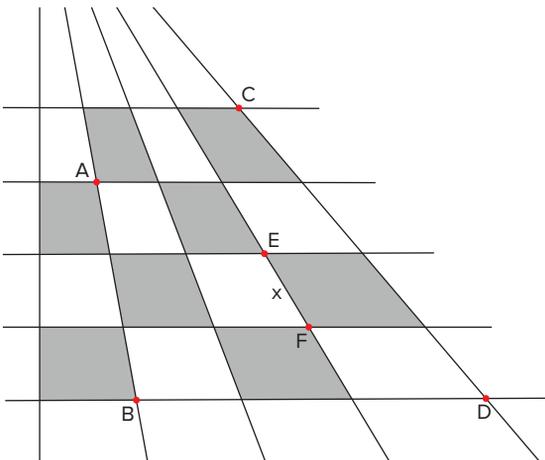
O proprietário deseja construir sua casa sobre a região do terreno representada pelo trapézio retângulo ABCD, cuja base menor $\overline{AD}$ tem a mesma medida do lado $\overline{AB}$, reservando a região representada pelo triângulo retângulo APD para fazer um jardim de entrada.

Se $\overline{AP}$ e $\overline{DP}$ medem, respectivamente, 4 m e 3 m, então o perímetro do terreno representado pelo qua drilátero ABCP mede:

A 25 m.
B 27 m.
C 29 m.
D 31 m.
E 33 m.

16 O vidro da janela lateral de um novo modelo de veículo tem forma muito semelhante à do trapézio ABCD ilustrado a seguir:

Se os lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ desse trapézio medem 20 cm e 80 cm, a diagonal $\overline{BC}$ mede 40 cm e as medidas dos ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ medem, aproximadamente, 100° e 50°, a melhor estimativa da medida do ângulo $B\hat{D}C$ é:

A 30°
B 35°
C 40°
D 45°
E 50°

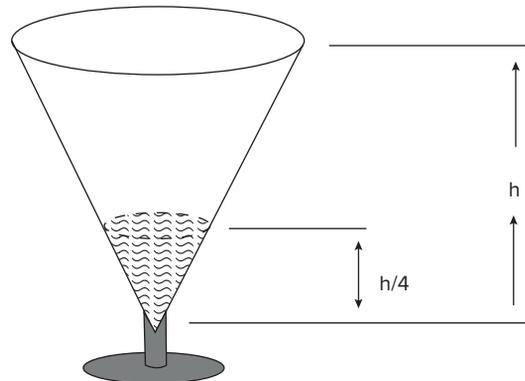
17 A imagem a seguir mostra um terreno ABCD, em formato de trapézio, no qual será construída uma casa. A região sombreada na figura indica a localização da casa no terreno.

As linhas horizontais que determinam a localização da casa dividem os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ em três partes iguais. Se o triângulo MNP é equilátero e seu lado mede 45 m, quanto deve medir o perímetro da região onde a casa será construída?

18 A parede da sala de brinquedos de uma escola infantil foi pintada de modo a tentar representar, em perspectiva, um tabuleiro como o do xadrez, mas com apenas 16 casas. Embora os prolongamentos das linhas não horizontais interceptem-se corretamente em um mesmo ponto, conhecido na teoria da perspectiva como ponto de fuga, o fato de as linhas paralelas horizontais terem sido desenhadas igualmente afastadas umas das outras não está de acordo com a perspectiva correta, que transmite a ideia de que as casas do tabuleiro são equivalentes entre si.

Sabendo que, entre as linhas não horizontais, apenas a primeira da esquerda para a direita é vertical, de acordo com as características dessa pintura, se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ medem 1 m e 2 m, respectivamente, então a medida *x*, em centímetros, do segmento $\overline{EF}$ é tal que:

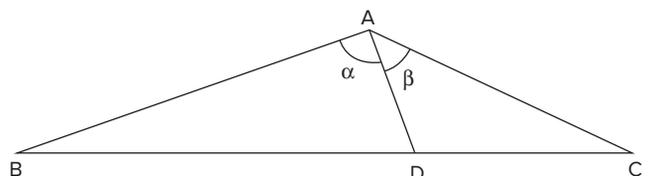
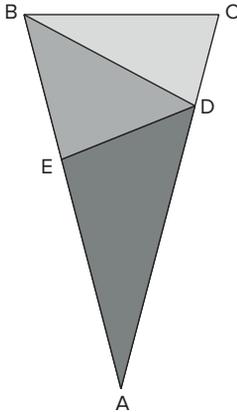
A $20 < x < 33$
B $33 < x < 50$
C $50 < x < 62$
D $62 < x < 75$
E $75 < x < 100$

19 **UEG 2011** O formato dos papéis que utilizamos, tais como A0, A1, A2, A3, A4, ..., A10, tem uma relação muito interessante, conforme descreveremos a seguir. Partindo do papel A0, obtém-se o papel A1 do seguinte modo: o menor lado do papel A1 é a metade do maior lado do papel A0, e o maior lado do papel A1 é igual ao menor lado do A0. Do mesmo modo, a folha do papel A2 é obtida da folha A1, a folha do papel A3 é obtida da folha de papel A2 e assim sucessivamente. Considerando que as folhas de papel descritas acima são retangulares e que os papéis como A0, A1, A2, A3, A4, ..., A10 são semelhantes, então a razão entre o maior e o menor lado do papel A4 é igual a:

A $\sqrt{2}$
B 2
C $\frac{1}{2}$
D $\frac{\sqrt{2}}{2}$

20 Um cálice de cristal com a forma de um cone contém exatamente 5 mL de água.

Sabendo que a água no interior do cálice atinge apenas um quarto de sua altura, determine:

a) a razão de semelhança entre os cones de água e de cristal;
b) a razão entre os volumes do cone de água e de cristal;
c) o volume de água necessário para se completar a capacidade total do cálice.

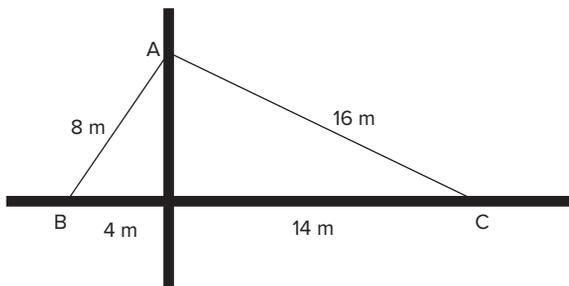
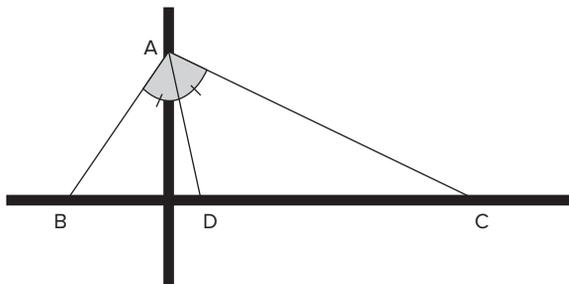
21 No triângulo ABC, o segmento $\overline{AD}$ divide o ângulo interno de vértice A em dois outros ângulos de medidas $\alpha = 130°$ e $\beta = 25°$. Sabendo que $\overline{BD}$ mede 10 cm e que $\overline{AB}$ mede o triplo de $\overline{AD}$, determine a medida do segmento $\overline{CD}$.

22 A flâmula de um clube tem a forma de um triângulo isósceles ABC, com AB = AC = 40 cm e BC = 20 cm. As três cores do clube ocupam regiões triangulares no interior da flâmula, como mostra a figura.

Em relação às medidas angulares, sabemos que:

- $\text{med}\left(A\hat{D}E\right) = \text{med}\left(B\hat{D}E\right)$
- $\text{med}\left(B\hat{A}C\right) = \text{med}\left(C\hat{B}D\right)$.
- $\text{med}\left(B\hat{C}D\right) = \text{med}\left(B\hat{D}C\right)$.

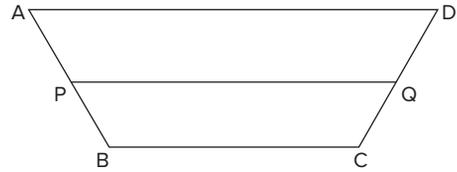
Assim, determine os comprimentos dos segmentos:

a) $\overline{CD}$.

b) $\overline{BE}$.

23 Um engenheiro percebeu que os dois cabos, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, usados para sustentar o trecho $\overline{BC}$ de uma ponte estaiada não eram suficientes e resolveu instalar mais um cabo $\overline{AD}$ para reforçar a sustentação. A figura a seguir mostra os comprimentos dos cabos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e as distâncias dos pontos B e C até a coluna vertical onde eles estão presos.

A figura seguinte mostra que o cabo $\overline{AD}$ será instalado de modo que os ângulos $D\hat{A}B$ e $D\hat{A}C$ tenham a mesma medida.

Nessas condições, a distância do ponto D até a coluna vertical onde os cabos estão presos deverá ser de:

A 1 m.
B 1,5 m.
C 2 m.
D 2,5 m.
E 3 m.

24 Na figura a seguir, ABCD é um trapézio isósceles e P e Q são os pontos médios dos lados não paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Sabe-se ainda que AD = 85 mm, PQ = 6 cm e CQ = 0,2 dm. Determine as medidas, em centímetros, dos segmentos:

a) $\overline{AB}$.

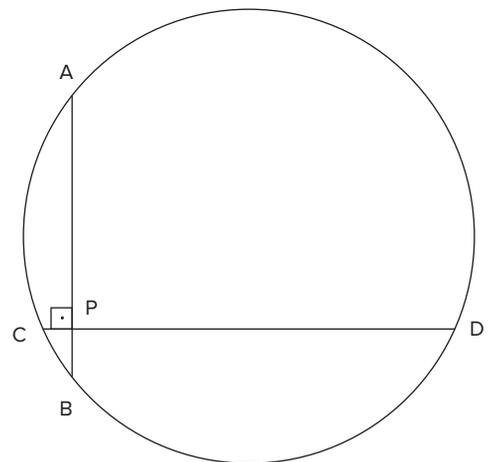
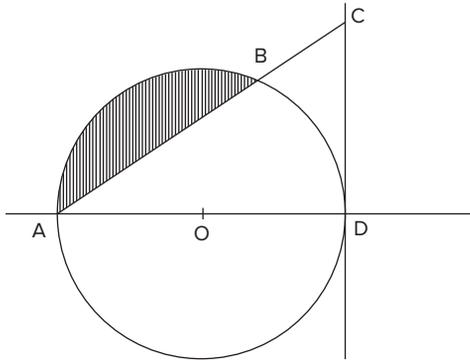
b) $\overline{BC}$.

25 **IFCE** Sabendo-se que, em um trapézio, a soma da base média com a mediana de Euler é igual a 12 cm e que a razão entre as bases do trapézio é 2, a base menor desse trapézio mede:

A 5 cm.
B 6 cm.
C 7 cm.
D 8 cm.
E 9 cm.

26 **FGV 2012** As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um círculo são perpendiculares no ponto P, sendo que AP = 6, PB = 4 e CP = 2 O raio desse círculo mede:

A 5
B 6
C $3\sqrt{3}$
D $4\sqrt{2}$
E $5\sqrt{2}$

FRENTE 3

27 **Fuvest 2012 (Adapt.)** Na figura, a circunferência de centro O é tangente à reta $\overleftrightarrow{CD}$ no ponto D, o qual pertence à reta $\overleftrightarrow{AO}$. Além disso, A e B são pontos da circunferência, $AB = 6\sqrt{3}$ e $BC = 2\sqrt{3}$.

Nessas condições, determine:

a) a medida do segmento $\overline{CD}$.

b) a medida do raio da circunferência.

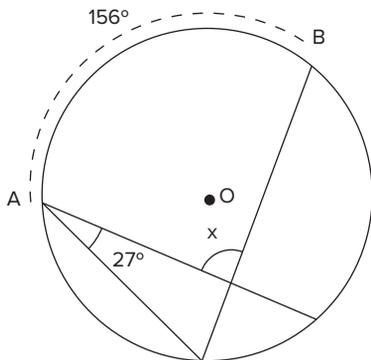
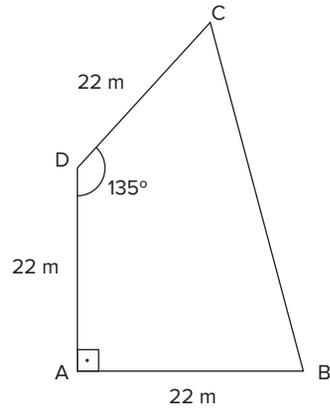
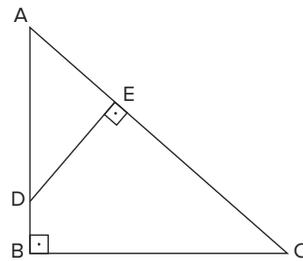
28 **ITA** Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A e C e D, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G.

Se EB = 5, BA = 7, EC = 4, GD = 3 e AG = 6, então GF vale:

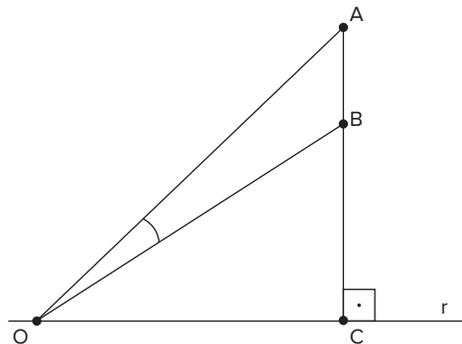
A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

29 **UFSC 2016** Em relação às proposições a seguir, é correto afirmar que:

01 Se duas retas paralelas são cortadas por uma reta transversal, formando ângulos alternos externos cujas medidas, em graus, são representadas por $(3x + 4°)$ e $(4x \quad 37°)$, então a soma desses ângulos é 254°

02 Na figura da circunferência de centro O, se o ângulo agudo Â mede 27° e o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 156°, então a medida do ângulo indicado por *x* é igual a 105°

04 Se o quadrilátero a seguir representa a planta de um terreno plano, então sua área é igual a $242\left(1+\sqrt{2}\right)m^2$.

08 No triângulo ABC, retângulo em B, $\overline{DE}$ é perpendicular à $\overline{AC}$. Se $\overline{AC}$ mede 6 cm e $\overline{CE}$ tem a mesma medida do cateto $\overline{AB}$, 4 cm, então $\overline{AD}$ mede 2 cm.

16 Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 9 cm e o menor cateto mede 6 cm. Então, a altura relativa à hipotenusa mede $2\sqrt{5}$ cm.

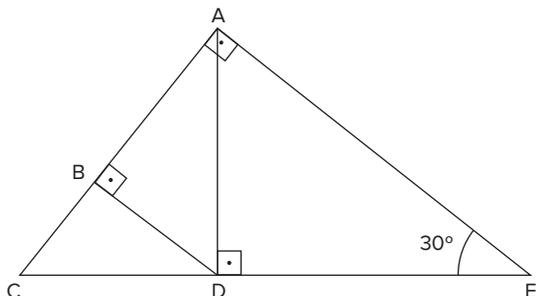
Soma:

30 **Unifesp** Na figura, o segmento $\overline{AC}$ é perpendicular à reta *r*. Sabe se que o ângulo $A\hat{O}B$, com O sendo um ponto da reta *r*, será máximo quando O for o ponto onde *r* tangencia uma circunferência que passa por A e B.

Se $\overline{AB}$ representa uma estátua de 3,6 m sobre um pedestal $\overline{BC}$ de 6,4 m, a distância OC, para que o ângulo $A\hat{O}B$ de visão da estátua seja máximo, é:

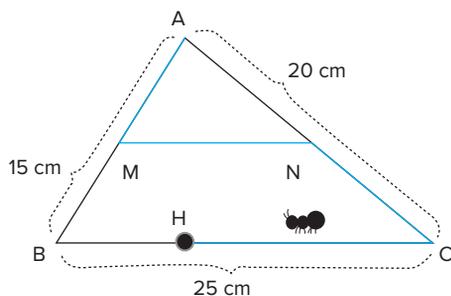
A 10 m.
B 8,2 m
C 8 m
D 7,8 m
E 4,6 m

31 **Fuvest 2011** As circunferências C_1 e C_2 estão centradas em O_1 e O_2, têm raios $r_1 = 3$ e $r_2 = 12$, respectivamente, e tangenciam-se externamente. Uma reta *t* é tangente a C_1 no ponto P_1, tangente a C_2 no ponto P_2 e intercepta a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ no ponto Q. Sendo assim, determine:

a) o comprimento P_1P_2.
b) a área do quadrilátero $O_1O_2\ P_2P_1$.
c) a área do triângulo QO_2P_2.

32 Na figura a seguir, os ângulos $C\hat{A}E$, $A\hat{D}E$ e $A\hat{B}D$ são retos. O ângulo $A\hat{E}D$ mede 30° e AC = x

Escreva em função de *x* as medidas dos seguintes segmentos:

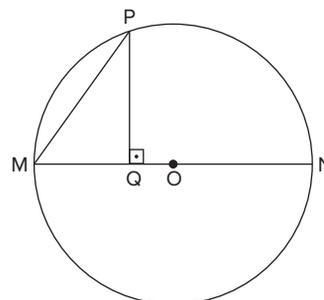
a) $\overline{CE}$
b) $\overline{CD}$
c) $\overline{BD}$

33 No muro do quintal de uma casa foi desenhado um triângulo de lados 15 cm, 20 cm e 25 cm, como mostra a figura

Uma formiga parte do vértice A do triângulo e segue pelo lado $\overline{AB}$ até seu ponto médio M. Depois disso, ela atravessa a base média $\overline{MN}$ do triângulo $\overline{ABC}$ e, ao chegar ao ponto N, segue sobre o lado $\overline{AC}$ até chegar ao vértice C. Então, finalmente, ela percorre parte do lado horizontal $\overline{BC}$ do triângulo até chegar a um pequeno orifício situado no ponto H, bem abaixo do vértice A do triângulo.
Se os pontos A e H determinam uma reta vertical, então o comprimento total da trajetória percorrida por essa formiga é de:

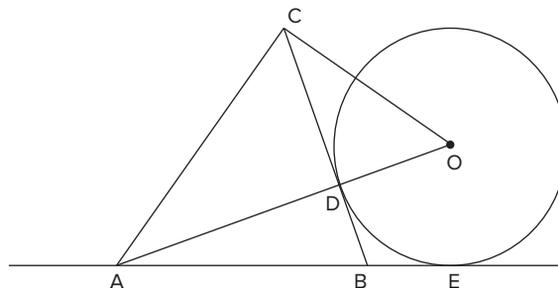
A 30 cm.
B 36 cm.
C 40 cm.
D 46 cm.
E 56 cm.

34 Um tapete retangular comemorativo da Copa do Mundo de 2014 contém um desenho que imita a bandeira brasileira. Nesse desenho, há um losango com os vértices sobre os pontos médios dos lados do tapete e um círculo que é tangente aos quatro lados desse losango.

Se as dimensões do tapete retangular são de 3 m por 4 m, determine a medida do raio do círculo inscrito no losango

35 **EsPCEx 2017** Na figura, o raio da circunferência de centro O é $\frac{25}{2}$ cm e a corda MP mede 10 cm.

A medida, em centímetros, do segmento $\overline{PQ}$ é:

A $\frac{25}{2}$
B 10
C $5\sqrt{21}$
D $\sqrt{21}$
E $2\sqrt{21}$

36 **Fuvest 2015** Na figura a seguir, a circunferência de centro em O e raio *r* tangencia o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC no ponto D e tangencia a reta AB no ponto E. Os pontos A, D e O são colineares, AD = 2r e o ângulo $A\hat{C}O$ é reto. Determine, em função de r:

a) a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC.
b) a medida do segmento $\overline{CO}$

37 **ITA 2015** Seja ABCD um trapézio isósceles com a base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto E em que as diagonais se cortam é:

A $\frac{21}{8}$

B $\frac{27}{8}$

C $\frac{35}{8}$

D $\frac{37}{8}$

E $\frac{45}{8}$

38 **ITA 2014** Considere o trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ Sejam M e N os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente Então, se $\overline{AB}$ tem comprimento x e $\overline{CD}$ tem comprimento $y < x$, o comprimento de $\overline{MN}$ é igual a:

A x y

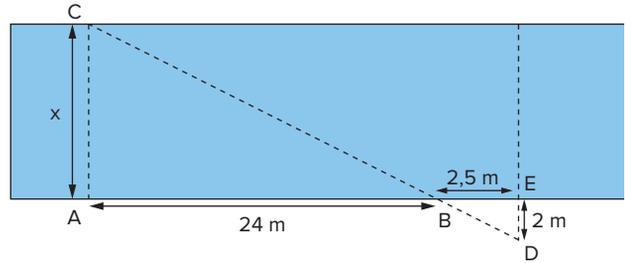
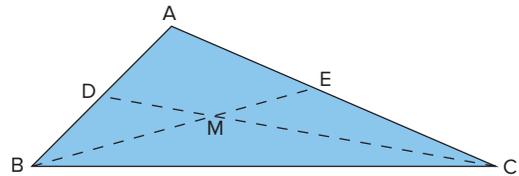
B $\frac{1}{2}(x-y)$

C $\frac{1}{3}(x-y)$

D $\frac{1}{3}(x+y)$

E $\frac{1}{4}(x+y)$

39 **FGV 2014**

a) Para medir a largura *x* de um rio sem necessidade de cruzá-lo, foram feitas várias medições, como mostra a figura a seguir. Calcule a largura *x* do rio.

b) Demonstre que a distância do vértice B ao baricentro M de um triângulo é o dobro da distância do ponto E ao baricentro M.

40 Determine o comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado ℓ cm.

FRENTE 3

CAPÍTULO

4

Teorema dos senos e dos cossenos

Devido à sua enorme importância para a arquitetura e a construção civil, entre outras áreas da tecnologia, as razões de semelhança existentes entre cada par de triângulos retângulos se mostraram insuficientes em estabelecer uma forma prática e padronizada para os cálculos de comprimentos nessas figuras. Assim, as razões de semelhança – que resultam do quociente entre medidas de elementos de figuras diferentes – foram substituídas pelas razões trigonométricas que provêm do quociente entre os comprimentos dos lados de uma mesma figura.

Acontece que, depois de estabelecido o padrão de cálculo regido pelas tabelas de senos e cossenos, alguns geômetras procuraram estender sua aplicação a todos os triângulos, mesmo os não retângulos.

Classificação dos triângulos

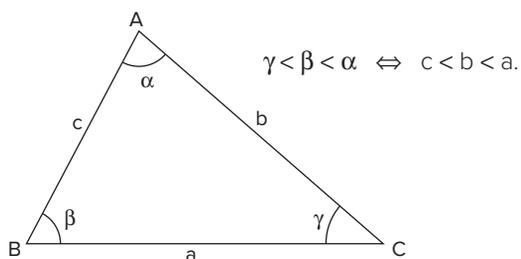
É possível classificarmos os triângulos de duas formas diferentes.

1. Em relação aos **comprimentos** de seus lados:
- **escalenos:** quando cada lado tem comprimento diferente dos outros;
- **isósceles:** quando dois lados apresentam o mesmo comprimento;
- **equiláteros:** quando todos os lados possuem o mesmo comprimento;

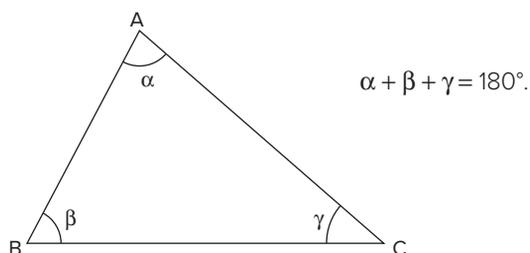
2. Em relação às **medidas** de seus ângulos:
- **acutângulos:** quando todos os seus ângulos internos são agudos;
- **retângulos:** quando um de seus ângulos é reto;
- **obtusângulos:** quando um de seus ângulos é obtuso.

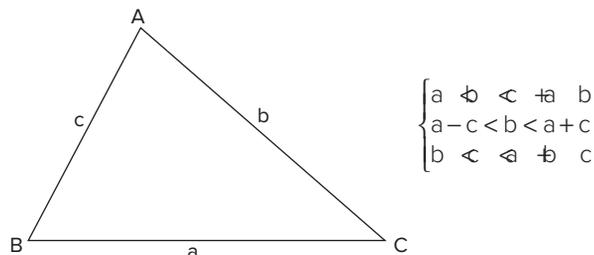
Uma importante relação entre os lados e os ângulos internos de um mesmo triângulo é que lados de comprimentos iguais sempre ficam opostos a ângulos de medidas iguais Esse importante teorema da Geometria Euclidiana garante, entre outras coisas, que os triângulos isósceles têm dois ângulos com a mesma medida e que todos os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°.

Mas, quando se trata de um triângulo escaleno, assim como acontece com os lados, as medidas dos ângulos internos são todas diferentes umas das outras. Nesse caso, é sempre possível considerar em ordem crescente tanto as medidas dos ângulos internos quanto os comprimentos dos lados.

Assim, podemos enunciar que, em todo triângulo escaleno, o maior lado fica oposto ao maior ângulo interno ou que o menor lado fica oposto ao menor ângulo interno.

Neste capítulo, estudaremos como aplicar as razões trigonométricas nos triângulos escalenos.

Desigualdade triangular

A única condição para a existência de um triângulo, relativa às medidas de seus ângulos internos, é que, somadas, elas resultem na medida de um ângulo raso

Mas há algumas condições para a existência de um triângulo que dizem respeito aos comprimentos de seus lados. A primeira condição é que nenhum deles seja maior ou igual à soma dos outros dois; e a segunda é que nenhum deles seja menor ou igual à diferença absoluta dos outros dois

Assim, para que um triângulo exista, todos os seus lados devem ter comprimentos que ficam entre os valores da diferença e da soma dos outros dois. Então, sendo $c \leq b \leq a$ os comprimentos dos lados de um triângulo, temos:

A demonstração dessas desigualdades pode ser obtida por contradição ou por absurdo, como é mais conhecido esse tipo de argumento Essas desigualdades têm que ser verdadeiras, pois sua falsidade contraria o conceito euclidiano da distância mínima entre dois pontos sobre uma superfície plana. Essa distância é igual ao comprimento do segmento de reta que os une (primeiro postulado).

Afinal, se, em um triângulo ABC com AB = c, AC = b e BC = a, fosse verdadeiro que a + b = c ou a + b < c, então a menor distância entre os pontos B e C não seria mais o comprimento do segmento $\overline{BC}$, por exemplo.

Na prática, para garantir a existência de um triângulo com lados de comprimentos *a*, *b* e *c*, basta verificarmos as desigualdades de uma das linhas do sistema.

Mesmo que não saibamos qual a ordem crescente das medidas *a*, *b* e *c* dos lados de um triângulo, é possível expressarmos a desigualdade triangular usando a função modular, que, nesse caso, serve para representar a diferença absoluta entre dois comprimentos. Dessa forma, é possível garantir a existência de um triângulo verificando apenas uma das desigualdades do sistema, por exemplo:

$$|a - b| < c < a + b$$

Exercícios resolvidos

1 Verifique se existe um triângulo ABC com lados medindo 9 cm, 11 cm e 6 cm

Resolução:

Com a = 9, b = 11 e c = 6, obtemos a primeira desigualdade do sistema:

$$|a - b| < c < a + b$$
$$|9 - 11| < 6 < 9 + 11$$
$$2 < 6 < 20$$

Como as duas desigualdades 2 < 6 e 6 < 20 são verdadeiras, podemos concluir que um triângulo com lados que tenham essas medidas de fato existe.
Observe que, com esses valores, as demais desigualdades do sistema também ficam verdadeiras:

$$|a-c| < b < a+c \qquad |b-c| < a < b+c$$
$$|9-6| < 11 < 9+6 \qquad |11-6| < 9 < 11+6$$
$$3 < 11 < 15 \qquad 5 < 9 < 17$$

2 Verifique se existe um triângulo ABC com lados que medem 5 cm, 3 cm e 9 cm.

Resolução:

Com a = 5, b = 3 e c = 9, a primeira desigualdade do sistema fica:

$$|a-b| < c < a+b$$
$$|5-3| < 9 < 5+3$$
$$2 < 9 < 8$$

Como 9 < 8 é uma sentença falsa, podemos concluir que não existe triângulo cujos lados tenham esses comprimentos.
Observe que, com esses valores, as demais desigualdades do sistema também geram sentenças incorretas, pois o número 4 não é menor do que o número 3, bem como o número 6 não é menor do que o número 5:

$$|a-c| < b < a+c \qquad |b-c| < a < b+c$$
$$|5-9| < 3 < 5+9 \qquad |3-9| < 5 < 3+9$$
$$4 < 3 < 14 \qquad 6 < 5 < 12$$

3 Em um triângulo ABC com AC = 30, BC = 12 e AB = x, determine:
a) o intervalo de variação da medida *x* do lado $\overline{AB}$;
b) o maior e o menor dos valores inteiros que *x* pode assumir.

Resolução:

a) Com b = 30, a = 12 e c = x, obtemos a primeira desigualdade do sistema:

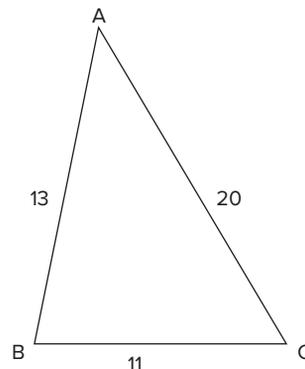
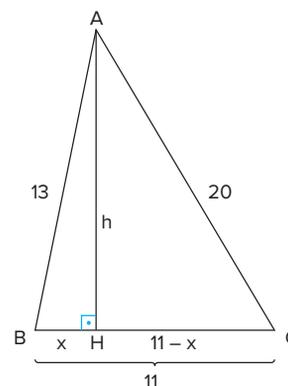
$$|a-b| < c < a+b$$
$$|12-30| < x < 12+30$$
$$18 < x < 42$$

b) Se *x* é número inteiro, como x < 42, o maior valor inteiro possível é x = 41; e, como 18 < x, o menor valor inteiro possível é x = 19.

Valores de senos e cossenos de ângulos obtusos

Como nenhum ângulo interno de um triângulo retângulo pode medir mais do que 90°, as razões trigonométricas seno e cosseno dos ângulos obtusos não podem ser compreendidas como quocientes entre os comprimentos de catetos e hipotenusas

Para facilitar a compreensão dos conceitos de seno e cosseno de ângulos obtusos, vamos explorar o problema de encontrar a altura de um triângulo escaleno ABC.

Consideremos que os lados de um triângulo sejam AB = 13 e AC = 20 e sua base BC = 11 e que a figura a seguir o represente:

Agora, nossa estratégia será traçar, pelo ponto A, uma reta perpendicular à base $\overline{AB}$ para obter a altura $\overline{AH}$ do triângulo e os triângulos retângulos AHB e AHC. Também indicaremos com *h* o comprimento dessa altura e com *x* o comprimento do segmento $\overline{BH}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos da figura, obtemos:

- $\Delta AHB \Rightarrow x^2 + h^2 = 13^2$ (equação I)
- $\Delta AHC \Rightarrow (11-x)^2 + h^2 = 20^2$ (equação II)

Desenvolvendo o produto notável na equação II, encontramos:

$$11^2 - 2 \cdot 11 \cdot x + x^2 + h^2 = 20^2$$

Observando que os últimos termos dessa equação formam o primeiro membro da equação I, temos:

$$11^2 - 22x + \underbrace{x^2 + h^2}_{13^2} = 20^2$$
$$11^2 - 22x + 13^2 = 20^2$$
$$121 - 22x + 169 = 400$$
$$-22x = 400 - 121 - 169$$
$$-22x = 110$$
$$x = -5$$

Assim, concluímos que x = –5, mas isso não pode estar correto, pois não existem comprimentos negativos na Geometria Euclidiana.

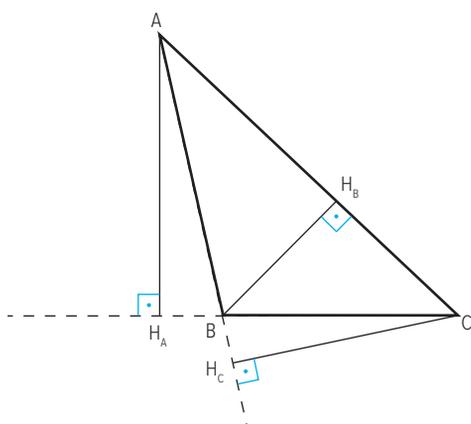
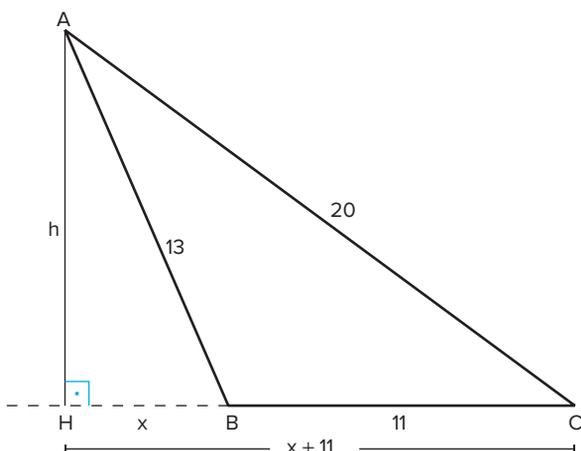
Nesse ponto, podemos querer revisar cada linha da álgebra usada na resolução ou a correção nas aplicações

do teorema de Pitágoras, mas o fato é que a figura utilizada para representar o triângulo ABC está incorreta Note também que HC = 11   x, com x =   5, implica HC = 16, que é uma informação contraditória quando observamos a figura inicialmente desenhada.

O erro foi presumir que ABC era um triângulo acutângulo e, assim, representar a altura $\overline{AH}$ na região interior do triângulo.

Saiba mais

Alturas de um triângulo obtusângulo

Apenas a altura relativa ao maior lado de um triângulo obtusângulo pode ser representada em seu interior. As outras alturas se situam na região exterior do triângulo de modo que uma de suas extremidades seja ponto do prolongamento de algum lado do triângulo, como mostra a figura a seguir.

Uma figura adequada para a representação do triângulo de lados AB = 13, AC = 20 e BC = 11 seria:

Aplicando novamente o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos da figura, obtemos:

- $\Delta AHB \Rightarrow x^2 + h^2 = 13^2$ (equação I)
- $\Delta AHC \Rightarrow (11 + x)^2 + h^2 = 20^2$ (equação II)

Veja como a mudança no sinal da expressão entre parênteses na equação II altera o restante da resolução algébrica do sistema:

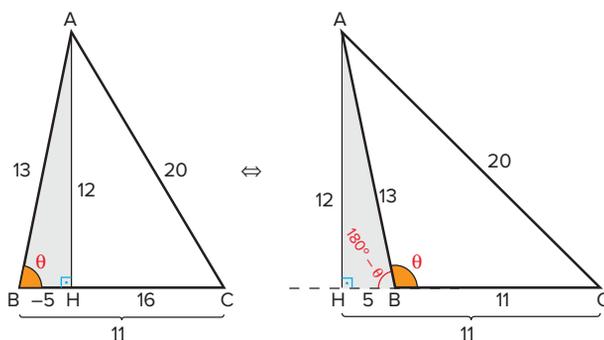
$$11^2 + 2 \cdot 11 \cdot x + \underbrace{x^2 + h^2}_{13^2} = 20^2$$
$$121 + 22x + 169 = 400$$
$$22x = 400 \quad 121 \quad 169$$
$$22x = 110$$
$$x = 5$$

Então, depois de corrigida a incoerência inicial da figura, é seguro usar o valor de x = 5 na equação I para encontrar a altura do triângulo:

$$5^2 + h^2 = 13^2 \Leftrightarrow 25 + h^2 = 169 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$$

Não só o problema foi resolvido como uma nova porta se abriu na interpretação dos números que representam entes geométricos.

Na época de Euclides, os números negativos ainda não haviam sido dominados ou devidamente incorporados à Matemática Mas, quando isso aconteceu, muito tempo depois, a Geometria começou a se apropriar dos aspectos analíticos que eram oferecidos pelos números menores do que zero.

Um desses aspectos é o de se interpretar x = −5 como a indicação de que o segmento $\overline{BH}$ desenhado no interior de um triângulo esteja, na verdade, exterior ao triângulo.

Uma vez admitida a equivalência dessas figuras, do triângulo ABH na primeira figura podemos deduzir que:

$$\begin{cases} \text{sen}(\theta) = \dfrac{12}{13} \\ \cos(\theta) = \dfrac{5}{13} \end{cases}$$

E, do triângulo ABH na segunda figura, que:

$$\begin{cases} \text{sen}(180° \quad \theta) = \dfrac{12}{13} \\ \cos(180° - \theta) = \dfrac{5}{13} \end{cases}$$

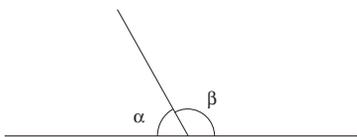
Assim, conseguimos uma interpretação para os senos e os cossenos dos ângulos externos não retos de um triângulo retângulo.

Relações entre senos e cossenos de ângulos suplementares

Dois ângulos são suplementares sempre que a soma de suas medidas resulte na medida do ângulo raso (180°) Quanto aos senos e cossenos desses ângulos, a interpretação analítica das medidas positivas e negativas dos segmentos de reta nos permite afirmar que:

1. Ângulos suplementares possuem o mesmo seno.
2. Ângulos suplementares têm cossenos opostos.

Assim, sendo α e β as medidas, em graus, de dois ângulos geométricos, então:

$$\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta) \\ \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 0 \end{cases}$$

Em relação aos senos, a interpretação analítica nos permite concluir que:

- $\text{sen}(120°) = \text{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{sen}(135°) = \text{sen}(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{sen}(150°) = \text{sen}(30°) = \dfrac{1}{2}$

Como $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 0 \iff \cos(\beta) = -\cos(\alpha)$, essa interpretação, no que se refere aos cossenos, permite concluirmos que:

- $\cos(120°) = -\cos(60°) = -\dfrac{1}{2}$
- $\cos(135°) = -\cos(45°) = \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(150°) = -\cos(30°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Particularmente no caso dos ângulos retos, essa relação implica:

$$\begin{aligned} &\cos(90°) = -\cos(90°) \\ &\cos(90°) + \cos(90°) = 0 \\ &2\cos(90°) = 0 \\ &\cos(90°) = 0 \end{aligned}$$

Então, considerando a relação fundamental da trigonometria $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, é possível deduzirmos que $\text{sen}^2(90°) = 1$, mas não podemos concluir, apenas com base nos argumentos expostos até aqui, que o seno do ângulo reto vale +1 ou 1

Por outro lado, é fato que, nos triângulos retângulos, o seno de um ângulo de medida $\alpha < 90°$ depende do comprimento do seu cateto oposto no triângulo e do comprimento da hipotenusa, que é sempre o maior lado.

Além disso, quanto maior for o valor de α, maior também será o comprimento do seu cateto oposto e menor a diferença do comprimento do cateto e da hipotenusa do triângulo.

Em triângulos retângulos com ângulos agudos muito próximos de 90°, a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa fica bem próxima de 1 Assim, não há motivo aparente para desconfiarmos de que o seno do ângulo reto possa ser negativo como os cossenos dos ângulos obtusos

Dessa forma, a tabela com os senos e cossenos dos ângulos notáveis pode ser ampliada incorporando os valores para o ângulo reto e alguns obtusos:

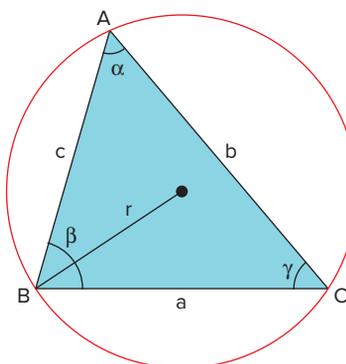
	sen	cos
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
145°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Relações trigonométricas em triângulos quaisquer

Estender os conceitos estabelecidos pelas razões tri gonométricas para além dos triângulos retângulos de forma satisfatória não seria possível sem que fossem incorporadas as interpretações dos senos e cossenos dos ângulos obtu sos. Caso contrário, os triângulos obtusângulos ficariam de fora da extensão

Conhecidos como leis dos senos e dos cossenos, os teoremas, demonstrados a seguir, compõem as mais eficientes regras de aplicação das razões trigonométricas nos triângulos de qualquer tipo.

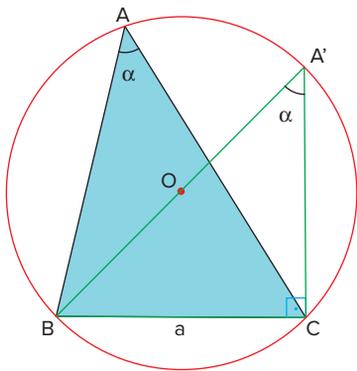
Teorema dos senos

Os lados de um triângulo são diretamente proporcionais aos senos dos seus ângulos opostos, e a constante dessa proporcionalidade equivale ao dobro do raio da circunferência circunscrita do triângulo.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = 2r$$

Demonstração:

Os argumentos que se sucedem nesta demonstração são os mesmos qualquer que seja o lado do triângulo tomado para determinarmos a razão entre o comprimento de um lado e de seu ângulo oposto no triângulo Assim, vamos considerar o lado $\overline{BC}$ de comprimento a e traçar,

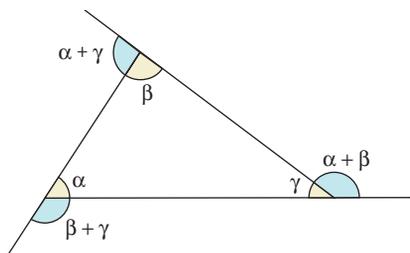
FRENTE 3

pela extremidade C, uma perpendicular ao lado, obtendo o ponto A' na circunferência circunscrita.

Então, do teorema do ângulo inscrito na circunferência, temos que o arco $\widehat{A'B}$ da circunferência oposto ao ângulo reto $B\hat{C}A'$ deve medir $2 \cdot 90° = 180°$ Assim, o segmento $\overline{A'B}$ deve passar pelo centro da circunferência, pois divide a circunferência em dois arcos de 180°.

Novamente, do teorema do ângulo inscrito, por pertencerem a um mesmo arco capaz, os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{A'}C$ têm a mesma medida α. Desse modo, no triângulo A'BC, encontramos:

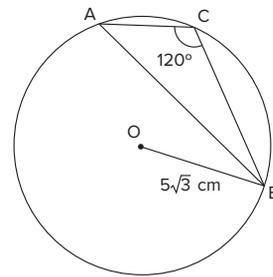
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{BC}{BA'} = \frac{a}{2r} \Rightarrow 2r \cdot \text{sen}(\alpha) = a \Rightarrow 2r = \frac{a}{\text{sen}(\alpha)}$$

A aplicação do teorema dos senos pode se tornar mais eficiente observando a possibilidade do uso dos senos tanto dos ângulos internos quanto dos externos nas proporções enunciadas, pois, sendo α, β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo, então seus ângulos externos medem $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$ e $\beta + \gamma$, com:

$$\alpha+\beta+\gamma=180° \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=180°-\gamma \\ \alpha+\gamma=180°-\beta \\ \beta+\gamma=180°-\alpha \end{cases}$$

Portanto, como ângulos suplementares têm os mesmos senos, obtemos:

- $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\gamma)$
- $\text{sen}(\alpha + \gamma) = \text{sen}(\beta)$
- $\text{sen}(\beta + \gamma) = \text{sen}(\alpha)$

Exercícios resolvidos

4 Determine a medida do lado oposto ao ângulo de 120° de um triângulo inscrito em uma circunferência α com $5\sqrt{3}$ cm de raio, como mostra a figura

Resolução:

Como, de acordo com o teorema dos senos, a razão entre cada lado de um triângulo e o seno do ângulo oposto a ele coincide com o dobro do raio do círculo circunscrito, temos:

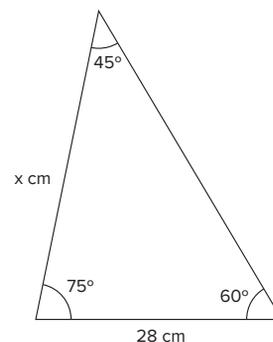
$$\frac{AB}{\text{sen}(120°)} = 2 \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow AB = \text{sen}(120°) \cdot 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

Então, como sen(120°) = sen(60°), encontramos:

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\sqrt{3} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$$

5 Os ângulos internos da base do triângulo ABC medem 75° e 60°. Determine o comprimento aproximado do lado oposto ao ângulo de 60° sabendo que a base desse triângulo mede 32 cm.
Use $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$.

Resolução:

Sendo α a medida do terceiro ângulo desse triângulo, temos: $\alpha + 60° + 75° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 45°$. Portanto, o triângulo é acutângulo, e uma figura de acordo com o enunciado é:

Como, de acordo com o teorema dos senos, os lados e senos de ângulos opostos são proporcionais, sendo *x* a medida, em centímetros, do lado oposto ao ângulo de 60°, obtemos:

$$\frac{28 \text{ cm}}{\text{sen}(45°)} = \frac{x \text{ cm}}{\text{sen}(60°)}$$

$$x \cdot \text{sen}(45°) = 28 \cdot \text{sen}(60°)$$

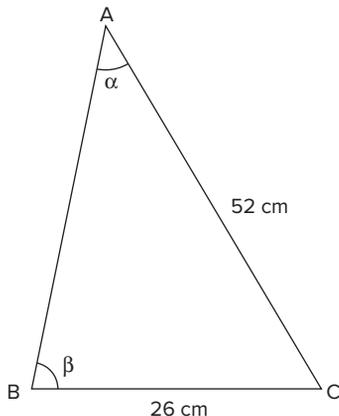
$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Aproximando as raízes, encontramos: $x = \frac{28 \cdot 1,7}{1,4} = 34$

6 Em um triângulo ABC, o seno do ângulo interno do vértice A é igual a $\frac{1}{4}$. Se os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 52 cm e 26 cm, determine a medida do ângulo interno do vértice B.

Resolução:

Sendo α e β as medidas dos ângulos internos de vértices A e B do triângulo ABC, uma figura de acordo com o enunciado é:

Pelo teorema dos senos, temos:

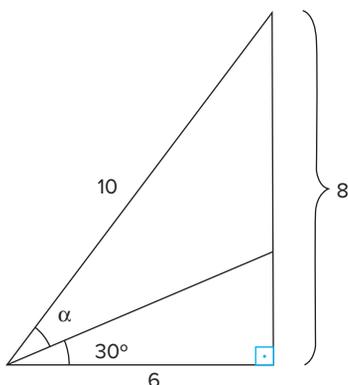
$$\frac{26\text{ cm}}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{52\text{ cm}}{\text{sen}(\beta)} \Leftrightarrow 26\cdot\text{sen}(\beta) = 52\cdot\text{sen}(\alpha)$$

Então, como de acordo com o enunciado $\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{4}$, temos:

$$26\cdot\text{sen}(\beta) = 52\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow 26\cdot\text{sen}(\beta) = 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\beta) = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

Como não há informações suficientes para saber se esse triângulo é acutângulo ou obtusângulo, devemos entender que o problema admite duas respostas possíveis: $\beta = 30°$ ou $\beta = 150°$.

7 **UFG 2012** Observe a figura a seguir, em que estão indicadas as medidas dos lados do triângulo maior e alguns dos ângulos.

O seno do ângulo indicado por α na figura vale:

A $\frac{4\sqrt{3}\quad 3}{10}$

B $\frac{4\quad\sqrt{3}}{10}$

C $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

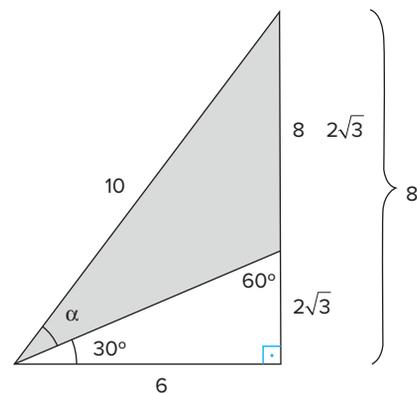
D $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

E $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$

Resolução:

A figura apresenta três triângulos. Dois deles são retângulos, e o outro é, provavelmente, escaleno.
Sendo *x* o cateto oposto ao ângulo de 30° do triângulo retângulo menor, temos:

$$\text{tg}(30°) = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow 3x = 6\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

Com base nesse resultado, concluímos que o lado vertical do triângulo escaleno mede $8\quad 2\sqrt{3}$

Então, considerando o ângulo externo de 60° do triângulo escaleno, obtemos, de acordo com o teorema dos senos:

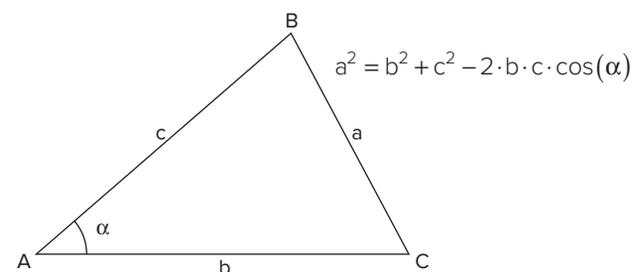
$$\frac{8\quad 2\sqrt{3}}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{10}{\text{sen}(120°)} \Leftrightarrow 10\cdot\text{sen}(\alpha) = \left(8-2\sqrt{3}\right)\cdot$$

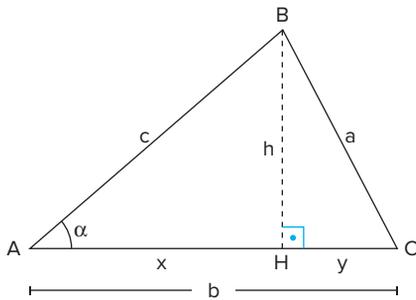
$$\cdot\,\text{sen}(60°) \Rightarrow 10\cdot\text{sen}(\alpha) = \left(8\quad 2\right)\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot\text{sen}(\alpha) = 4\sqrt{3}\quad 3\quad \alpha\quad \text{sen}(\ ) = \frac{4\sqrt{3}\quad 3}{10}$$

Alternativa: A.

Teorema dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados equivale à soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto entre esses dois lados e o cosseno do ângulo que eles formam

Demonstração:

Traçando pelo ponto B uma reta perpendicular ao lado $\overline{AC}$, obtemos a altura $\overline{BH}$ e os triângulos retângulos AHB e CHB.

Sendo h = BH, x = AH e y = CH, há quatro equações que relacionam as medidas indicadas na figura:

- na base $\overline{AC}$ do ΔABC:

$$x + y = b \quad \text{(equação I);}$$

- do teorema de Pitágoras no ΔCHB:

$$a^2 = y^2 + h^2 \quad \text{(equação II);}$$

- do teorema de Pitágoras no ΔAHB:

$$c^2 = x^2 + h^2 \quad \text{(equação III);}$$

- uma razão trigonométrica no ΔAHB:

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{c} \quad \text{(equação IV).}$$

Note que as relações expressas pelas quatro equações continuam verdadeiras quando $x \leq 0$, aceitando a possibilidade de o ângulo α ser reto ou obtuso.

Isolando *y* na equação I, temos:

$$y = b - x$$

Substituindo *y* na equação II, encontramos:

$$a^2 = (b - x)^2 + h^2$$

Desenvolvendo o produto notável, obtemos:

$$a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2 + h^2$$

Reorganizando os termos do segundo membro, temos:

$$a^2 = b^2 + \underbrace{\left(x^2 + h^2\right)}_{c^2} - 2 \cdot b \cdot x$$

Substituindo a relação da equação III, encontramos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot x \quad \text{(equação V)}$$

Isolando *x* na equação IV, obtemos:

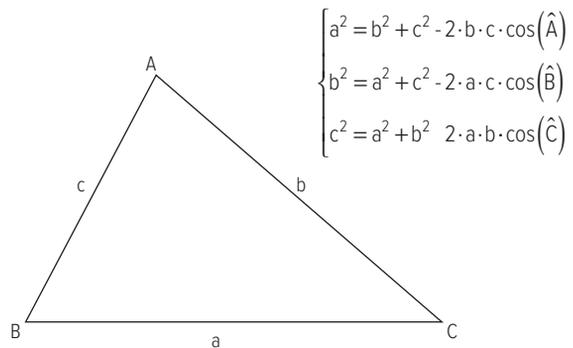
$$x = c \cdot \cos(\alpha)$$

Substituindo *x* na equação V, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

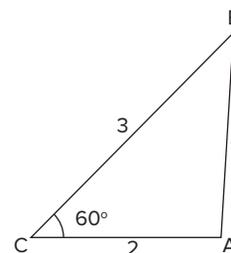
! Atenção

Como o teorema é válido para os três lados de um triângulo, qualquer que seja o triângulo ABC, com lados AB = c, AC = b e BC = a, chegamos às três equações:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A}) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C}) \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

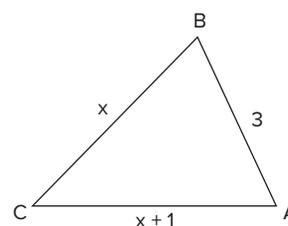
8 Determine o comprimento do lado $\overline{AB}$ oposto a um ângulo de 60° em um triângulo ABC, com AC = 2 cm e BC = 3 cm.

Resolução:

Sendo *x* a medida, em centímetros, do lado $\overline{AB}$, uma figura de acordo com o enunciado é:

Pelo teorema dos cossenos, obtemos:

$$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(60°)$$
$$x^2 = 4 + 9 - 12 \cdot \frac{1}{2}$$
$$x^2 = 13 - 6$$
$$x^2 = 7$$
$$x = \sqrt{7}$$

Portanto, AB = $\sqrt{7}$ cm

9 Na figura, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ formam um ângulo de 60°.

Determine o valor de *x*

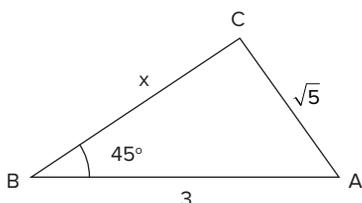
Resolução:

Pelo teorema dos cossenos, encontramos:

$$x^2 = 3^2 + (x+1)^2 \cdot\ 2\ 3 + (x \cdot\ 1)\ \cos(60°)$$
$$x^2 = 9 + x^2 + 2x + 1 - 6 \cdot (x+1) \cdot \frac{1}{2}$$
$$x^2 = x^2 + 2x + 10\quad 3x\quad 3$$
$$-2x + 3x = 10 - 3$$
$$x = 7$$

10 Em um triângulo ABC, AB = 3, AC = $\sqrt{5}$ e med$(\hat{B})$ = 45°, determine a medida $\overline{BC}$.

Resolução:

Sendo *x* a medida do lado $\overline{BC}$, uma figura de acordo com o enunciado é:

Pelo teorema dos cossenos, temos:

$$(\sqrt{5})^2 = 3^2 + x^2\quad 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos(45°) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 5 = 9 + x^2 \cdot\ 6x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\qquad x^2\ \ 3\sqrt{2}x + 4\quad 0$$
$$\Delta = (-3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 18 - 16 = 2$$
$$x = \frac{(\ 3\sqrt{2}) \pm \sqrt{2}}{2 \cdot 1} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} \begin{matrix} \nearrow x_1 = 2\sqrt{2} \\ \searrow x_2 = \sqrt{2} \end{matrix}$$

Portanto, pela condição de existência de um triângulo, temos:

$\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$

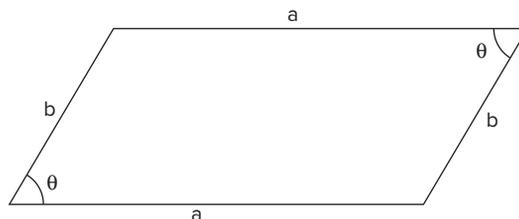
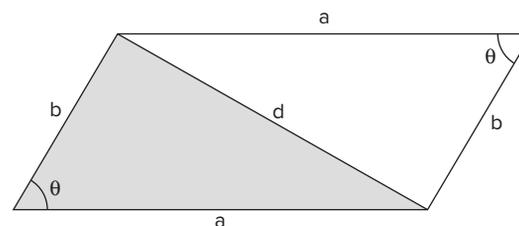
11 Determine o valor do cosseno do maior ângulo de um triângulo de lados 4, 6 e 8.

Resolução:

Como o maior lado de um triângulo está sempre oposto ao maior ângulo, sendo θ a medida do maior ângulo desse triângulo, com base no teorema dos cossenos, obtemos:

$$8^2 = 4^2 + 6^2 \cdot\ 2\ 4\ 6\ \cos(\theta)$$
$$64 = 16 + 36\ \ \cdot 48\ \cos(\theta)$$
$$48 \cdot \cos(\theta) = 16 + 36 - 64$$
$$\cos(\theta) = \ \frac{12}{48}$$
$$\cos(\theta) = -\frac{1}{4}$$

Diagonais do paralelogramo

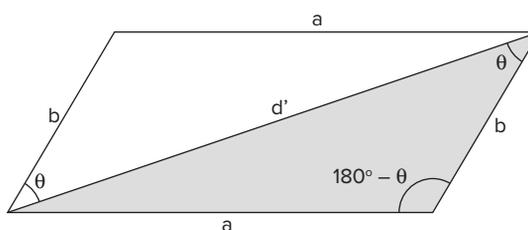
Considere um paralelogramo de lados *a* e *b* e cujos ângulos agudos medem θ.

Observe que a diagonal menor do paralelogramo fica sempre oposta aos ângulos agudos.

Assim, sendo *d* a medida dessa diagonal menor, conforme o teorema dos cossenos no triângulo em destaque, temos:

$$d^2 = a^2 + b^2\quad 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)$$

Então, como d > 0, uma expressão para a medida da diagonal menor de um paralelogramo é:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2\ \cdot 2 \cdot a\ b\ \cos(\theta)}$$

Em que *a* e *b* são os lados do paralelogramo, e θ é a medida de seus ângulos agudos.

Note agora que a diagonal maior de um paralelogramo fica sempre oposta aos ângulos obtusos dele.

Assim, sendo *d'* a medida dessa diagonal maior, como a medida dos ângulos obtusos desse paralelogramo pode ser expressa por (180° – θ), obtemos, de acordo com o teorema dos cossenos no triângulo em destaque:

$$(d')^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(180° - \theta)$$

Então, como d' > 0 e cos (180° – θ) = –cos (θ), uma expressão para a medida da diagonal maior de um paralelogramo é:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)}$$

Exercício resolvido

12 Determine as medidas das diagonais de um paralelogramo cujos lados medem 2 e $\sqrt{3}$ e cujos ângulos agudos medem 30°

FRENTE 3

Resolução:

A diagonal menor desse paralelogramo mede:

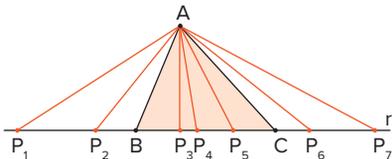
$$d = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(30°)}$$
$$d = \sqrt{4 + 3 - 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$d = \sqrt{7 \quad 6}$$
$$d = 1$$

A diagonal maior desse paralelogramo mede:

$$d' = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(30°)}$$
$$d' = \sqrt{4 + 3 + 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$d' = \sqrt{7 + 6}$$
$$d' = \sqrt{13}$$

Cevianas de triângulos

Todo segmento de reta que une o vértice de um triângulo a um ponto da reta que contém o lado oposto é denominado ceviana do triângulo.

Em um triângulo ABC, as cevianas com uma extremidade no vértice A, por exemplo, têm a outra extremidade em algum ponto da reta suporte do lado $\overline{BC}$.

Na figura, todos os segmentos $\overline{AP_n}$ são cevianas relativas ao vértice A do triângulo.

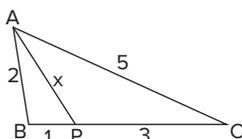
Da mesma forma, existem as cevianas do vértice B, que têm uma extremidade em B e a outra na reta $\overleftrightarrow{AC}$, e também as cevianas do vértice C, que têm uma extremidade em C e a outra na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Entre as cevianas mais importantes de um triângulo estão os próprios lados do triângulo, suas alturas, suas bissetrizes internas e externas e suas medianas.

Cada ceviana dessas possui uma propriedade particular. Sem os lados, não há triângulo; as alturas são úteis no cálculo da área do triângulo; as bissetrizes internas e externas têm seus teoremas específicos; e as medianas apresentam a propriedade de dividir o triângulo em áreas iguais.

O teorema dos cossenos é uma ferramenta muito útil para encontrar o comprimento de uma ceviana. Acompanhe nos exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

13 Na figura, determine a medida *x* da ceviana $\overline{AP}$ do triângulo ABC.

Resolução:

Sendo θ a medida do ângulo interno de vértice B, como BC = 1 + 3 = 4, de acordo com o teorema dos cossenos, no ΔABC temos:

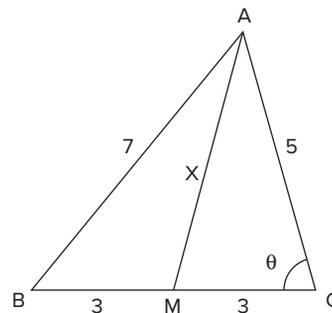
$$5^2 = 2^2 + 4^2 \cdot \ 2 \ 2 \ 4 \ \cos(\theta)$$
$$25 = 4 + 16 - 16 \cdot \cos(\theta)$$
$$16 \cdot \cos(\theta) = 20 \quad 25$$
$$\cos(\theta) = -\frac{5}{16}$$

Com esse resultado, pelo teorema dos cossenos no ΔABP, encontramos:

$$x^2 = 1^2 + 2^2 \cdot \ 2 \ 1 \ 2 \ \cos(\theta)$$
$$x^2 = 1 + 4 - 4 \cdot \left(-\frac{5}{16}\right)$$
$$x^2 = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$$
$$x = \frac{5}{2}$$

14 Determine o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ em um triângulo ABC cujos lados medem AB = 7 cm, BC = 6 cm e AC = 5 cm.

Resolução:

Sendo *x* o comprimento, em centímetros, da mediana $\overline{AM}$, e θ a medida do ângulo interno do vértice C, uma figura de acordo com o enunciado pode ser:

Pelo teorema dos cossenos, no ΔABC obtemos:

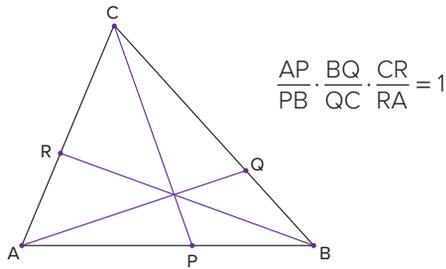
$$7^2 = 5^2 + 6^2 \cdot \ 2 \ 5 \ 6 \ \cos(\theta)$$
$$49 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos(\theta)$$
$$60 \cdot \cos(\theta) = 61 \quad 49$$
$$\cos(\theta) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

Com esse resultado, pelo teorema dos cossenos no ΔAMC, temos:

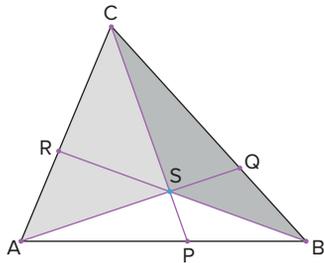
$$x^2 = 3^2 + 5^2 \cdot \ 2 \ 3 \ 5 \ \cos(\theta)$$
$$x^2 = 9 + 25 \quad \cdot 30 \ \frac{1}{5}$$
$$x^2 = 34 \quad 6$$
$$x = \sqrt{28}$$
$$x = 2\sqrt{7}$$

Teorema das cevianas

Em um triângulo, quando três cevianas se interceptam no mesmo ponto, elas dividem os lados do triângulo em razões cujo produto é unitário

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

Esse teorema foi provado, em 1678, pelo geômetra e engenheiro italiano Giovanni Ceva (1646-1734) – daí o termo “ceviana”, criado em homenagem a ele. Por isso, o teorema também é conhecido como teorema de Ceva.

Demonstração:

Consideremos que, se dois triângulos têm a mesma altura, então suas áreas são diretamente proporcionais aos comprimentos de suas bases.

Sendo S o ponto de interseção das cevianas e indi cando entre colchetes as áreas dos triângulos, da figura, podemos extrair as seguintes proporções:

- $\frac{AP}{PB}=\frac{[APC]}{[BPC]}=\frac{[APS]}{[BPS]}=\frac{[APC]-[APS]}{[BPC]\quad[BPS]}=\frac{[ASC]}{[BSC]}$
- $\frac{BQ}{QC}=\frac{[BQA]}{[CQA]}=\frac{[BQS]}{[CQS]}=\frac{[BQA]\quad[BQS]}{[CQA]-[CQS]}=\frac{[ASB]}{[ASC]}$
- $\frac{CR}{RA}=\frac{[CRB]}{[ARB]}=\frac{[CRS]}{[ARS]}=\frac{[CRB]\quad[CRS]}{[ARB]-[ARS]}=\frac{[BSC]}{[ASB]}$

Multiplicando essas razões, obtemos:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{[ASC]}{[BSC]}\cdot\frac{[ASB]}{[ASC]}\cdot\frac{[BSC]}{[ASB]}$$

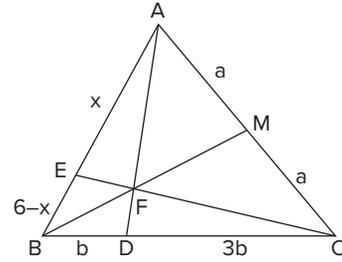
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

Exercício resolvido

15 Em um triângulo ABC, de base AB = 6, M é o ponto médio do lado $\overline{AC}$ e o ponto D divide o lado $\overline{BC}$ de modo que CD = 3 · BD. Além disso, os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BM}$ se interceptam no ponto F, e a reta $\overleftrightarrow{CF}$ intercepta o lado $\overline{AB}$ no ponto E.

Determine o comprimento do segmento $\overline{AE}$.

Resolução:

Sendo AM = a, como M é ponto médio de AC, então CM = AM = a Se BD = b, logo CD = 3 · BD = 3b E, sendo AE = x, temos EB = 6   x Uma figura de acordo com o enunciado pode ser:

Pelo teorema das cevianas, obtemos:

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CM}{MA}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{6\quad x}\cdot\frac{b}{3b}\cdot\frac{a}{a}=1$$

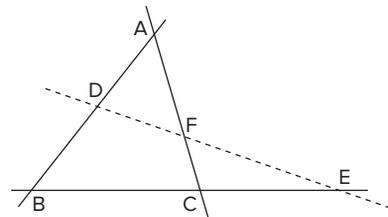
Simplificando as frações expressas por *a* e *b*, encontramos:

$$\frac{x}{6-x}\cdot\frac{1}{3}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{3(6-x)}=1 \Rightarrow x=3(6\quad x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=18\quad 3x\Rightarrow\quad 4x\quad 18\Rightarrow\quad =x\quad \frac{9}{2}$$

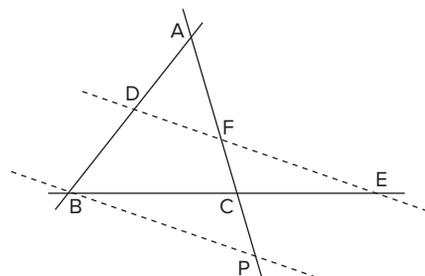
Portanto, $AE=\frac{9}{2}=4,5.$

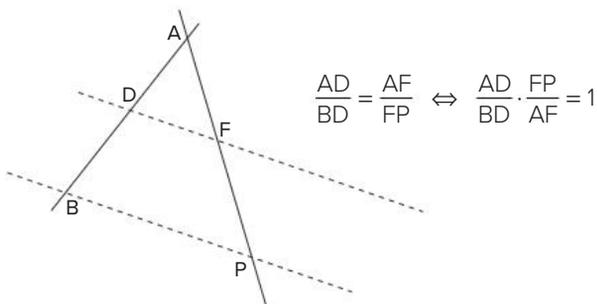
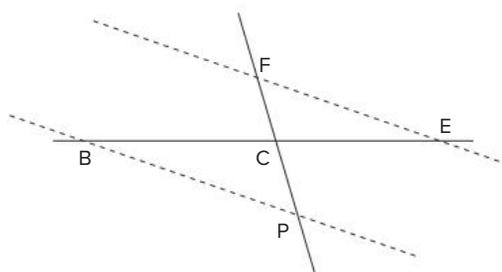
Teorema de Menelaus

Se três retas determinam um triângulo ABC e uma quar ta reta intercepta as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente, nos pontos D, E e F, então: $\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BE}{CE}\cdot\frac{CF}{AF}=1$

Esse teorema foi demonstrado pelo geômetra e astrônomo Menelaus de Alexandria, por volta do século II d.C.

Demonstração:

Traçando pelo ponto B uma paralela à reta $\overleftrightarrow{DE}$, obtemos o ponto P no prolongamento do lado $\overline{AC}$ do triângulo:

FRENTE 3

Aplicando o teorema de Tales nas transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AP}$, encontramos:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FP} \Leftrightarrow \frac{AD}{BD} \cdot \frac{FP}{AF} = 1$$

Aplicando o teorema de Tales nas transversais $\overleftrightarrow{FP}$ e $\overleftrightarrow{BE}$, temos:

$$\frac{CF}{FP} = \frac{CE}{BE} \Leftrightarrow \frac{CF}{FP} \cdot \frac{BE}{CE} = 1$$

Multiplicando as equações obtidas, encontramos:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{FP}{AF} \cdot \frac{CF}{FP} \cdot \frac{BE}{CE} = 1 \cdot 1$$

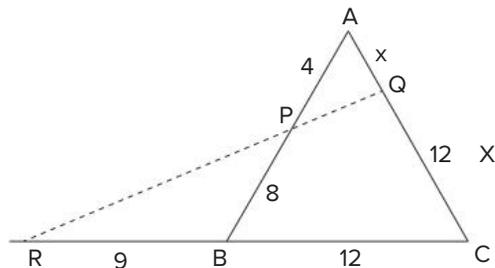
Cancelando FP e reordenando as frações, obtemos:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

Exercício resolvido

16 Em um triângulo equilátero ABC de lados medindo 12 cm, P é um ponto do lado $\overline{AB}$ tal que AP = 4 cm e Q é um ponto do lado $\overline{AC}$. Sabendo que o ponto R, de intersecção das retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, é tal que BR = 9 cm, determine o comprimento do segmento $\overline{AQ}$.

Resolução:

Sendo AQ = x, uma figura de acordo com o enunciado é:

Pelo teorema de Menelaus, temos:

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BR}{CR} \cdot \frac{CQ}{AQ} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{8} \cdot \frac{9}{(9+12)} \cdot \frac{(12 \quad x)}{x} = 1$$

Fazendo as simplificações possíveis, encontramos:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{(12-x)}{x} = 1$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{(12-x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{3(12-x)}{14x} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14x = 36 - 3x \Rightarrow 17x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{17}$$

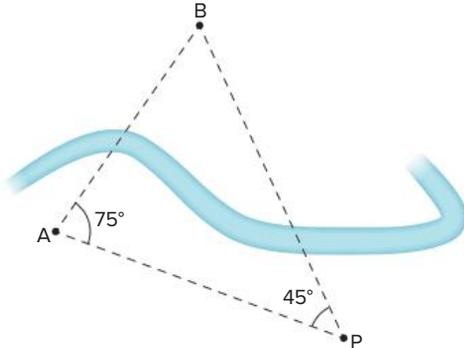
Revisando

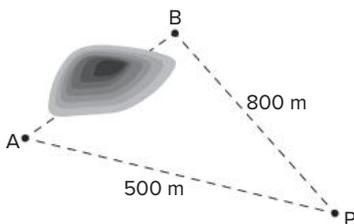
1 O ponteiro das horas de um relógio de parede mede 21 cm, e o ponteiro dos minutos mede 32 cm. Em dado instante, após o meio-dia, esses ponteiros formam um ângulo obtuso, como mostra a figura a seguir:

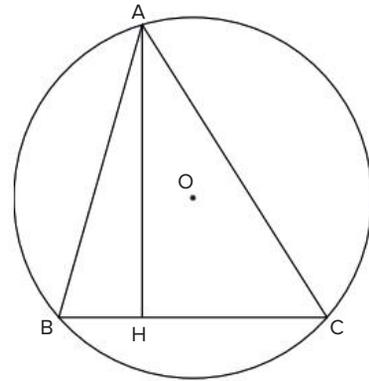
Se, nesse momento, a distância entre as extremidades dos dois ponteiros for expressa, em centímetros, por um número múltiplo de 5, então o maior valor possível para essa distância é:

A 35 cm
B 40 cm.
C 45 cm
D 50 cm
E 55 cm.

2 A Geometria Plana é, desde seu princípio, a ciência de se medir a Terra. Atualmente, o profissional que coleta essas medidas é chamado de topógrafo. Leia as duas situações a seguir e resolva-as.

Situação 1: Um topógrafo quer determinar a distância entre os pontos A e B situados em lados opostos de um rio, como ilustra a figura a seguir (fora de escala):

Para isso, ele verifica que o ângulo $A\hat{P}B$ mede 45°, que a distância entre A e P é de 24,5 m e que o ângulo $P\hat{A}B$ mede 75°. Sabendo que 24,5 é um valor próximo de $10\sqrt{6}$ e que os lados de um triângulo são diretamente proporcionais aos valores dos senos de seus ângulos opostos, ajude o topógrafo a calcular a distância de A até B.

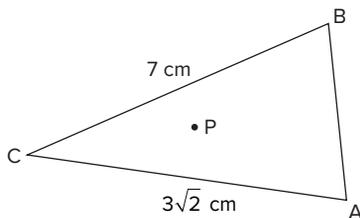
Situação 2: Outro topógrafo quer determinar a distância entre os pontos A e B, mas não pode percorrê-la, pois entre esses pontos há um morro muito alto, como ilustra a figura seguinte (fora de escala):

Para isso, ele verifica que a distância entre os pontos P e A é de 500 m, que o ângulo $A\hat{P}B$ mede 60° e que a distância entre os pontos P e B é de 800 m Usando o teorema dos cossenos, ajude o topógrafo a calcular a distância entre os pontos A e B

3 Na figura, o triângulo ABC está inscrito em uma circunferência de centro O e raio 25 cm.

Sabendo que AB = 35 cm e AC = 40 cm, determine a medida da altura $\overline{AH}$ desse triângulo.

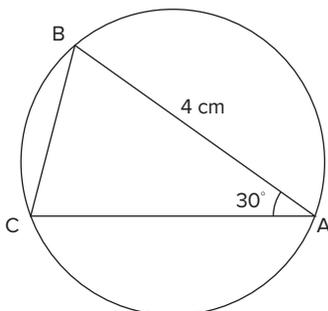
4 **Uece 2016** A medida do cosseno do maior dos ângulos internos do triângulo cujas medidas dos lados são respectivamente 8 m, 10 m e 15 m é igual a

A –0,38125.
B –0,42112.
C –0,43713.
D –0,46812.

5 **IFRJ 2014** Considerando que ABC é um triângulo tal que AC = 4 cm, BC = $\sqrt{13}$ cm e $\hat{A} = 60°$, calcule os possíveis valores para a medida do lado $\overline{AB}$.

6 Os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ de um triângulo medem, respectivamente, $3\sqrt{2}$ m e 7 m, como mostra a figura:

Sabendo que $med(\hat{C}) = 45°$ e que o ponto P dista igualmente de todos os vértices do triângulo, responda às seguintes perguntas:

a) Qual é o comprimento do lado $\overline{AB}$ do triângulo?
b) Qual é o valor do seno do ângulo interno de vértice B desse triângulo?
c) Qual o valor da distância do ponto A ao ponto P?

7 Um triângulo ABC tem $med(\hat{A}) = 30°$, AB = 4 cm e está inscrito em um círculo, como mostra a figura:

Sabendo que $sen(\hat{C}) = \frac{2}{3}$, determine:

a) o comprimento do lado $\overline{BC}$ do triângulo;
b) o comprimento do raio do círculo que circunscreve o triângulo.

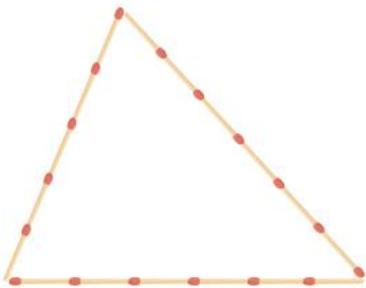
8 Considere um triângulo com lados de 2 m, 3 m e $\sqrt{7}$ m.

a) Determine o valor do cosseno do ângulo formado pelos lados de 2 m e 3 m.
b) Determine a medida em graus desse ângulo.
c) Encontre os valores dos senos dos outros ângulos desse triângulo.

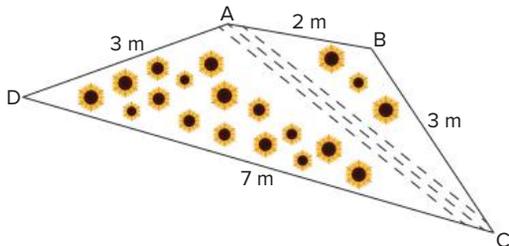
9 Um quadrilátero ABCD está inscrito em uma circunferência de centro O. Os lados desse quadrilátero medem AB = BC = 5, CD = 3 e AD = 8. Determine a medida da diagonal $\overline{BD}$.

10 O segmento $\overline{AC}$ é a maior diagonal de um paralelogramo ABCD. Sabendo que esse paralelogramo possui um ângulo interno de 60° e lados com 2 cm e 4 cm de comprimento, calcule a medida do segmento $\overline{AC}$.

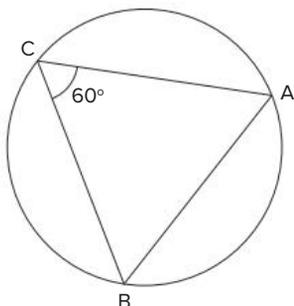
Exercícios propostos

1 Enem 2014 Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.

A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é:

A 3
B 5
C 6
D 8
E 10

2 No quintal de sua casa, Dona Carla tem um jardim de girassóis no formato de um quadrilátero ABCD, cujos lados medem 2, 3, 7 e 3 metros, como ilustra a figura a seguir:

Ela deseja fazer um caminho de pedras, em linha reta, que atravesse todo o jardim sobre a diagonal $\overline{AC}$, indicada na figura; para isso, precisará comprar nove pedras por metro O número total de pedras que Dona Carla precisará está entre:

A 27 e 36.
B 36 e 45
C 45 e 54.
D 54 e 63.
E 63 e 72

3 UFJF 2012 Uma praça circular de raio R foi construída a partir da planta a seguir:

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ simbolizam ciclovias construídas no interior da praça, sendo que AB = 80 m. De acordo com a planta e as informações dadas, é correto afirmar que a medida de R é igual a:

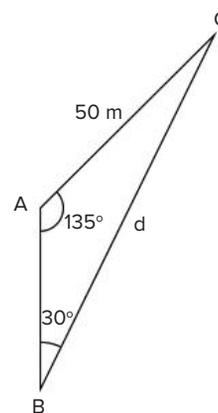
A $\frac{160\sqrt{3}}{3}$ m.
B $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ m.
C $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ m.
D $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ m.
E $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m.

4 EEAR 2017 Seja um triângulo inscrito em uma circunferência de raio R. Se esse triângulo tem um ângulo medindo 30°, seu lado oposto a esse ângulo mede:

A $\frac{R}{2}$
B R
C 2R
D $\frac{2R}{3}$

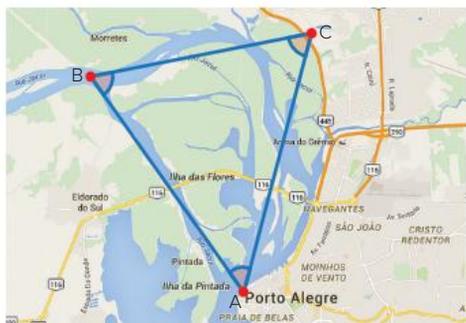
5 O lado $\overline{AB}$ de um triângulo mede $10\sqrt{6}$ m e os ângulos internos de vértices A e B medem 75° e 45° respectivamente. Então, o lado $\overline{AC}$ desse triângulo mede:

A 20 m.
B 25 m.
C 30 m.
D 35 m.
E 40 m.

6 UFSM Na instalação das lâmpadas de uma praça de alimentação, a equipe necessitou calcular corretamente a distância entre duas delas, colocadas nos vértices B e C do triângulo, segundo a figura.

Assim, a distância *d* é:

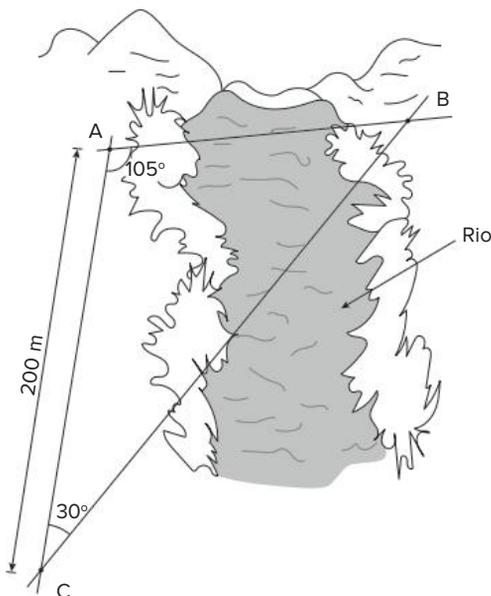
A $50\sqrt{2}$ m.
B $\frac{50\sqrt{6}}{3}$ m
C $50\sqrt{3}$ m.
D $25\sqrt{6}$ m.
E $50\sqrt{6}$ m.

FRENTE 3

7 **UFSM 2011** A figura a seguir apresenta o delta do Rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana o torna suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.

Fonte:<http://maps.google.com.br>.

A distância do ponto B ao ponto C é de 8 km, o ângulo $\hat{A}$ mede 45° e o ângulo $\hat{C}$ mede 75° Uma maneira de estimar quanto do Delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto A ao ponto C Essa distância, em km, é:

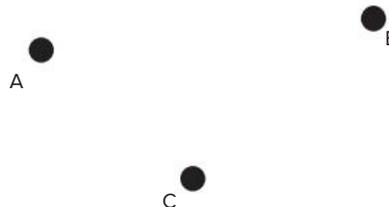
A $\frac{8\sqrt{6}}{3}$
B $4\sqrt{6}$
C $8\sqrt{2}+\sqrt{3}$
D $8(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
E $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

8 **UFPB** A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, A e B, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, C, distante 200 m do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $A\hat{C}B$ e $B\hat{A}C$ mediam, respectivamente, 30° e 105°, conforme ilustrado na figura a seguir.

Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto A ao ponto B é de:

A $200\sqrt{2}$
B $180\sqrt{2}$
C $150\sqrt{2}$
D $100\sqrt{2}$
E $50\sqrt{2}$

9 Os ponteiros de um relógio analógico medem 5 cm e 8 cm. Qual é a distância, em centímetros, entre suas extremidades em um momento em que eles formam um ângulo de 60°?

A $2\sqrt{13}$
B $\sqrt{51}$
C $5\sqrt{2}$
D 7
E $4\sqrt{3}$

10 **IFSul 2015** Em certa cidade, a igreja está localizada no ponto A, a prefeitura no ponto B, e a livraria no ponto C, como mostram os pontos a seguir. Sabendo-se que a distância da igreja à prefeitura é de 10 metros, a distância da prefeitura à livraria corresponde a 15 metros, e que o ângulo formado por essas duas direções é 60°, a distância da livraria à igreja é:

A $17\sqrt{5}$ m.
B $5\sqrt{7}$ m.
C $25\sqrt{7}$ m.
D $7\sqrt{5}$ m.

11 **PUC-Rio 2012** Seja um hexágono regular ABCDEF. A razão entre os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ é igual a:

A $\sqrt{2}$
B $\frac{3}{2}$
C $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
D $\sqrt{3}$
E 2

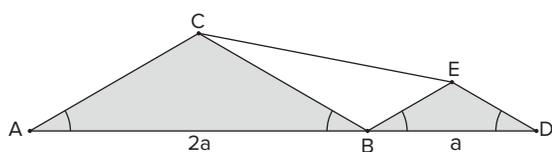
12 **IFSP 2014** A base de um triângulo isósceles mede $3\sqrt{3}$ cm e o ângulo oposto à base mede 120°. A medida dos lados congruentes desse triângulo, em centímetros, é:

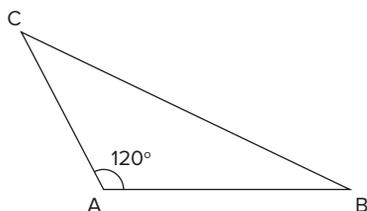
A 3
B 2
C $\sqrt{3}$
D $1+\sqrt{3}$
E $2-\sqrt{3}$

13 **UPE 2017** João está procurando cercar um terreno triangular que ele comprou no campo. Ele sabe que dois lados desse terreno medem, respectivamente, 10 m e 6 m e formam entre si um ângulo de 120°. O terreno será cercado com três voltas de arame farpado. Se o preço do metro do arame custa R$ 5,00, qual será o valor gasto por João com a compra do arame?

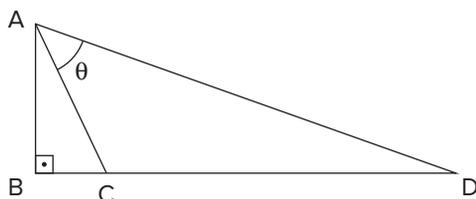
Dados: $\text{sen}(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(120°) = \frac{1}{2}$.

A R$ 300,00
B R$ 420,00
C R$ 450,00
D R$ 500,00
E R$ 520,00

14 **Unicamp 2013** Na figura a seguir, ABC e BDE são triângulos isósceles semelhantes de bases 2a e a, respectivamente, e o ângulo $C\hat{A}B = 30°$ Portanto, o comprimento do segmento $\overline{CE}$ é:

A $a\sqrt{\frac{5}{3}}$
B $a\sqrt{\frac{8}{3}}$
C $a\sqrt{\frac{7}{3}}$
D $a\sqrt{2}$

15 **UFTM 2012** Na figura estão posicionadas as cidades vizinhas A, B e C, que são ligadas por estradas em linha reta. Sabe-se que, seguindo por essas estradas, a distância entre A e C é de 24 km, e entre A e B é de 36 km.

Nesse caso, pode-se concluir que a distância, em km, entre B e C é igual a:

A $8\sqrt{17}$
B $12\sqrt{19}$
C $12\sqrt{23}$
D $20\sqrt{15}$
E $20\sqrt{13}$

16 **Unicamp 2017** Considere o triângulo retângulo ABD exibido na figura a seguir, em que AB = 2 cm, BC = = 1 cm e CD = 5 cm. Então, o ângulo θ é igual a:

A 15°
B 30°
C 45°
D 60°

17 **UFPR 2014** Dois navios deixam um porto ao mesmo tempo. O primeiro viaja a uma velocidade de 16 km/h em um curso de 45° em relação ao norte, no sentido horário. O segundo viaja a uma velocidade de 6 km/h em um curso de 105° em relação ao norte, também no sentido horário. Após uma hora de viagem, a que distância se encontrarão separados os navios, supondo que eles tenham mantido o mesmo curso e velocidade desde que deixaram o porto?

A 10 km.
B 14 km.
C 15 km.
D 17 km.
E 22 km.

18 **UEPB 2012** A diagonal menor de um paralelogramo divide um de seus ângulos internos em dois outros. Um β e o outro 2β. A razão entre o maior e o menor lado do paralelogramo é:

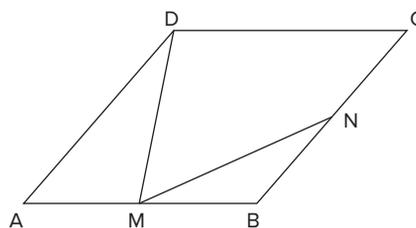
A $2\text{sen}\beta$
B $\frac{1}{2\cos\beta}$
C $2\cos\beta$
D $\frac{1}{2\text{sen}\beta}$
E $\text{tg}\beta$

19 Em um paralelogramo, cada ângulo agudo mede 30° e os lados que formam cada um desses ângulos medem $3\sqrt{3}$ cm e 5 cm. Calcule a medida da menor das diagonais.

A $\sqrt{6}$ cm
B $\sqrt{3}$ cm.
C $3\sqrt{3}$ cm
D $\sqrt{7}$ cm
E $15\sqrt{3}$ cm

20 **Fuvest 2011** No losango ABCD de lado 1, representado na figura, tem-se que M é o ponto médio de $\overline{AB}$, N é o ponto médio de $\overline{BC}$ e $MN = \frac{\sqrt{14}}{4}$ Então, DM é igual a:

A $\frac{\sqrt{2}}{4}$
B $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C $\sqrt{2}$
D $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
E $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Textos complementares

Perspectivas

A palavra perspectiva vem do latim *perspicere* (ver através de). Se você se colocar atrás de uma janela envidraçada e, sem se mover do lugar, riscar no vidro o que está "vendo através da janela", terá feito uma perspectiva; a perspectiva é a representação gráfica que mostra os objetos como eles aparecem a nossa vista, com três dimensões. [...]

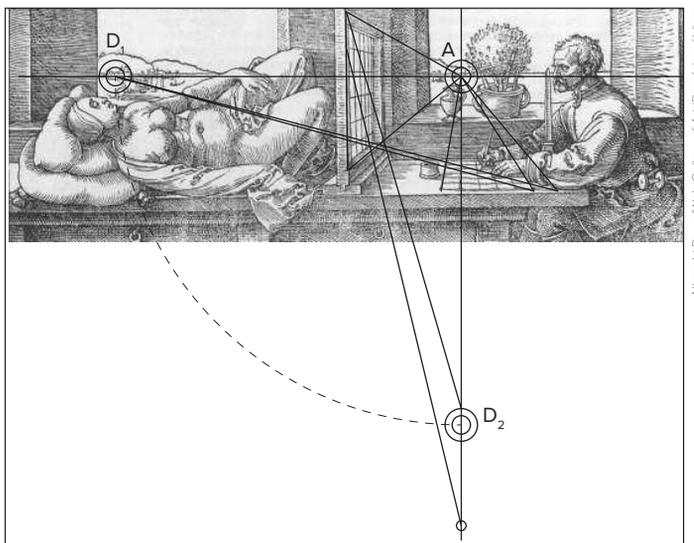



Fig. 1 Albrecht Dürer, *Desenhista desenhando uma mulher reclinada*, 1525, xilogravura, Coleção Gráfica Albertina, Viena, Áustria. (Domínio público)

Perspectiva axonométrica

A perspectiva axonométrica, também chamada de perspectiva paralela e axonometria, é uma projeção cilíndrica ortogonal sobre um plano oblíquo em relação às três dimensões do corpo a representar.

A perspectiva axonométrica é amplamente usada no campo da engenharia devido à simplicidade de construção e ao fato de proporcionar imagens semelhantes às da perspectiva exata quando o ângulo visual desta é igual ou inferior a 30° A aplicação mais usual da axonometria é na perspectiva de instalações hidráulicas e na de peças, em que o problema de medidas é fundamental As perspectivas axonométricas são classificadas em dois tipos:

1. Axonometria oblíqua (perspectivas: militar e cavaleira)
2 Axonometria ortogonal (perspectivas: isométrica, dimétrica e anisométrica) [ ]

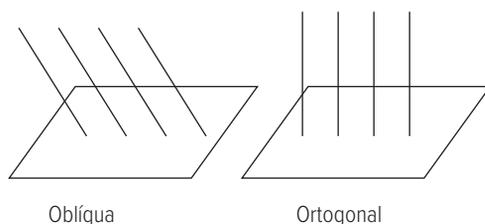



Fig. 2

BARISON, Maria Bernardete "Geométrica: desenho geometria e arquitetura on line" *UEL*
Disponível em: <www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/gd_t/gd_2t.php>. Acesso em: 11 out. 2018.

Perspectiva axonométrica cavaleira

[...] A origem do nome cavaleira é duvidosa, afirmando uns que provém do nome dado a um tipo de construção alta – o cavalier – que existia em certas fortificações militares do século XVI e de onde se tinha sobre a própria fortificação uma visão "do alto" – que seria semelhante à dada pela perspectiva cavaleira Outros dizem que o nome está relacionado com o ponto de vista alto de um cavaleiro, e ainda outros que deriva dos trabalhos do matemático italiano Cavalieri. [ ]

"Inovação no ensino da Geometria". *APM*. Disponível em: <www.apm.pt/apm/geometria/inoveg/egtext1.html>. Acesso em: 11 out. 2018.

[ ] É também conhecida como axonometria oblíqua, pois é uma projeção que pressupõe o observador no infinito e, em consequência, utiliza os raios paralelos e oblíquos ao plano do quadro Esta perspectiva torna uma das três faces do triedro como plano do quadro Todos os segmentos ou figuras pertencentes ao plano yz se projetam em VG (verdadeira grandeza). Quando a inclinação dos raios projetantes é de 45° os coeficientes de redução são 1:1:1. [...]

BARISON, Maria Bernardete. "Geométrica: desenho geometria e arquitetura on line". *UEL*.
Disponível em: <www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/gd_t/gd_2t.php>. Acesso em: 11 out. 2018.

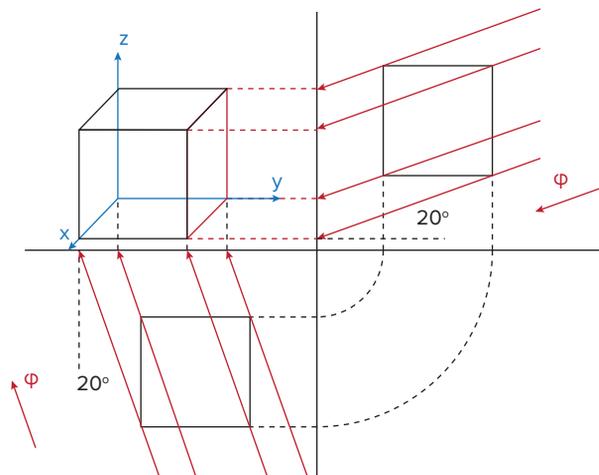



Fig. 3

BARISON, Maria Bernardete "Geométrica: desenho geometria e arquitetura on line" *UEL* Disponível em: <www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/gd_t/gd_2t.php>. Acesso em: 11 out. 2018.

Resumindo

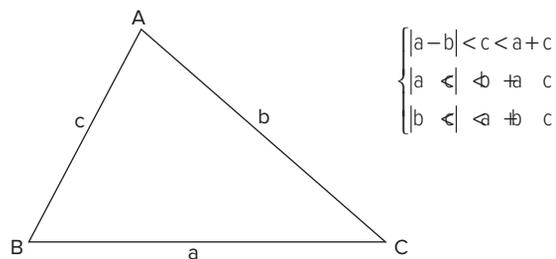
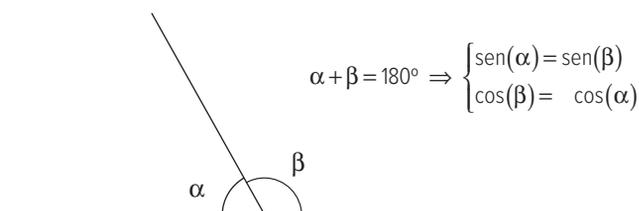
Classificação dos triângulos

Em relação aos lados: escalenos, isósceles ou equiláteros.

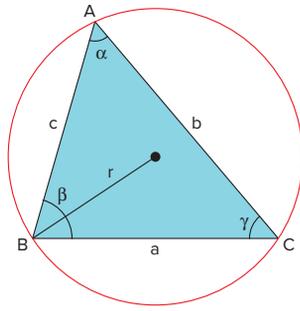
Em relação aos ângulos internos: acutângulos, retângulos ou obtusângulos.

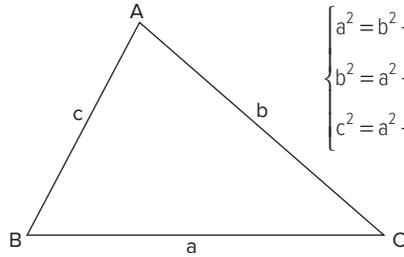
Desigualdade triangular

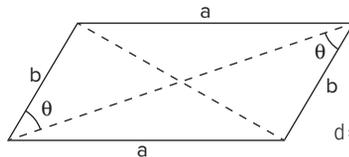
$$\begin{cases} |a-b| < c < a+c \\ |a-c| < b < a+c \\ |b-c| < a < b+c \end{cases}$$

Ângulos suplementares

$$\alpha+\beta=180° \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(\alpha)=\text{sen}(\beta) \\ \cos(\beta)=-\cos(\alpha) \end{cases}$$

Ângulos notáveis

	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

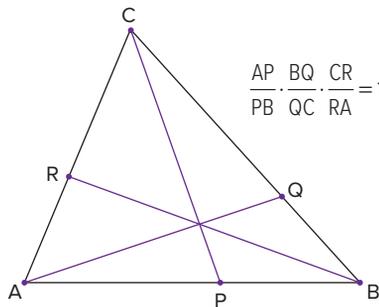
Teorema dos senos

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = 2r$$

Teorema dos cossenos

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \quad 2 \; b \; c \; \cos(\hat{A}) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C}) \end{cases}$$

Diagonais do paralelogramo

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)}$$

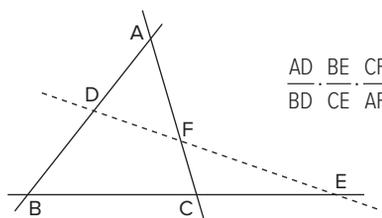
Cevianas de triângulos

Todo segmento de reta que une o vértice de um triângulo a um ponto da reta que contém o lado oposto é denominado ceviana do triângulo.

Teorema das cevianas

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

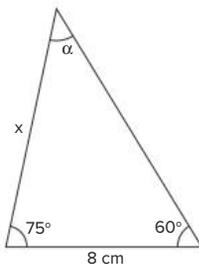
Teorema de Menelaus

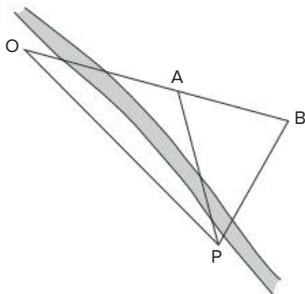
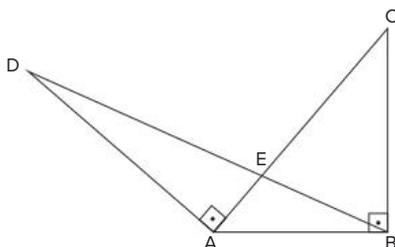
$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

Quer saber mais?

Sites

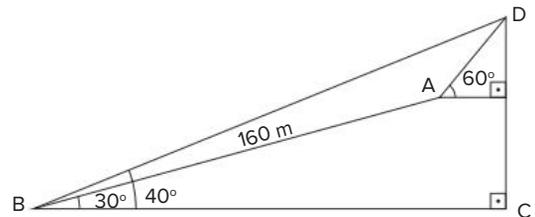
- Sobre os teoremas dos senos e cossenos
  <http://suaauladematematica.blogspot.com br/2013/08/a lei do-seno-e-do-coseno-e-sua.html>
- Para aprofundar os conhecimentos sobre a principal aplicação do teorema dos cossenos ao estudo da Física
  <www.eletrica.ufpr br/ufpr2/professor/49/TE224/Aula%202%20Vetores pdf>
- Outra demonstração para o teorema de Menelaus
  <www.youtube.com/watch?v=ZBJ8ctbam_w>.

Exercícios complementares

1 UFPR 2017 Considere o triângulo a seguir.

a) Quanto mede o ângulo α?
b) Quanto mede x?

2 UFPE Na ilustração a seguir, a casa situada no ponto B deve ser ligada com um cabo subterrâneo de energia elétrica, saindo do ponto A. Para calcular a distância AB, são medidos a distância e os ângulos a partir de dois pontos O e P, situados na margem oposta do rio, sendo O, A e B colineares. Se $med(O\hat{P}A) = 30°$, $med(P\hat{O}A) = 30°$, $med(A\hat{P}B) = 45°$ e $OP = (3 + \sqrt{3})$ km, calcule AB em hectômetros.

3 Mackenzie 2016

Na figura anterior, ABC e AED são triângulos retângulos. Se $m(\overline{AC}) = \ell$, $m(B\hat{A}C) = \alpha$, $m(A\hat{D}E) = \beta$ e $m(A\hat{B}C) = m(D\hat{A}E) = 90°$, então $m(\overline{BD})$ é:

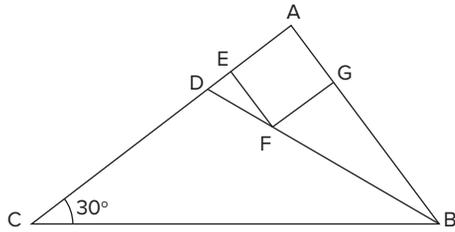
A $\ell \cdot \cos\alpha$
B $\ell \cdot \text{sen}^2\alpha$
C $\ell \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta$
D $\ell \cdot \dfrac{\cos^2\alpha}{\text{sen}\beta}$
E $\ell \cdot \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\beta}$

4 IFMG 2011 Um grupo de escoteiros pretende escalar uma montanha até o topo, representado na figura a seguir pelo ponto D, visto sob ângulos de 40° do acampamento B e de 60° do acampamento A.
Dado: sen(20°) = 0,342.

Considerando que o percurso de 160 m entre A e B é realizado segundo um ângulo de 30° em relação à base da montanha, então, a distância entre B e D, em *m*, é de, aproximadamente:

A 190
B 234
C 260
D 320

5 Uece 2015 Sejam x, y e z as medidas dos lados do triângulo XYZ e R a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Se o produto dos senos dos ângulos internos do triângulo é $\dfrac{k \cdot x \cdot y \cdot z}{R^3}$, então o valor de k é:

A 0,500
B 0,250
C 0,125
D 1,000

6 UFTM 2012 Na figura, AEFG é um quadrado e $\overline{BD}$ divide o ângulo $A\hat{B}C$ ao meio.

Sendo $CD = 2\sqrt{3}$ cm, o lado do quadrado AEFG, em centímetros, mede:

A $\frac{\sqrt{3}\quad 1}{2}$

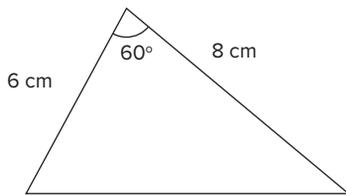
B $\sqrt{3}\quad 1$

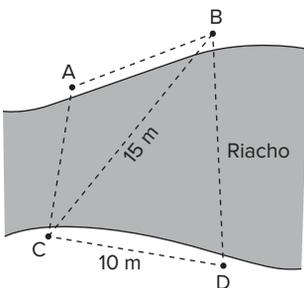
C $\frac{6\left(\sqrt{3}\quad 1\right)}{5}$

D $\frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}$

E $\frac{3\left(\sqrt{3}\quad 1\right)}{2}$

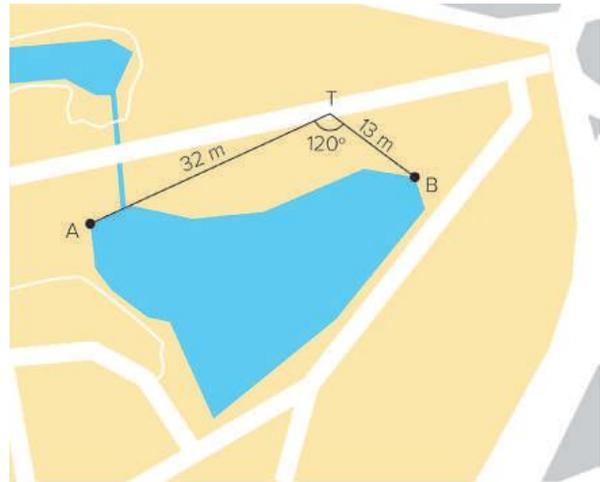
7 FGV 2012

a) Determine o perímetro do triângulo na forma decimal aproximada, até os décimos. Se quiser, use algum destes dados: $35^2 = 1225$; $36^2 = 1296$; $37^2 = 1369$.

b) Um aluno tinha de fazer um cartaz triangular, em cartolina. Decidiu construir o triângulo com as seguintes medidas dos lados: 6 cm, 8 cm e 16 cm. Ele conseguirá fazer o cartaz? Por quê?

8 Unicamp 2012 Um topógrafo deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura a seguir. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos especificados na tabela a seguir, obtidos com a ajuda de um teodolito.

Visada	Ângulo
$A\hat{C}B$	$\pi/6$
$B\hat{C}D$	$\pi/3$
$A\hat{B}C$	$\pi/6$

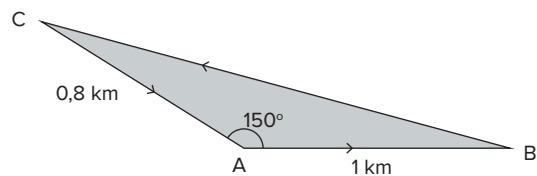
a) Calcule a distância entre A e B.

b) Calcule a distância entre B e D.

9 Uerj 2017 Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T, um técnico determinou as medidas AT = 32 m; BT = 13 m e $A\hat{T}B = 120°$, representadas no esquema seguinte.

Calcule a distância, em metros, entre os pontos A e B, definidos pelo técnico nas margens desse lago.

10 UFSM 2013 A caminhada é uma das atividades físicas que, quando realizada com frequência, torna-se eficaz na prevenção de doenças crônicas e na melhora da qualidade de vida.

Para a prática de uma caminhada, uma pessoa sai do ponto A, passa pelos pontos B e C e retorna ao ponto A, conforme trajeto indicado na figura.

Dado: $\sqrt{3} = 1,7$

Quantos quilômetros ela terá caminhado se percorrer todo o trajeto?

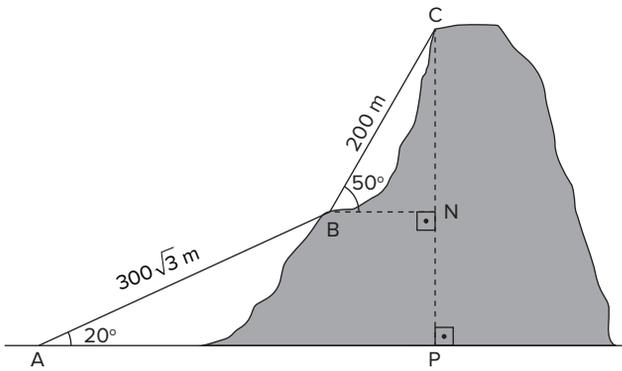
A 2,29

B 2,33

C 3,16

D 3,50

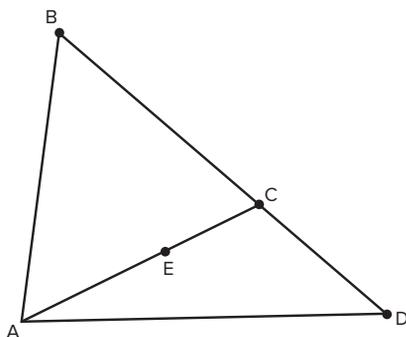
E 4,80

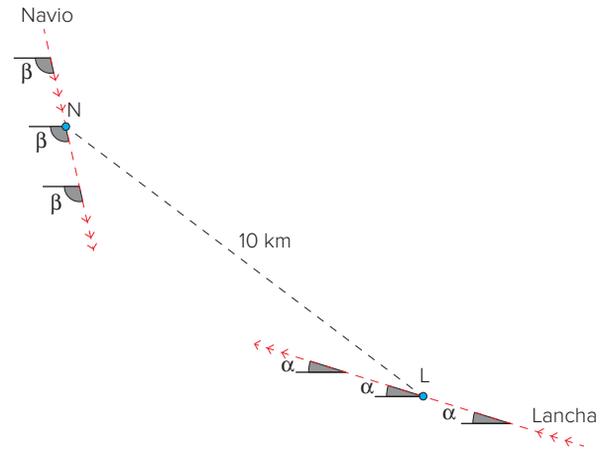
11 UFPB 2011 Para explorar o potencial turístico de uma cidade, conhecida por suas belas paisagens montanhosas, o governo pretende construir um teleférico, ligando o terminal de transportes coletivos ao pico de um morro, conforme a figura a seguir

Para a construção do teleférico, há duas possibilidades:

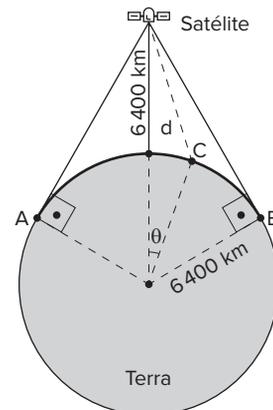
- o ponto de partida ficar localizado no terminal de transportes coletivos (ponto A), com uma parada inter mediária (ponto B), e o ponto de chegada localizado no pico do morro (ponto C);
- o ponto de partida ficar localizado no ponto A e o de chegada localizado no ponto C, sem parada intermediária

Supondo que $AB = 300\sqrt{3}$ m, $BC = 200$ m, $B\hat{A}P = 20°$ e $C\hat{B}N = 50°$, é correto afirmar que a distância entre os pontos A e C é de:

A 700 m.
B 702 m.
C 704 m
D 706 m.
E 708 m.

12 **UFTM** Na figura, as medidas dos ângulos $A\hat{D}B$ e $C\hat{A}D$ são, respectivamente, 45° e 15° O ponto C está em $\overline{BD}$ e é tal que $2 \cdot CD = BC$. Sabe-se ainda que o ponto E está em $\overline{AC}$, que $\overline{BE}$ é perpendicular a $\overline{AC}$ e que $CE = 12$ cm.

a) Calcule a medida do segmento $\overline{BD}$, em centí metros.
b) Calcule a medida do segmento $\overline{DE}$, em centí metros.

13 **Unesp 2017** Uma lancha e um navio percorrem rotas lineares no mar plano com velocidades constantes de 80 e 30 km/h, respectivamente. Suas rotas, como mostra a figura, estão definidas por ângulos constantes de medidas iguais a α e β, respectivamente. Quando a lancha está no ponto L e o navio no ponto N, a distância entre eles é de 10 km.

Sendo P o ponto em que a lancha colidirá com o navio, demonstre que o ângulo obtuso $L\hat{P}N$ será igual a $\alpha + \beta$. Em seguida, calcule a distância entre N e P, considerando $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{9}{16}$.

14 **Unicamp 2013** Um satélite orbita a 6400 km da superfície da Terra. A figura a seguir representa uma seção plana que inclui o satélite, o centro da Terra e o arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$. Nos pontos desse arco, o sinal do satélite pode ser captado. Responda às questões seguintes, considerando que o raio da Terra também mede 6400 km.

a) Qual o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ indicado na fi gura?
b) Suponha que o ponto C da figura seja tal que $\cos(\theta) = \frac{3}{4}$. Determine a distância d entre o ponto C e o satélite.

15 **UFRGS 2013** Os lados de um losango medem 4 e um dos seus ângulos 30° A medida da diagonal menor do losango é:

A $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$
B $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
C $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$
D $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
E $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$

16 Os pontos P, Q e R pertencem, respectivamente, aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC isósceles cuja base mede AB = 10 e altura 12. Se AP = CQ = 3 e os segmentos $\overline{AQ}$, $\overline{CP}$ e $\overline{BR}$ concorrem todos em um mesmo ponto, então AR é igual a:

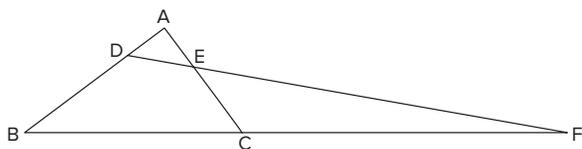
A $\frac{100}{17}$

B $\frac{110}{17}$

C $\frac{120}{17}$

D $\frac{130}{17}$

E $\frac{140}{17}$

17 Na figura, o triângulo ADE é isósceles de base $\overline{DE}$ e lados AD = AE = 1 e o triângulo ABC é retângulo em A com catetos AC = 3 e AB = 4.

Determine CF

18 **ITA 2016** Em um triângulo equilátero ABC de lado 2, considere os pontos P, M e N pertencentes aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que:

a. P é o ponto médio de $\overline{AB}$.
b M é o ponto médio de $\overline{BC}$.
c. $\overline{PN}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}C$.

Então, o comprimento do segmento $\overline{MN}$ é igual a:

A $\sqrt{10 \quad 4\sqrt{3}}$

B $\sqrt{5 \quad 2\sqrt{3}}$

C $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$

D $\sqrt{10 \quad 5\sqrt{3}}$

E $\sqrt{5\sqrt{3}-5}$

19 **ITA 2016** Seja ABC um triângulo equilátero e suponha que M e N são pontos pertencentes ao lado $\overline{BC}$ tais que BM = MN = NC. Sendo α a medida, em radianos, do ângulo $M\hat{A}N$, então o valor de cos α é:

A $\frac{13}{14}$

B $\frac{14}{15}$

C $\frac{15}{16}$

D $\frac{16}{17}$

E $\frac{17}{18}$

20 No lado $\overline{AB}$ de um triângulo isósceles ABC, de base BC = 2 cm e cujo ângulo de vértice A mede 20°, toma-se um ponto D de modo que o ângulo $D\hat{B}C$ tenha 70°. Determine o comprimento do segmento $\overline{AD}$.

Gusztav Bartfai/Shutterstock.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

5

Centros dos triângulos e polígonos

Os polígonos – termo que tem origem grega: *póly* (vários) + *gonia* (ângulos) – são figuras geométricas com vários ângulos.

De cestos de vime a grandes construções, estão presentes nas artes e no dia a dia de quase todas as civilizações, desde as mais antigas.

Os centros, as propriedades e as simetrias dos polígonos sempre fascinaram o ser humano, despertando muito interesse em estudá-los.

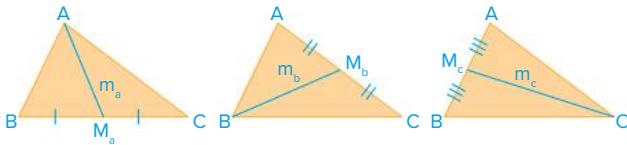
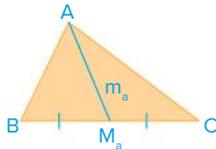
Pontos notáveis do triângulo

O triângulo tem vários pontos notáveis ou centros, cada um com suas características e propriedades, alguns dos quais relacionados diretamente às cevianas (definidas no capítulo anterior).

Estudaremos a seguir o baricentro (associado às medianas), o incentro (associado às bissetrizes), o circuncentro (associado às mediatrizes) e o ortocentro (associado às alturas).

O baricentro e as medianas

Mediana

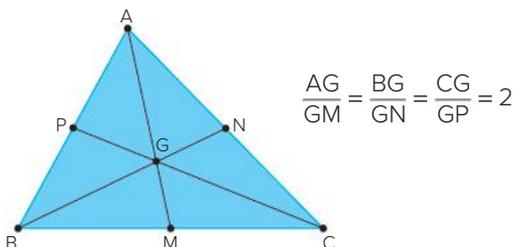
Mediana é a ceviana com extremos em um vértice e no ponto médio do lado oposto a esse vértice. Observe na figura a seguir as três medianas de um triângulo.

Observe, por exemplo, como calcular a medida da mediana m_a no triângulo ABC, em que temos AB = 8 cm, BC = 10 cm e ângulo $\hat{B}$ de medida 60°.

Como $BM_a = \frac{BC}{2} = 5$ cm, pela lei dos cossenos aplicada ao triângulo ABM_a, temos:

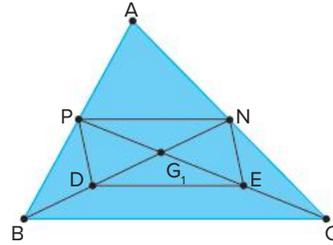
$$(m_a)^2 = 8^2 + 5^2 \cdot\ 2\ 8\ 5\ \cos(60°)$$
$$(m_a)^2 = 64 + 25 - 80 \cdot \frac{1}{2}$$
$$(m_a)^2 = 89 - 40 = 49$$
$$m_a = 7 \text{ cm}$$

Baricentro

Vamos demonstrar o seguinte resultado: as três medianas de um triângulo se intersectam em um mesmo ponto, chamado de baricentro, que divide cada uma das medianas na proporção de 2 para 1; a parte que vai do vértice ao baricentro é o dobro da parte que vai do baricentro ao ponto médio.

Na figura a seguir, M, N e P são pontos médios dos lados do triângulo, e G é o baricentro.

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = 2$$

Demonstração:

Na figura seguinte, G_1 é o ponto de cruzamento das medianas $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$; D e E são os pontos médios de $\overline{BG_1}$ e $\overline{CG_1}$, respectivamente.

Temos que:

- $\overline{PN}$ é base média de ABC; logo, $\overline{PN}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e $PN = \frac{BC}{2}$;
- o ângulo $\widehat{PNG_1}$ é igual ao ângulo $G_1\hat{B}C$ (alternos internos);
- o ângulo $\widehat{PG_1N}$ é igual ao ângulo $C\hat{G_1}B$ (opostos pelo vértice).

Assim, os triângulos PG_1N e CG_1B são semelhantes pelo caso AA Logo:

$$\frac{BG_1}{G_1N} = \frac{CG_1}{G_1P} = \frac{BC}{PN} = 2$$

De maneira análoga, se G_2 é o ponto de encontro de $\overline{BN}$ e $\overline{AM}$, podemos provar que:

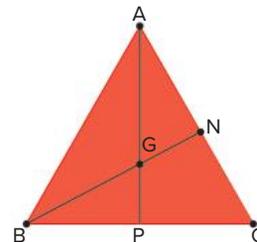
$$\frac{BG_2}{G_2N} = \frac{AG_2}{G_2M} = \frac{AB}{MN} = 2$$

Como G_1 e G_2 dividem a mediana $\overline{BN}$ na mesma propor ção, verificamos que correspondem ao mesmo ponto, que chamaremos apenas de G Desse modo, fica provado que:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = 2$$

Observação: Temos que PNED é um paralelogramo.

Exercício resolvido

1 Na figura, N e P são os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Se G é o baricentro do triângulo ABC, AP = 6 cm e GN = 1,5 cm, obtenha, em centímetros:

a) AG.
b) GP.
c) BG.
d) BN

Resolução:

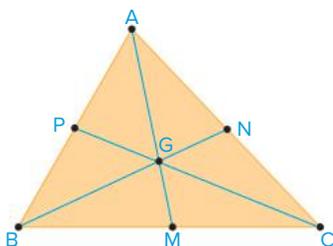
Como $AG = 2GP$, fazendo $GP = x$, temos que $AG = 2x$ e $AP = 3x$ Assim, $3x = 6 \Rightarrow x = 2$, ou seja, $GP = 2$ cm e $AG = 4$ cm De maneira análoga, $GN = y$, $BG = 2y$ e $BN = 3y$ Logo, se $y = 1{,}5$ cm, temos que $BG = 2 \cdot 1{,}5 = 3$ cm e $BN = 3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$ cm

O baricentro como centro de massa

A palavra "baricentro" (centro de massa de um corpo) tem origem no grego antigo: *báros* (pesado) + *kéntron* (centro).

Se um triângulo for confeccionado com espessura constante, por um material ideal de densidade uniforme, seu centro de massa será o baricentro. A propriedade geométrica que justifica esse fato é a seguinte:

"As medianas dividem um triângulo em seis triângulos de mesma área."

Demonstração:

Os triângulos GMB e GMC têm bases de mesma medida ($BM = MC$) e altura relativa a essa base (a altura é a distância de G a BC); logo, possuem a mesma área, digamos, igual a A_1. Pelo mesmo motivo, as áreas dos triângulos AGN e CGN são iguais a A_2, e as áreas dos triângulos AGP e BGP são iguais a A_3.

Como os triângulos ABM e ACM têm mesma base e altura relativa a $\overline{BC}$, também apresentam mesma área. Então:

$$A_1 + 2A_3 = A_1 + 2A_2 \Rightarrow A_3 = A_2$$

Os triângulos BCN e BAN também possuem mesma base e altura; portanto, mesma área Logo:

$$A_2 + 2A_1 = A_2 + 2A_3 \Rightarrow A_1 = A_3$$

Desse modo, $A_1 = A_2 = A_3$ e os triângulos GBM, GCM, GCN, GAN, GAP e GBP têm todos a mesma área.

Assim, verificamos que o baricentro G está "rodeado" por seis triângulos de mesma área.

Se o triângulo ABC é composto de um material de densidade uniforme, os seis triângulos que "rodeiam" o baricentro apresentam mesma massa, e o baricentro é o centro de massa do triângulo ABC.

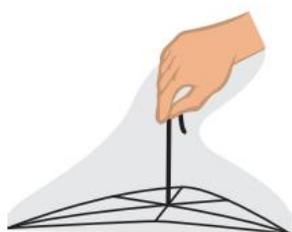



Fig. 1 Triângulo pendurado pelo baricentro, em equilíbrio.

! Atenção

Sobre as medianas e o baricentro, podemos afirmar:

- As três medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto, chamado de baricentro do triângulo
- O baricentro divide as medianas na razão 2 : 1.
- As medianas dividem o triângulo em seis triângulos de mesma área.
- O baricentro é o centro de massa do triângulo de densidade uniforme

O incentro e as bissetrizes

Bissetriz

Bissetriz é a semirreta que divide um ângulo em dois de mesma medida (ao meio).

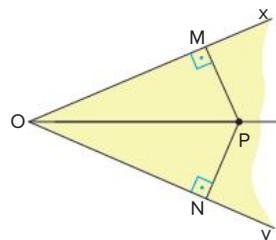



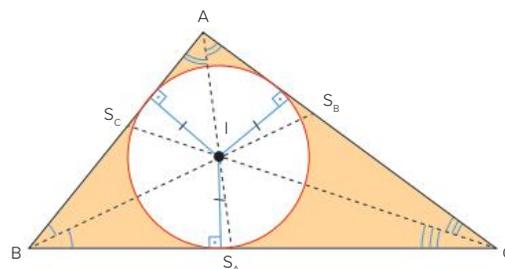
Fig. 2 $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $M\hat{O}N$.

Na figura anterior, $M\hat{O}P = N\hat{O}P$, $O\hat{M}P = O\hat{N}P = 90°$ e $\overrightarrow{OP}$ é comum aos triângulos OMP e ONP Assim, esses dois triângulos são congruentes pelo caso LAA_o. Desse modo, $PN = PM$ e P equidista dos lados do ângulo. O que acabamos de demonstrar é que qualquer ponto da bissetriz equidista dos lados do ângulo

Incentro

Incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo, ou seja, daquela que tangencia os três lados do triângulo.

Provaremos que as bissetrizes dos ângulos internos se intersectam no incentro.

Demonstração:

Sejam $\overline{AS_A}$, $\overline{BS_B}$ e $\overline{CS_C}$ as bissetrizes internas do triân gulo e I o ponto de encontro de $\overline{AS_A}$, $\overline{BS_B}$ e $\overline{CS_C}$. Como o ponto I pertence a $\overline{AS_A}$, ele equidista de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$; e, como também pertence a $\overline{BS_B}$, equidista de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Tendo em vista as duas condições, concluímos que I equidista de $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Logo, I também pertence a $\overline{CS_C}$. Portanto, I pertence às três bissetrizes e equidista dos três lados do triângulo, sendo o centro da circunferência inscrita

FRENTE 3

Tangência

Dados uma circunferência λ e um ponto P externo a ela, vamos provar que o par de segmentos tangentes a λ e que passam por P tem a mesma medida.

Na figura a seguir, os triângulos PT_1O e PT_2O são congruentes pelo caso especial HC, pois apresentam a mesma **hipotenusa** $\overline{OP}$; e as medidas dos **catetos** $\overline{OT_1}$ e $\overline{OT_2}$ são iguais ao raio da circunferência de centro O Assim, o par de tangentes $\overline{PT_1}$ e $\overline{PT_2}$ possui a mesma medida.

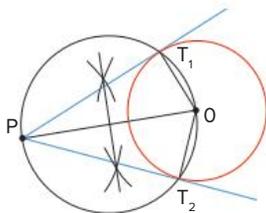
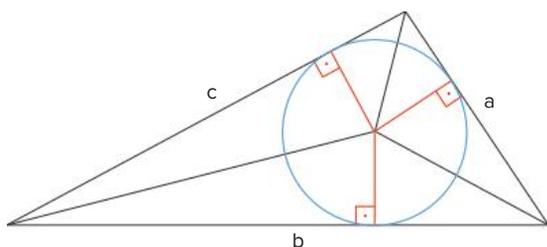
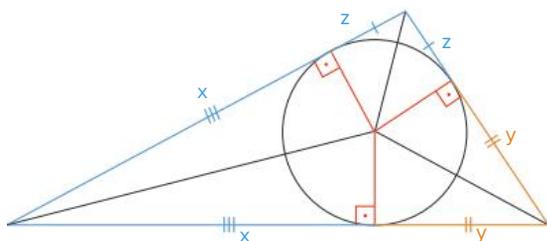



Fig. 3 Par de segmentos tangentes $PT_1 = PT_2$.

Vamos estudar uma aplicação dessa ideia simples de tangência Na figura seguinte, temos um triângulo de lados *a*, *b* e *c* e perímetro 2p = a + b + c e também uma circunferência inscrita nesse triângulo

Identificamos na figura a seguir os pares de segmentos de mesma medida tangentes à circunferência inscrita, com medidas *x*, *y* e *z*

Comparando as duas figuras, concluímos que: $\begin{cases} y + z = a \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases}$

Somando as equações, temos:

$$2x + 2y + 2z = a + b + c$$
$$2x + 2y + 2z = 2p$$
$$x + y + z = p$$

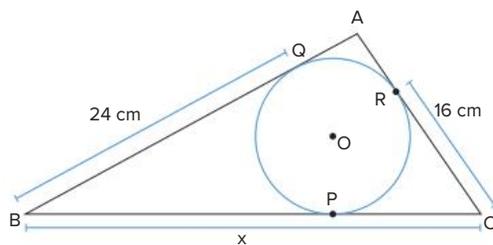
Assim: $\begin{cases} x = (x + y + z) - (y + z) = p - a \\ y = (x + y + z) \quad (x \quad z) = p \quad c \\ z = (x + y + z) \quad (x \quad y) = p \quad b \end{cases}$

Concluímos, então, que o par de segmentos tangentes à circunferência inscrita que parte de um vértice é igual à diferença entre o semiperímetro do triângulo e o lado oposto a esse vértice.

Exercício resolvido

2 Observe a figura (sem escala) a seguir e determine:

a) o valor de *x*;

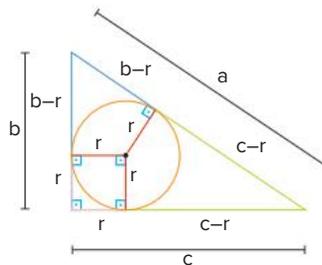
b) a medida do segmento $\overline{AR}$ sabendo que o perímetro do triângulo ABC é 92 cm.

Resolução:

a) Temos BP = BQ = 24 cm e CP = CR = 16 cm Logo, x = BC = BP + CP = 24 + 16 = 40 cm.

b) Temos que AQ = AR = y Como o perímetro do triângulo é igual a 92 cm, encontramos:

$$AQ + AR + BQ + BC + CR = y + y + 24 + 40 + 16 =$$
$$= 2y + 80 = 92 \text{ cm}$$

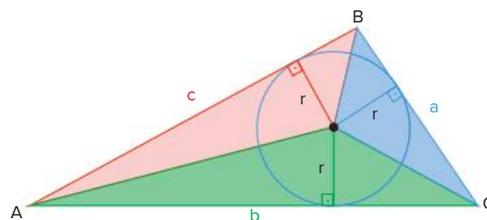
Logo, y = 6 cm.

Outra aplicação das ideias de tangência aparece no cálculo do raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo. Veja, na figura a seguir, esse cálculo aplicado ao triângulo retângulo de hipotenusa *a* e catetos *b* e *c*.

Com base na figura, temos:

$$a = (b \quad r) + (c \quad r)$$
$$a = b + c - 2r$$
$$2r = b + c \quad a$$

$$r = \frac{b + c \quad a}{2}$$

Raio da circunferência inscrita

É possível calcularmos o raio da circunferência inscrita para um triângulo qualquer da seguinte maneira:

A área do triângulo ABC é a soma das áreas dos três triângulos da figura (azul, rosa e verde)

Indicando a área do triângulo ABC por [ABC] e o semiperímetro por *p*, obtemos:

$$[ABC]=\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2}$$

$$[ABC]=\frac{\left(a+b+c\right)\cdot r}{2}$$

$$[ABC]=p\cdot r$$

$$r=\frac{[ABC]}{p}$$

Portanto, o raio da circunferência inscrita é a razão entre a área e o semiperímetro do triângulo.

Exercício resolvido

3 Determine o raio da circunferência inscrita no triângulo de lados 3, 4 e 5.

Resolução:

Como o triângulo é retângulo, sua área corresponde à metade do produto dos catetos, ou seja, é $\frac{3\cdot 4}{2}=6$. Seu semiperímetro é $p=\frac{3+4+5}{2}=6$. Logo, o raio da circunferência inscrita é igual a $\frac{6}{6}=1$.

Também poderíamos calcular o raio da circunferência inscrita fazendo:

$$r=\frac{b+c\quad a}{2}\Leftrightarrow r=\frac{3+4\quad 5}{2}\Rightarrow r=1$$

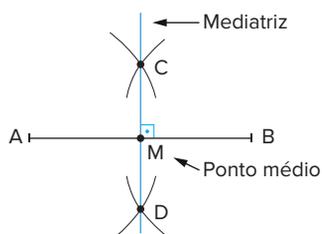
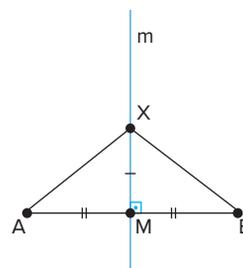
! Atenção

Sobre as bissetrizes e o incentro, podemos afirmar:

- As três bissetrizes internas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado incentro
- O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.
- O incentro equidista dos lados do triângulo.
- O raio da circunferência inscrita é a razão entre a área e o semiperímetro do triângulo.

O circuncentro e as mediatrizes

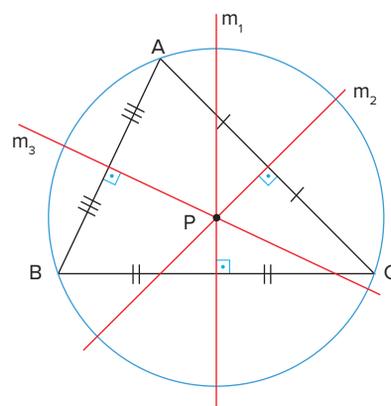
Mediatriz

Mediatriz de um segmento é a reta que passa pelo ponto médio desse segmento e é perpendicular a ele

A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos extremos A e B.

Para demonstrar essa afirmação, marque um ponto X qualquer sobre a mediatriz de $\overline{AB}$, o qual coincide ou não com o ponto médio M.

1. Se o ponto X coincide com M, então X = M. Logo, AM = MB.
2. Se o ponto X não coincide com M, trace $\overline{AX}$ e $\overline{BX}$. Os triângulos AMX e BMX são congruentes pelo caso LAL.

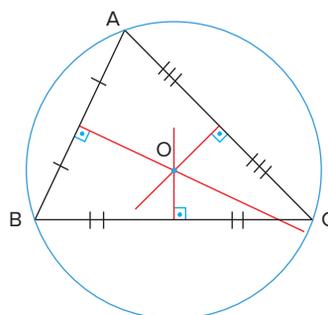
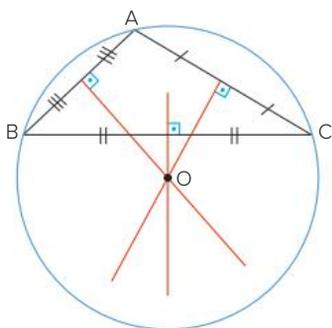
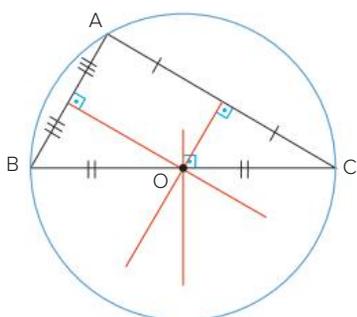
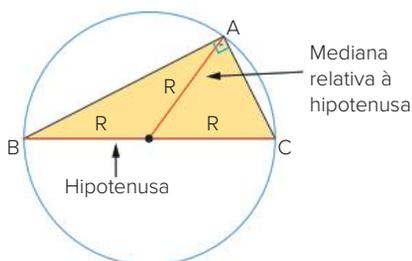
Com base nessa congruência, podemos concluir que AX = BX, isto é, todo ponto da mediatriz de $\overline{AB}$ equidista dos extremos A e B.

Circuncentro

As três mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam em um ponto chamado circuncentro, que é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo

Seja P o ponto de encontro das mediatrizes m_1 de $\overline{BC}$ e m_2 de $\overline{AC}$. Então, P equidista de B e C por pertencer a m_1 e também equidista de A e C por pertencer a m_2. Assim, equidista de A e B e pertence à mediatriz m_3 de $\overline{AB}$

Como P equidista dos três vértices, A, B e C, ele é o centro da circunferência que passa pelos vértices, chamada de circunferência circunscrita ao triângulo.

O circuncentro pode ser:

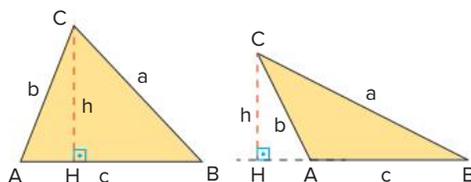
- interno, se o triângulo for acutângulo;

- externo, se o triângulo for obtusângulo;

- no ponto médio da hipotenusa, se o triângulo for retângulo.

O ponto médio da hipotenusa é, portanto, equidistante dos vértices e também o centro da circunferência circunscrita (circuncentro).

! Atenção

Sobre as mediatrizes e o circuncentro, podemos afirmar:

- As três mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado circuncentro.
- O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
- O circuncentro equidista dos vértices do triângulo

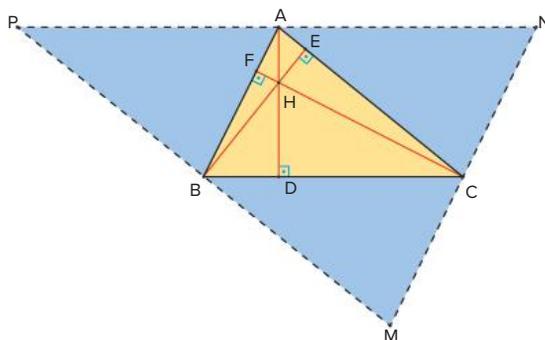
O ortocentro e as alturas

Altura

Considerando um vértice do triângulo, o segmento que tem uma extremidade nesse vértice e a outra na reta suporte do lado oposto, de maneira a ser perpendicular a esse lado, é chamado de altura. Nas figuras a seguir, observamos que a altura pode ser interna ou externa ao triângulo, conforme este seja, respectivamente, acutângulo ou obtusângulo

Ortocentro

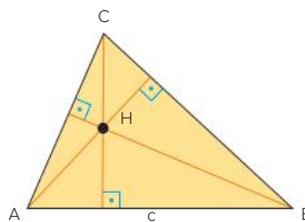
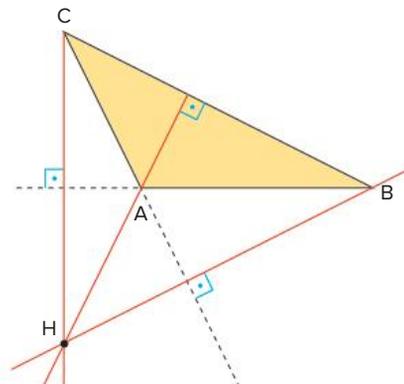
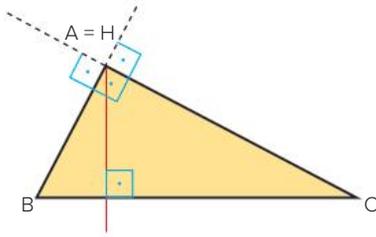
As retas suporte das alturas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado ortocentro.

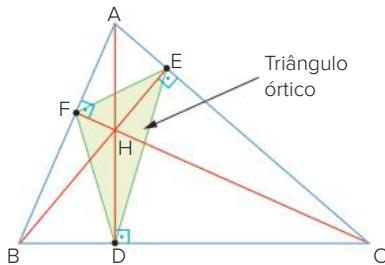
Demonstração:

Sejam $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ as alturas do triângulo ABC.

Tracemos $\overline{PN}$ // $\overline{BC}$, $\overline{PM}$ // $\overline{AC}$ e $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$, respectivamente passando por A, B e C, conforme a figura

Notamos que ABMC e ABCN são paralelogramos. Logo, CM = AB = CN, o que faz com que C seja o ponto médio de $\overline{MN}$ Analogamente, A é ponto médio de $\overline{PN}$ e B é ponto médio de $\overline{PM}$ Assim, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ estão sobre as mediatrizes do triângulo MNP Como provamos anteriormente, as mediatrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto; logo, as retas suporte das alturas também

Quanto à posição, o ortocentro pode ser:

- interno, se o triângulo for acutângulo;

- externo, se o triângulo for obtusângulo;

- coincidente com o vértice do ângulo reto, se o triângulo for retângulo.

Triângulo órtico

Considere um triângulo não retângulo ABC e sejam D, E e F os “pés” das alturas de ABC. O triângulo DEF é chamado triângulo órtico do triângulo ABC.

O ortocentro H do triângulo ABC é o incentro de seu triângulo órtico DEF.

Demonstração:

O quadrilátero BDHF é inscritível, pois tem dois ângulos opostos retos.

Assim, $\text{med}(A\hat{B}E) = \alpha = 90° \quad \text{med}(\hat{A}) = \text{med}(F\hat{D}H)$. Como $\text{med}(F\hat{C}A) = \ 90° \quad \text{med}(\hat{A}) = \alpha$ e o quadrilátero CDHE é inscritível, então $\text{med}(E\hat{D}H) = \text{med}(F\hat{C}A) = \alpha$. Assim, AD está sobre a bissetriz do ângulo $F\hat{D}E$. Analogamente, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ estão sobre as bissetrizes do triângulo DEF, e H é o incentro do triângulo DEF.

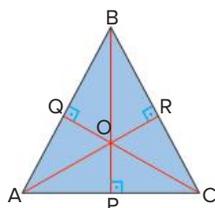
! Atenção

Sobre as alturas e o ortocentro, podemos afirmar:

- As três alturas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado ortocentro
- O ortocentro de um triângulo acutângulo é interno ao triângulo, o do triângulo retângulo coincide com o vértice do ângulo reto, e o do triângulo obtusângulo é externo ao triângulo.

Casos particulares

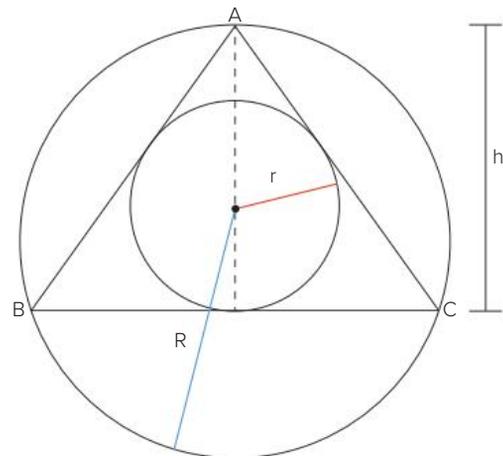
O triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero ABC da figura a seguir.

Seja P o ponto médio de $\overline{AC}$. Os triângulos APB e CPB são congruentes pelo caso LLL. Por isso, temos $\text{med}(A\hat{P}B) = \text{med}(C\hat{P}B) = 90°$. Logo, $\overline{BP}$ é, ao mesmo tempo, mediana, altura, mediatriz e bissetriz interna. De maneira análoga, se Q e R são pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, então $\overline{AR}$ e $\overline{CQ}$ também são, simultaneamente, alturas, medianas, mediatrizes e bissetrizes internas. Assim, o ponto O é, ao mesmo tempo, ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro do triângulo, sendo seu centro de simetria.

Lembrando que a altura h de um triângulo equilátero de lado L é $\frac{L\sqrt{3}}{2}$ e que o baricentro divide a mediana na proporção de 2:1, podemos calcular os raios das circunferências circunscrita e inscrita (respectivamente, R e *r*), aproveitando o fato de que os centros do triângulo equilátero coincidem. Assim:

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{6}$$

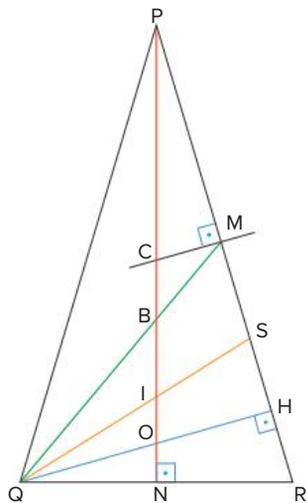
e

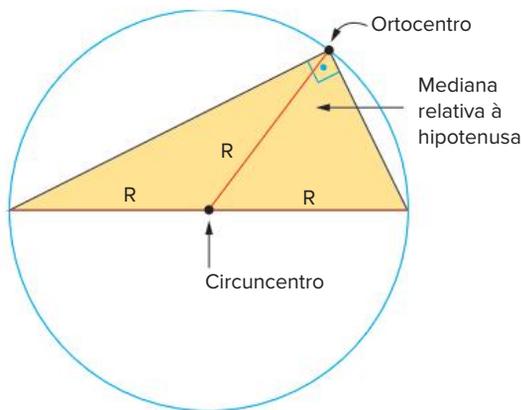
$$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

! Atenção

No triângulo equilátero, o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro coincidem no mesmo ponto.

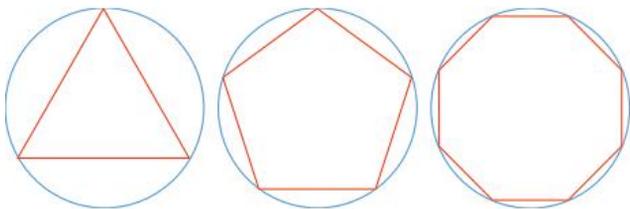
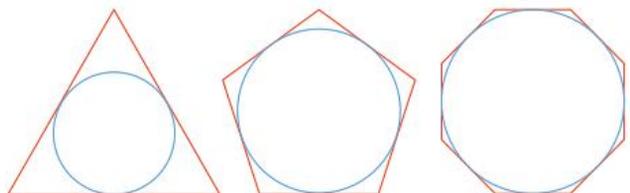
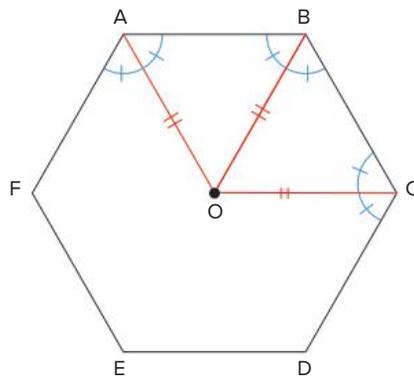
Sendo L a medida do lado do triângulo equilátero, *r* o raio da circunferência inscrita e R o raio da circunscrita, temos que $r = \frac{L\sqrt{3}}{6}$ e $R = 2r = \frac{L\sqrt{3}}{3}$

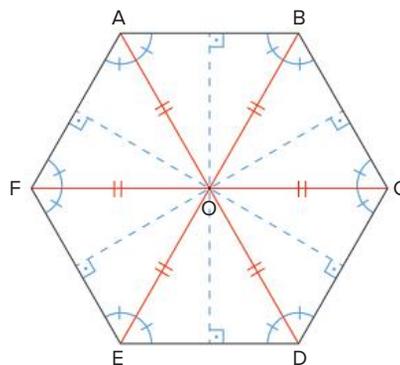
O triângulo isósceles

Na figura a seguir, o triângulo PQR é isósceles e PR = PQ O segmento $\overline{PN}$ é mediana, altura, mediatriz e bissetriz relativas à base $\overline{QR}$ Em relação ao lado $\overline{PR}$, $\overline{QH}$ é altura, $\overline{QS}$ é bissetriz, $\overline{QM}$ é mediana e $\overline{MC}$ é mediatriz Observamos que o ortocentro (O), o incentro (I), o baricentro (B) e o circuncentro (C) estão alinhados sobre a altura $\overline{PN}$

O triângulo retângulo

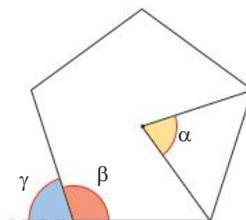
No triângulo retângulo, o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa e o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.

Pontos notáveis de polígonos regulares

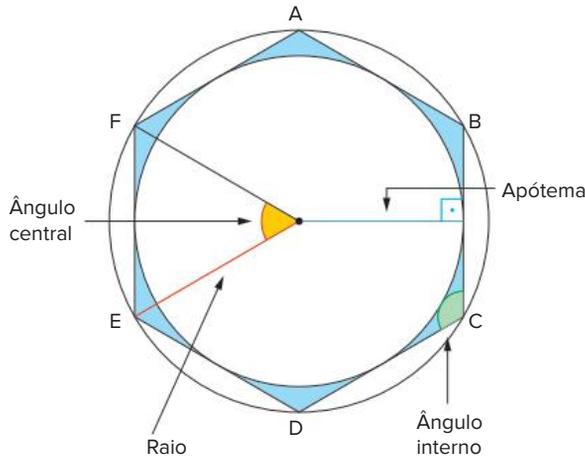
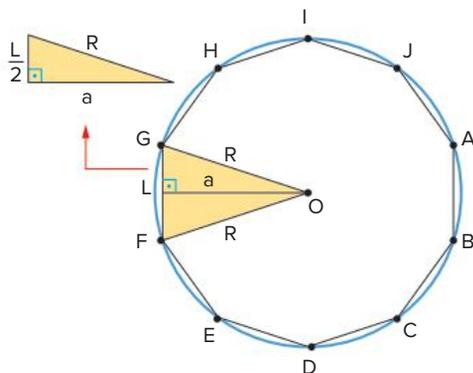
Um polígono regular é equilátero e equiângulo.
Mostraremos que:

- todo polígono regular é inscritível (há uma circunferência que passa pelos seus vértices);

- todo polígono regular é circunscritível (há uma circunferência que tangencia seus lados).

Na figura a seguir, desenhamos um hexágono regular. No entanto, o argumento que utilizaremos é válido para todo polígono regular.

Como $\overline{OB}$ é lado comum, AB = BC e $med(O\hat{B}A) = med(O\hat{C}B)$, os triângulos OAB e OBC são congruentes pelo caso LAL de congruência de triângulos Como con sequência, temos que OC = OA e $med(O\hat{C}B) = med(O\hat{B}A)$ Tendo em vista que os ângulos do polígono regular são congruentes, então $med(O\hat{C}D) = med(O\hat{C}B)$

Pelo caso LAL de congruência de triângulos, decorre que os triângulos OBC e OCD são congruentes Prosse guindo indutivamente com o mesmo argumento anterior, concluímos que os triângulos OAB, OBC, OCD, ODE, OEF e OFA são congruentes entre si e isósceles

O ponto O equidista dos vértices do polígono Portanto, é centro da circunferência **circunscrita** ao polígono Como os triângulos isósceles da figura são todos congruentes, suas alturas têm mesma medida e O é equidistante dos lados do polígono, sendo, então, centro da circunferência inscrita no polígono

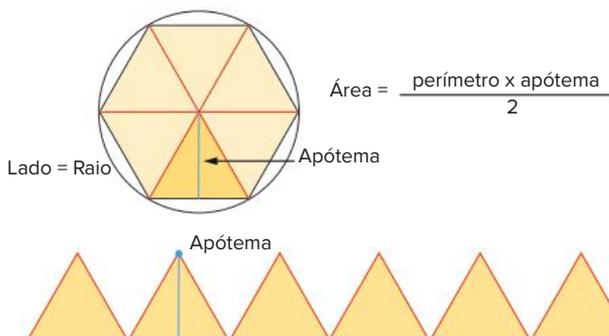
Elementos do polígono regular

Conforme a figura a seguir, os ângulos principais no polígono regular são o central (α), o interno (β) e o externo (γ).

Vimos anteriormente que os ângulos central e externo de um polígono regular de *n* lados são dados por $\left(\frac{360°}{n}\right)$ e o ângulo interno por $\left(180° - \frac{360°}{n}\right)$.

Consideremos, ainda, como elementos do polígono regular o raio da circunferência circunscrita e o da circunferência inscrita, chamado de apótema do polígono regular.

O raio da circunferência circunscrita (R), o apótema (a) e a metade do lado de um polígono regular de lados L formam um triângulo retângulo, conforme a figura a seguir.

Assim, temos: $R^2 = a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$.

Área do polígono regular

Podemos calcular a área do polígono regular de duas maneiras principais:

1. Em função do perímetro e do apótema.

Conforme sugerido na figura, podemos determinar a área de um polígono regular de *n* lados L, perímetro 2p = n · L e apótema *a*, calculando a área dos *n* triângulos que compõem o polígono. Assim:

$$\text{Área} = n \cdot A_\Delta = n \cdot \frac{L \cdot a}{2} = \frac{2p \cdot a}{2} = p \cdot a$$

Ou seja, a área é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

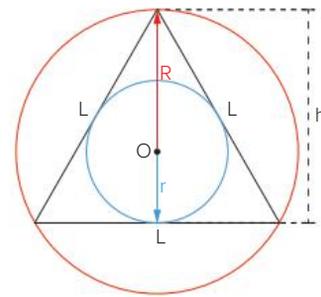
2 Em função do raio (R) da circunferência circunscrita e do ângulo central (α)

A área de cada um dos *n* triângulos em que fica subdi vidido o polígono a partir do centro é dada por:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen}(\alpha) = \frac{R^2 \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$$

Logo, a área do polígono é igual a: $\text{Área} = n \cdot \frac{R^2 \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$

Estudo do triângulo equilátero

Seja um triângulo equilátero de lados L, inscrito em uma circunferência de raio R e circunscrito a outra circunferência de raio *r* (lembrando que esse raio corresponde ao apótema).

Altura: $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$

Apótema: $a = r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{6}$

Raio da circunferência circunscrita:

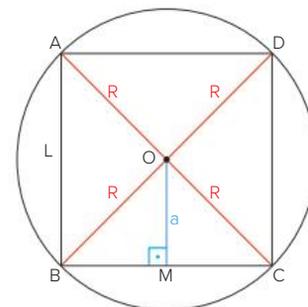
$$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

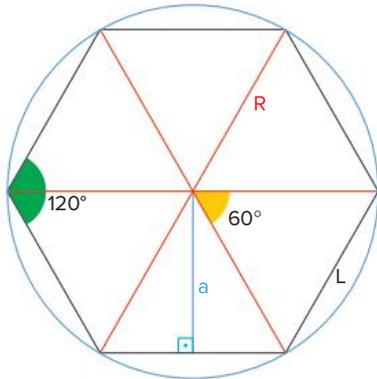
Estudo do quadrado

Seja um quadrado de lado L. Suas diagonais são perpendiculares entre si e os triângulos OBC e OBM da figura a seguir são retângulos e isósceles.

Apótema: $a = \frac{L}{2}$

Raio da circunferência circunscrita: $R = \frac{L\sqrt{2}}{2}$

FRENTE 3

Estudo do hexágono regular

Seja um hexágono regular lado L, com apótema a inscrito em uma circunferência de raio R. Sabemos que os ângulos central e externo do hexágono regular são iguais a $\frac{360°}{6} = 60°$ e que o ângulo interno é dado por $180° - 60° = 120°$.

O hexágono regular fica subdividido em seis triângulos equiláteros, como mostra a figura. Seu apótema corresponde à altura de um triângulo equilátero de lado L. Assim:

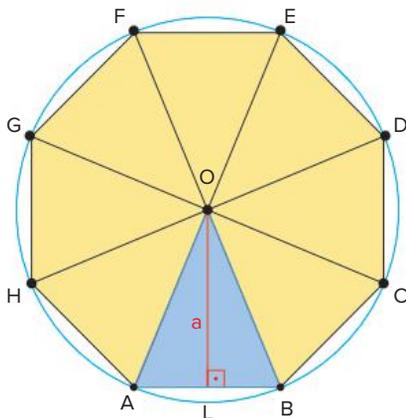
Apótema: $a = \frac{L\sqrt{3}}{2}$

Raio da circunferência circunscrita: $R = L$

A área do hexágono regular é igual à área de seis triângulos equiláteros de lado L, ou seja, $6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$.

Como para o hexágono $R = L$, a área em função do raio da circunferência circunscrita é igual a $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Estudo do octógono

Os ângulos externo e central do octógono regular medem $\frac{360°}{8} = 45°$, e o ângulo interno mede $180° - 45° = 135°$.

Desse modo, temos:

$$\text{tg}(22{,}5°) = \frac{\frac{L}{2}}{a} \Leftrightarrow \frac{L}{2a} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{L}{a} = 2(\sqrt{2}-1) \Rightarrow$$

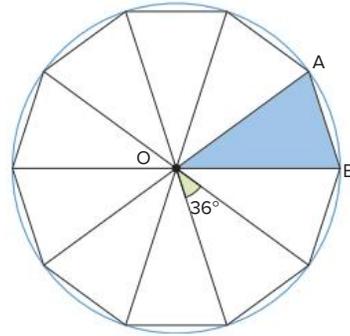
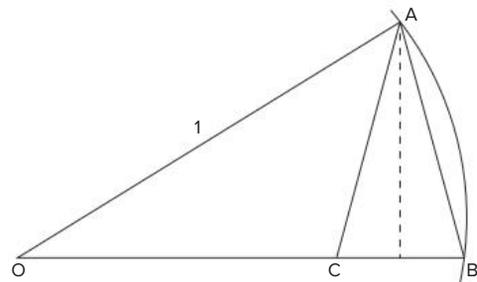
$$\Rightarrow a = \frac{L}{2(\sqrt{2}-1)} \Rightarrow a = \frac{L(\sqrt{2}+1)}{2}$$

A área do octógono em função do lado é:

$$\text{Área}_{\text{octógono}} = p \cdot a = \frac{8L}{2} \cdot \frac{L(\sqrt{2}+1)}{2} = 2L^2(\sqrt{2}+1)$$

Então, a área do octógono em função do raio R da circunferência circunscrita será:

$$\text{Área}_{\text{octógono}} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen}(45°) = 2R^2\sqrt{2}$$

Estudo do decágono

Na figura a seguir, considerando que $AB = AC = 1$, seja o lado do decágono regular inscrito em uma circunferência de raio R e centro O.

O triângulo ABC é isósceles de ângulos 72°, 72° e 36°. O triângulo OAC tem ângulos 36°, 36° e 108° e também é isósceles. Assim, $OC = AC = 1$ e $BC = R - 1$. Como os triângulos OAB e ABC são semelhantes, temos:

$$\frac{R-1}{1} = \frac{1}{R} \Leftrightarrow R^2 - R = 1 \Leftrightarrow R^2 - R - 1 = 0 \Rightarrow R = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Assim, a razão entre o raio R e o lado de qualquer decágono regular é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é a razão áurea.

Se tomarmos o ponto médio M da base do triângulo isósceles OAC, $\overline{CM}$ será uma altura. No triângulo retângulo ACM, temos $\cos(36°) = \frac{AM}{AC} = \frac{\frac{R}{2}}{1} = \frac{R}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Como consequência desse resultado, encontramos:

- $\text{sen}(36°) = \sqrt{1-\cos^2 36°} = \sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

- $\text{tg}(36°) = \frac{\text{sen}(36°)}{\cos(36°)} = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

- $\text{sen}(72°) = 2 \cdot \text{sen}(36°) \cdot \cos(36°) =$

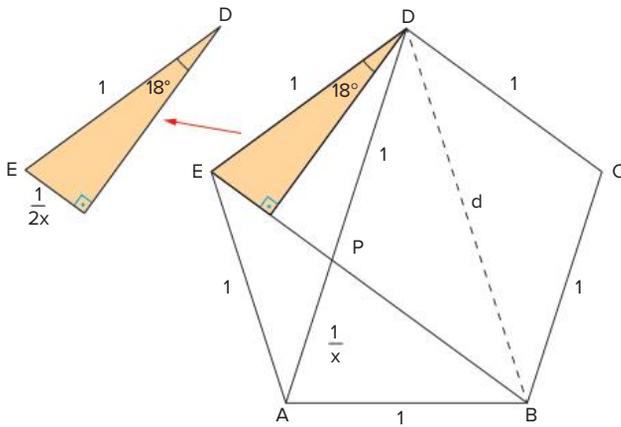
  $= 2 \cdot \dfrac{\sqrt{10\ \ 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

  A área do decágono regular em função do raio R é:

$$\text{Área}_{\text{decágono}} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen}(36°) = \frac{5 \cdot R^2 \cdot \sqrt{10\ \ 2\sqrt{5}}}{4}$$

Estudo do pentágono

Os ângulos externo e central de um pentágono regular medem $\dfrac{360°}{5} = 72°$, e o ângulo interno mede $180°\ \ 72° = 108°$.

Na figura seguinte, o pentágono regular ABCDE tem lados 1 e diagonais d. O triângulo AED é isósceles de ângulos 108°, 36° e 36°. Seja P o ponto de encontro das diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$. O triângulo AEB é congruente ao triângulo AED e, portanto, $\text{med}(A\hat{E}P) = \text{med}(A\hat{E}B) = 36°$.

No triângulo AEP, $\text{med}(A\hat{E}P) = \text{med}(E\hat{A}P) = 36°$ e $\text{med}(A\hat{P}E) = 108°$. Como $A\hat{P}E$ é ângulo externo do triân gulo EPD, temos:

$$\text{med}(E\hat{D}P) + \text{med}(D\hat{E}P) = \text{med}(A\hat{P}E) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 36° + \text{med}(D\hat{E}P) = 108°$$

Assim, $\text{med}(D\hat{E}P) = 72°$.

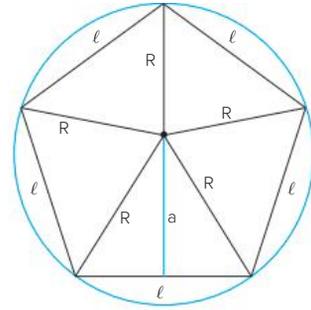
Ainda,

$\text{med}(E\hat{P}D) = 180°\ \ \text{med}(A\hat{P}E) = 180°\ \ 108\ \ = 72°$.

Logo, o triângulo DEP é isósceles, com DP = DE = 1. Então, AP = d – 1.

Os triângulos AED e AEP são semelhantes (ambos têm ângulos 108°, 36° e 36°). Logo:

$$\frac{AP}{DE} = \frac{AE}{AD} \Leftrightarrow \frac{d\ \ 1}{1} = \frac{1}{d} \Rightarrow d^2 - d - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Isso mostra que, para todo pentágono regular, a razão entre a diagonal e o lado é igual a $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, chamada de razão áurea. Já na figura a seguir, temos:

$$\text{sen}(36°) = \frac{\frac{\ell}{2}}{R} \Rightarrow \ell = 2 \cdot R \cdot \frac{\sqrt{10\ \ 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{R\sqrt{10\ \ 2\sqrt{5}}}{2}$$

$$\text{tg}(36°) = \frac{\frac{\ell}{2}}{a} \Rightarrow a = \frac{\ell}{2 \cdot \text{tg}(36°)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\ell}{2 \cdot \sqrt{5\ \ 2\sqrt{5}}} = \frac{\ell\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}$$

A área do pentágono em função do lado é dada por:

$$\text{Área}_{\text{pentágono}} = p \cdot a = \frac{5\ell}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10} = \frac{\ell^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$$

Já a área do pentágono em função do raio R é dada por:

$$\text{Área}_{\text{pentágono}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen}(72°) =$$
$$= \frac{5R^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{5R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$$

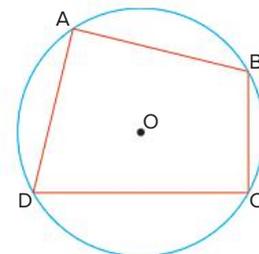
Quadriláteros inscritíveis

Um quadrilátero é chamado inscritível ou cíclico quando seus quatro vértices estão sobre uma mesma circunferência. Esse tipo de quadrilátero fornece ferramentas interessantes para a resolução de alguns problemas.

Discutiremos a seguir as condições para que um quadrilátero seja inscritível.

Teorema 1: Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, os ângulos internos opostos são suplementares.

Demonstração:

1 Provemos inicialmente que, se o quadrilátero é inscri tível, a soma dos ângulos opostos é 180°

Seja ABCD o quadrilátero inscrito em uma circunferência de centro O. O ângulo interno de vértice A enxerga o arco $\overset{\frown}{BCD}$ e o ângulo interno de vértice C enxerga o arco $\overset{\frown}{BAD}$.

FRENTE 3

Pelo teorema do ângulo inscrito, temos:

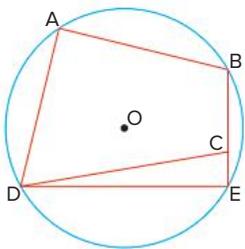
$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{C}) = \frac{\text{med}(\widehat{BCD}) + \text{med}(\widehat{BAC})}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

Assim:

$$\begin{cases} \text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D}) = 360° \\ \text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{C}) = 180° \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{C}) = 180° \\ \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{D}) = 180° \end{cases}$$

O que mostra que os ângulos opostos são suplementares.

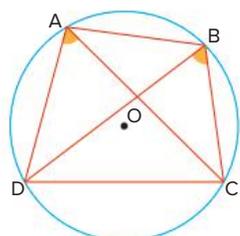
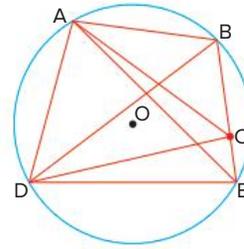
2. Agora, provemos que, se os ângulos opostos são suplementares, o quadrilátero é inscritível.

Sejam: $\begin{cases} \text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{C}) = 180° \\ \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{D}) = 180° \end{cases}$

Suponha, por absurdo, que o quadrilátero ABCD não seja inscritível Assim, a circunferência que passa por A, B e D não passa por C. Sendo o ponto E a interseção da reta $\overleftrightarrow{BC}$ com a circunferência, como ABED é inscritível, temos que $\text{med}(\hat{E}) = 180°$ $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{C})$ Essa igualdade é absurda, pois, se C é interior ao segmento $\overline{BE}$, $B\hat{C}D$ é externo ao triângulo DCE e, portanto, $\text{med}(\hat{C}) > \text{med}(\hat{E})$ Todavia, se C é exterior ao segmento $\overline{BE}$, $B\hat{E}D$ é externo ao triângulo DCE Logo, $\text{med}(\hat{C}) < \text{med}(\hat{E})$

Concluímos, então, que, se ABCD tem ângulos opostos suplementares, ABCD é inscritível

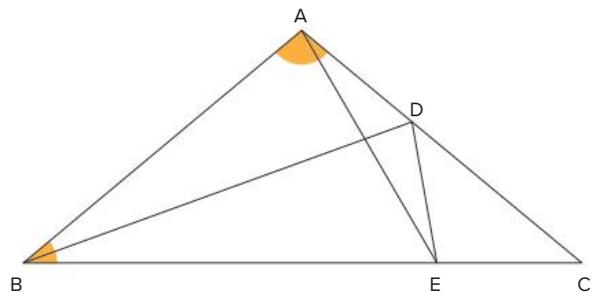
Teorema 2: Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, os ângulos formados entre lado e diagonal e o lado oposto e a outra diagonal têm mesma medida. (Ângulos que enxergam o mesmo lado apresentam mesma medida)

Demonstração:

1. Se o quadrilátero ABCD é inscritível, então $\text{med}(D\hat{A}C) = \text{med}(D\hat{B}C)$, pois são ângulos inscritos que enxergam o mesmo arco.

2. Seja o quadrilátero ABCD tal que $\text{med}(D\hat{A}C) = \text{med}(D\hat{B}C)$. Suponha, por absurdo, que ele não seja inscritível.

Nesse caso, a circunferência que passa por A, B e D não passa por C. Sendo E a interseção da reta $\overleftrightarrow{BC}$ com a circunferência, como ABED é inscritível, $\text{med}(D\hat{A}E) = \text{med}(D\hat{B}E) = \text{med}(D\hat{A}C)$. Se C é interno a $\overline{BE}$, temos que $\text{med}(D\hat{A}C) > \text{med}(D\hat{A}E)$, o que é uma contradição. Se C é externo ao segmento BE, então $\text{med}(D\hat{A}C) < \text{med}(D\hat{A}E)$, o que também é uma contradição.

Concluímos, então, que, se $\text{med}(D\hat{A}C) = \text{med}(D\hat{B}C)$, o quadrilátero convexo ABCD é inscritível.

Exercício resolvido

4 Em um triângulo ABC, $\text{med}(B\hat{A}C) = 100°$ e AB = AC. Seja $\overline{BD}$ a bissetriz de $A\hat{B}C$, com D sobre o lado $\overline{AC}$ Prove que AD + BD = BC

Resolução:

O triângulo isósceles ABC tem ângulos tais que $\text{med}(\hat{A}) = 100°$ e $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 40°$. Como $\overline{AD}$ é bissetriz, temos $\text{med}(A\hat{B}D) = \text{med}(D\hat{B}C) = 20°$.

Seja $E \in \overline{BC}$ tal que BD = BE. O quadrilátero ABED é inscritível, pois $\text{med}(B\hat{A}D) + \text{med}(B\hat{E}D) = 100° + 80° = 180°$; logo, $\text{med}(D\hat{A}E) = \text{med}(D\hat{B}E) = 20°$ e $\text{med}(A\hat{E}D) = \text{med}(A\hat{B}D) = 20°$. Portanto, o triângulo ADE é isósceles com AD = ED. (I)

No triângulo isósceles AED, encontramos $\text{med}(B\hat{D}E) = \text{med}(B\hat{D}E) = \text{med}(B\hat{E}D) = 80°$.

O ângulo $B\hat{E}D$ é externo ao triângulo EDC e, pelo teorema do ângulo externo, temos que $\text{med}(E\hat{D}C) = \text{med}(B\hat{E}D) - \text{med}(E\hat{C}D) = 80° - 40° = 40°$.

Como $med(E\hat{D}C) = med(E\hat{C}D) = 40°$, resulta que $ED = EC$ (II)

De (I) e (II), obtemos: $AD = EC$ e $AD + BD = EC + BE = BC$.

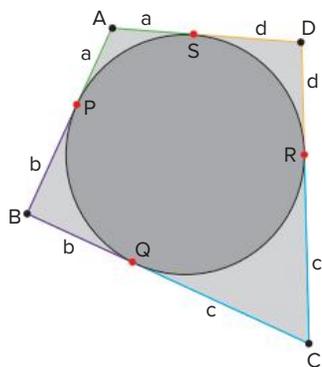
Quadriláteros circunscritíveis

Um quadrilátero é denominado circunscritível quando existe uma circunferência que tangencia seus quatro lados. Veremos a seguir as condições para que ele ocorra

Teorema do quadrilátero circunscritível, ou teorema de Pitot: Um quadrilátero ABCD é circunscritível se, e somente se, as somas das medidas dos lados opostos forem iguais, ou seja:

$$AB + CD = BC + AD$$

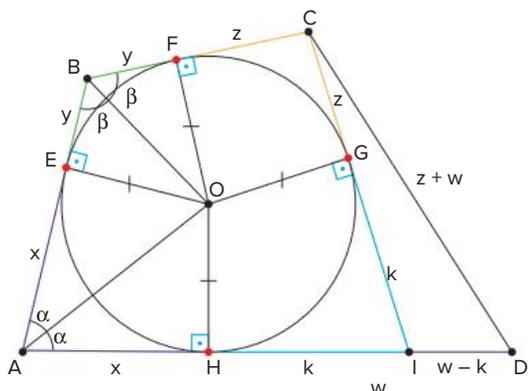
Demonstração:

1. Provemos que, se ABCD é circunscritível, vale $AB + CD = BC + AD$. Seja ABCD circunscrito a uma circunferência e P, Q, R e S os pontos de tangência.

Temos:

$$\begin{cases} AP = AS = a \\ BP = BQ = b \\ CQ = CR = c \\ DS = DR = d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB + CD = (a + b) + (c + d) = (a + d) + (b + c) = AD + BC.$$

2. Provemos agora que, se ABCD é tal que $AB + CD = AD + BC$, ABCD é circunscritível.

Suponha, por absurdo, que ABCD não seja circunscritível. Existe, então, uma circunferência que tangencia $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, mas não tangencia $\overline{CD}$. Veja a figura a seguir.

Sejam E, F e H os pontos de tangência de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ respectivamente, e seja $\overline{CI}$ tangente à circunferência em G.

$$\text{Temos: } \begin{cases} AH = AE = x \\ BF = BE = y \\ CF = CG = z \\ IH = IG = k \end{cases}.$$

Da hipótese, obtemos:

$CD + AB = BC + AD \Rightarrow CD + (x + y) = (y + z) + (x + w) \Rightarrow$
$\Rightarrow CD = z + w$

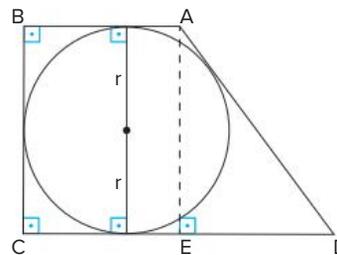
No triângulo CID, encontramos $ID = w - k$.

Pela desigualdade triangular em CID, temos $CD < CI + ID \Rightarrow z + w < z + k + w - k \Rightarrow z + w < z + w$, o que é um absurdo. Logo, ABCD é circunscritível.

Exercício resolvido

5 ITA Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se *r* é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma a + r (em cm) é igual a:

A 12
B 11
C 10
D 9
E 8

Resolução:

Do enunciado, temos que $AB + CD = 18$ cm Como o trapézio é circunscritível, encontramos:

$$AD + BC = AB + CD = 18$$

$$\text{Assim: } \begin{cases} AD + BC = 18 \\ AD - BC = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD = 10 \text{ cm} \\ BC = 8 \text{ cm} \end{cases}.$$

Dessa maneira, $2r = BC = 8$ cm Logo, $r = 4$ cm

No triângulo retângulo AED, temos $AE = BC = 8$ cm e:
$AE^2 + ED^2 = AD^2 \Leftrightarrow 8^2 + ED^2 = 10^2 \Rightarrow ED = 6$ cm
Assim, $AB + AD = 18 \Leftrightarrow AB + CE + ED = 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot AB + 6 = 18 \Rightarrow AB = 6$ cm
Portanto, $a + r = 6 + 4 = 10$ cm
Alternativa: C

Revisando

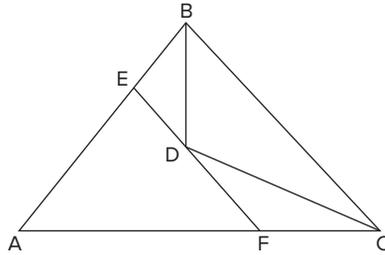
1 No triângulo ABC, retângulo em A, temos AB = 6 cm e AC = 8 cm. Sendo G o baricentro do triângulo, calcule $\overline{AG}$.

2 O triângulo ABC tem área de 120 cm^2 Sendo $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ as medianas desse triângulo e G o baricentro de ABC, calcule a área do quadrilátero GMBP

3 No triângulo de lados AB = 5 cm, AC = 8 cm e med(BÂC) = 60°. Calcule:

a) a medida da mediana $\overline{BM}$.

b) a distância de B ao baricentro.

4 Na figura, $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ são segmentos das bissetrizes dos ângulos de vértices B e C, $\overline{EF}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e os pontos E, D e F pertencem aos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ e $\overline{AC}$.

Se AB = 10 cm, BC = 12 cm e AC = 14 cm, então o perímetro do triângulo AEF, em centímetros, vale:

A 18 **B** 20 **C** 22 **D** 24 **E** 26

5 **UFPE** Seja *r* o raio, em cm, da circunferência inscrita em um triângulo retângulo com catetos medindo 6 cm e 8 cm. Quanto vale 24r?

6 Um ponto Q pertence à região interna de um triângulo DEF e equidista dos lados desse triângulo. O ponto Q é:

A o baricentro do triângulo DEF.
B o incentro do triângulo DEF.
C o circuncentro do triângulo DEF.
D o ortocentro do triângulo DEF.
E um exincentro do triângulo DEF.

7 Um ponto P equidista dos vértices de um triângulo ABC. O ponto P é:

A o baricentro do triângulo ABC.
B o incentro do triângulo ABC.
C o circuncentro do triângulo ABC.
D o ortocentro do triângulo ABC.
E um exincentro do triângulo ABC.

8 Qual dos pontos notáveis do triângulo pode ser um de seus vértices?

A Baricentro.
B Incentro.
C Circuncentro.
D Ortocentro.
E Exincentro.

9 Quais pontos notáveis de um triângulo nunca se posicionam externamente a ele?

A Baricentro e ortocentro.
B Incentro e circuncentro.
C Baricentro e circuncentro.
D Incentro e ortocentro.
E Baricentro e incentro.

10 **Esam** O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta do lado oposto é denominado altura
O ponto de interseção das três retas suportes das alturas do triângulo é chamado de:

A baricentro
B incentro
C circuncentro
D ortocentro.
E mediana.

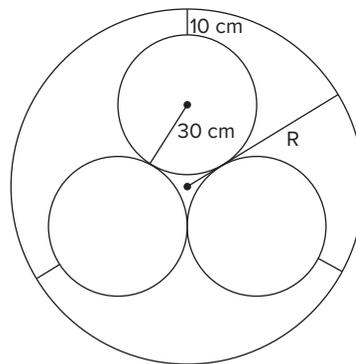
11 No triângulo ABC, em que AB = 18, AC = 24 e BC = 30, determine:

a) o raio da circunferência circunscrita.
b) a distância entre o baricentro e o circuncentro.

12 Dado o triângulo equilátero de lado $4\sqrt{3}$ cm, calcule:

a) o raio da circunferência inscrita.

b) o raio da circunferência circunscrita

13 **Enem 2013** Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura.

Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O valor de R, em centímetros, é igual a:

A 64,0
B 65,5
C 74,0
D 81,0
E 91,0

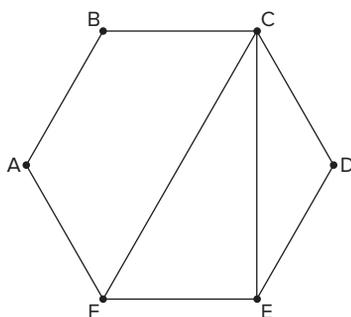
14 **IFSC 2011** Um triângulo equilátero e um quadrado têm o mesmo perímetro A medida do lado do quadrado é 90 cm Nessas condições, a medida do lado do triângulo equilátero é de:

A 90 cm
B 180 cm
C 120 cm.
D 100 cm
E 150 cm

FRENTE 3

15 **Uece 2016** A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência e a área de um hexágono regular, cuja medida do apótema é 10 m, circunscrito à mesma circunferência, é:

A $\frac{3}{8}$ B $\frac{5}{8}$ C $\frac{3}{7}$ D $\frac{5}{7}$

16 **UFJF/Pism 2016** Na figura a seguir, representa-se um hexágono regular ABCDEF em que cada lado mede 12 centímetros

Determine:

a) o valor da medida do perímetro e da área do hexágono regular ABCDEF.

b) o valor das medidas das diagonais $\overline{CF}$ e $\overline{CE}$ desse hexágono regular ABCDEF.

c) a razão entre as medidas dos comprimentos dos círculos circunscrito e inscrito ao hexágono regular ABCDEF.

17 Um hexágono regular ABCDEF e um quadrado MNPQ estão inscritos em uma circunferência de raio $4\sqrt{6}$ cm, de modo que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são paralelos e se encontram no mesmo semiplano em relação à diagonal $\overline{CF}$. Calcule a distância entre $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$.

18 Um octógono regular está inscrito em uma circunferência de raio 4 cm. Calcule a medida do lado desse octógono.

19 **Insper 2014** As disputas de MMA (*Mixed Martial Arts*) ocorrem em ringues com a forma de octógonos regulares com lados medindo um pouco menos de 4 metros, conhecidos como “Octógonos” Medindo o comprimento exato de seus lados, pode-se calcular a área de um “Octógono” decompondo o, como mostra a figura a seguir, em um quadrado, quatro retângulos e quatro triângulos retângulos e isósceles

A medida do lado do quadrado destacado no centro da figura é igual à medida **a** do lado do “Octógono”. Se a área desse quadrado é S, então a área do “Octógono” vale:

A $S\left(2\sqrt{2}+1\right)$

B $S\left(\sqrt{2}+2\right)$

C $2S\left(\sqrt{2}+1\right)$

D $2S\left(\sqrt{2}+2\right)$

E $4S\left(\sqrt{2}+1\right)$

FRENTE 3

Exercícios propostos

1 Na figura a seguir, M e N são pontos médios dos lados do triângulo ABC e P é o ponto de interseção dos segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$. Sabe-se também que AM = 21 cm, PB = 15 cm e AB = 24 cm

Determine as medidas dos segmentos:

a) $\overline{AP}$
b) $\overline{PM}$.
c) $\overline{BN}$.
d) $\overline{MN}$.

2 Na figura, o triângulo ABC é isósceles e retângulo em A. Os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ são medianas que se interceptam em D, e BC = 24 cm. Os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{DM}$ valem, respectivamente:

A 10 cm e 5 cm.
B 18 cm e 6 cm.
C 3 cm e 9 cm
D 12 cm e 4 cm.
E 11 cm e 8 cm.

3 **Fuvest** Na figura, ABCD é um quadrado de 6 cm de lado, M é o ponto médio do lado $\overline{DC}$ e A é o ponto médio de $\overline{PC}$. Calcule a área do triângulo MDN.

4 A figura a seguir mostra a estrutura de sustentação de uma rampa. Atualmente, a estrutura é formada por duas hastes fixas no ponto C de um piso plano. Assim, uma das extremidades da rampa é fixada no ponto B desse mesmo piso, uma haste é presa à extremidade A da rampa e a outra ao ponto médio M, também da rampa.

A estrutura será reforçada por duas novas hastes que sustentarão o ponto A. Elas deverão passar por perfurações feitas nos pontos D e E da haste $\overline{CM}$ e serão fixadas nos pontos P e Q do piso.

Para determinar as posições dos pontos P e Q, o engenheiro responsável pela rampa deve relacionar as distâncias *x*, *y* e *z* entre os pontos do piso, como mostra a figura

Então, sabendo que CD = DE = EM, a conclusão correta a que o engenheiro chegará será:

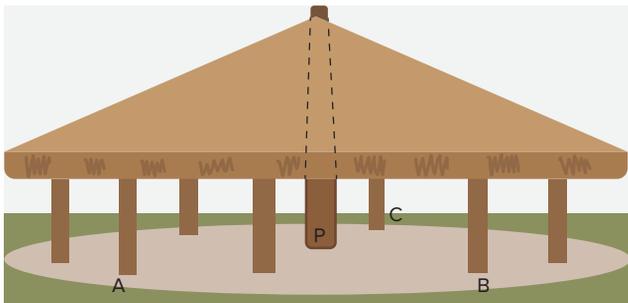
A $x + y = z$
B $x + y < z$
C $z = 2y = 4z$
D $z > 2y > 4z$
E $x \cdot z = y^2$

5 **UFC** Na figura a seguir, temos dois triângulos equiláteros ABC e A'B'C' que possuem o mesmo baricentro, tais que $\overline{AB}$ // $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ // $\overline{A'C'}$ e $\overline{BC}$ // $\overline{B'C'}$ Se a medida dos lados do triângulo ABC é igual a $3\sqrt{3}$ cm e a distância entre os lados paralelos mede 2 cm, então a medida das alturas de A'B'C' é igual a:

A 11,5 cm.
B 10,5 cm.
C 9,5 cm.
D 8,5 cm.
E 7,5 cm.

6 **UFPI** No triângulo ABC (figura a seguir), os lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 5 cm, 7 cm e 9 cm. Se P é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e $\overline{PQ}$ // $\overline{MB}$, $\overline{PR}$ // $\overline{NC}$ e $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$, a razão entre os perímetros dos triângulos AMN e PQR é:

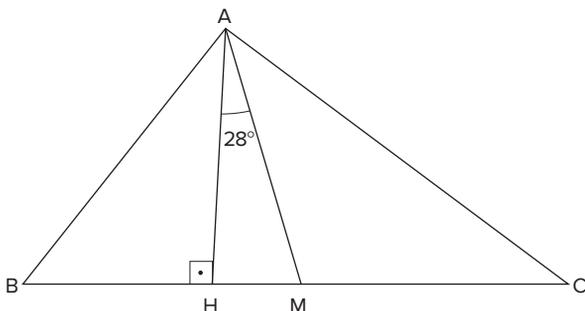
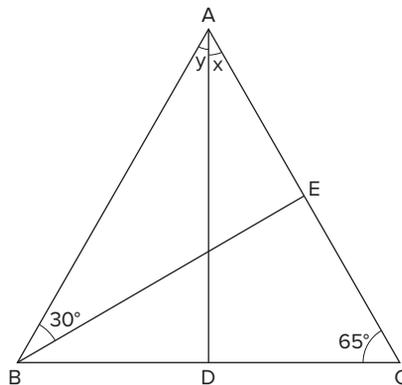
A $\frac{10}{9}$
B $\frac{9}{8}$
C $\frac{7}{6}$
D $\frac{4}{3}$
E $\frac{7}{5}$

7 Um quiosque circular, como o da figura, costuma ser levantado fixando-se primeiro a coluna central, que sustenta o topo. Usando-a como referência, determinam-se as posições das colunas perimétricas que sustentam a base desse quiosque. Porém uma confusão nas instruções passadas para a construção de um quiosque desse tipo fez com que os operários fixassem três colunas perimétricas nos pontos A, B e C.

Feito isso, uma forma prática de se encontrar a posição correta do ponto P, para colocar a coluna central, pode ser feita ao traçar no piso:

A as mediatrizes dos lados do triângulo ABC.
B as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo ABC.
C as bissetrizes dos ângulos externos do triângulo ABC.
D as medianas do triângulo ABC.
E as alturas do triângulo ABC.

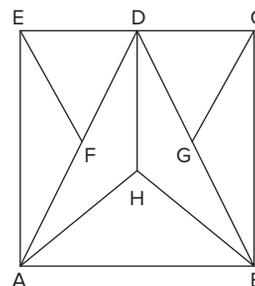
8 No triângulo de lados 15 cm, 36 cm e 39 cm, determine:

a) o raio da circunferência circunscrita
b) a distância entre o baricentro e o circuncentro desse triângulo

9 Um triângulo ABC é retângulo em A. A altura $\overline{AH}$ forma com a mediana $\overline{AM}$ um ângulo de 28° Calcule as medidas dos ângulos agudos do triângulo ABC.

10 No triângulo ABC da figura, $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ são alturas. Sendo $med(A\hat{C}B) = 65°$ e $med(A\hat{B}E) = 30°$, x e y valem, respectivamente:

A 15° e 25°.
B 25° e 35°.
C 35° e 15°.
D 20° e 25°.
E 35° e 20°.

11 Julgue as afirmativas como verdadeiras (V) ou falsas (F).

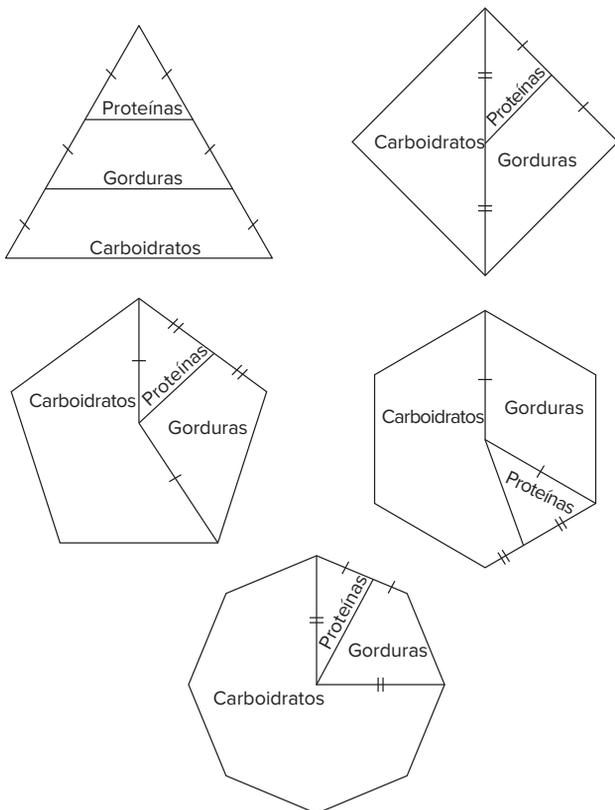
- ☐ O baricentro é sempre um ponto interno ao triângulo.
- ☐ O incentro pode ser externo ao triângulo
- ☐ O ortocentro de um triângulo obtusângulo é externo ao triângulo.
- ☐ As mediatrizes de um triângulo sempre passam pelos vértices.
- ☐ As bissetrizes internas dividem o lado oposto ao meio.
- ☐ As alturas sempre são internas aos triângulos
- ☐ O circuncentro de um triângulo retângulo é o vértice do ângulo reto.
- ☐ O ortocentro de um triângulo retângulo é o ponto médio da hipotenusa.

12 **Unirio**

Na figura anterior, o triângulo ABD é equilátero e seu lado mede 3 m; H é o ortocentro, e os pontos F e G são pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$, respectivamente Quantos rolos de fita adesiva serão necessários, no mínimo, para cobrir todos os segmentos da figura, se cada rolo possui 1 m de fita?

A 18
B 20
C 22
D 24
E 26

13 **UFSC 2014** No livro *A hora da estrela*, de Clarice Lispector, a personagem Macabéa é atropelada por um veículo cuja logomarca é uma estrela inscrita em uma circunferência, como mostra a figura.

Se os pontos A, B e C dividem a circunferência em arcos de mesmo comprimento, e a área do triângulo ABC é igual a $27\sqrt{3}$ cm^2, determine a medida do raio dessa circunferência em centímetros.

14 **Enem 2015** Para uma alimentação saudável, recomenda se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:

Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o

A triângulo.
B losango.
C pentágono.
D hexágono.
E octógono.

15 **PUC-Rio 2015** A medida da área, em cm^2, de um quadrado que pode ser inscrito em um círculo de raio igual a 5 cm é?

A 20
B $25\sqrt{2}$
C 25
D $50\sqrt{2}$
E 50

16 **Enem 2012** Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida R do raio adequado para a plataforma em termos da medida L do lado da base da estátua

Qual relação entre R e L o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

A $R \geq \frac{L}{\sqrt{2}}$
B $R \geq \frac{2L}{\pi}$
C $R \geq \frac{L}{\sqrt{\pi}}$
D $R \geq \frac{L}{2}$
E $R \geq \frac{L}{\left(2\sqrt{2}\right)}$

17 **UEL 2017** Algumas figuras geométricas são utilizadas em símbolos, como, por exemplo, a "Estrela de David" (figura 1)

Figura 1

Figura 2

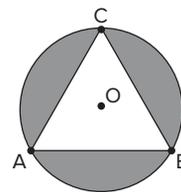



Figura 3

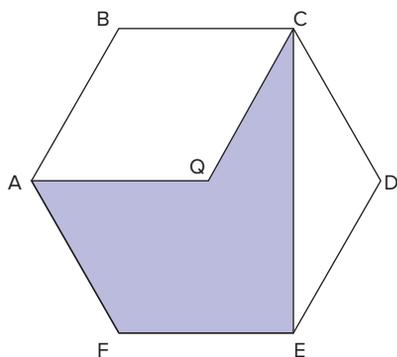
A partir das Figuras 1 e 2, desenhou-se um esquema, representado na Figura 3, que não obedece a uma escala Sabe se que, na Figura 3, estão representados uma circunferência de centro no ponto O e um triângulo equilátero ABC, inscrito nessa circunferência Considerando que o raio da circunferência é de $\sqrt{48}$ cm, responda aos itens a seguir

a) Determine a medida do lado do triângulo ABC. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Determine a área representada pela cor cinza na Figura 3 Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

18 **Mackenzie 2013** A área de um triângulo regular inscrito em uma circunferência de raio *r*, em função do apótema a de um hexágono regular inscrito na mesma circunferência é:

A a^2
B $\sqrt{2}a^2$
C $2\sqrt{2}a^2$
D $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$
E $\sqrt{3}a^2$

19 **FGV 2013** Na figura, ABCDEF é um hexágono regular de lado 1 dm e Q é o centro da circunferência inscrita nele

O perímetro do polígono AQCEF, em dm, é igual a

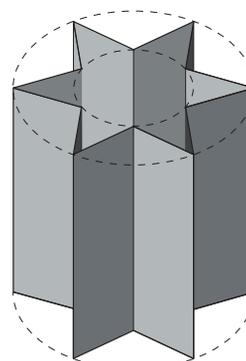
A $4+\sqrt{2}$

B $4+\sqrt{3}$

C 6

D $4+\sqrt{5}$

E $2\left(2+\sqrt{2}\right)$

20 **Udesc 2016** Um filtro de ar automotivo é fabricado dobrando-se uma folha retangular de papel filtro em formato de sanfona (uma dobra para cima e outra para baixo repetidamente) e, posteriormente, unindo-se duas laterais opostas dessa folha, de modo a formar uma superfície, conforme a representada na figura a seguir.

Filtro de ar automotivo

Considere como "raio interno" a distância do centro do cilindro até as pontas interiores das dobras e "raio externo" a distância do centro até as pontas externas. Um filtro específico é fabricado "sanfonando" o papel 6 vezes (6 dobras para dentro e 6 dobras para fora), sem sobreposição das extremidades do papel que são unidas para formar a superfície da figura Sabendo que esse filtro tem raio interno de 3 cm, raio externo de 6 cm, e altura de 10 cm, a área super ficial desse filtro é de:

A $360\sqrt{5\quad 2\sqrt{3}}$ cm².

B $360\sqrt{5\quad \sqrt{3}}$ cm²

C $720\sqrt{3}$ cm²

D $720\sqrt{2}$ cm².

E $360\sqrt{13+2\sqrt{3}}$ cm².

Texto complementar

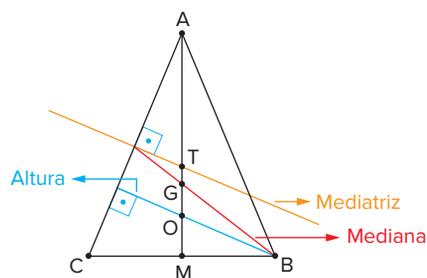
A reta de Euler

Leonhard Euler (1707-1783) foi um importante matemático e cientista suíço, considerado um dos maiores em sua época Muito estudioso desde a infância, aos 31 anos, perdeu a visão de seu olho direito. Em 1766, ou seja, 28 anos depois, teve catarata e perdeu a visão do olho esquerdo, mas sua deficiência não o tornou improdutivo. Nos 17 anos que se sucederam, até falecer em 1783, escreveu quase metade das 866 obras suas que se tem registro

A reta de Euler relaciona três dos pontos notáveis de um triângulo. Recebe esse nome a reta que passa pelo circuncentro, pelo baricentro e pelo ortocentro de um triângulo A verificação disso pode ser comprovada pelo teorema a seguir:

> Em um triângulo ABC qualquer, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro são colineares. O baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro.

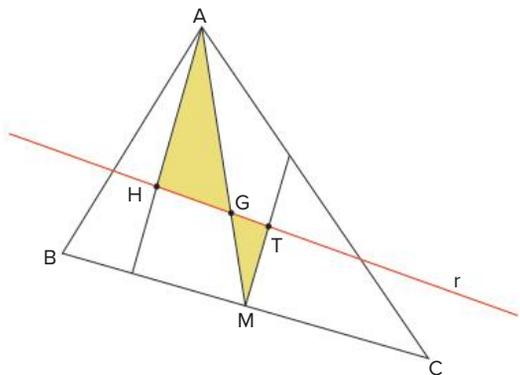
A prova desse teorema vale para um triângulo qualquer Para o caso específico do triângulo equilátero, os três pontos notáveis coincidem e a reta de Euler não fica definida.

Considerando um triângulo isósceles ABC, sabemos que a mediana, a mediatriz e a altura relativas à base são coincidentes, assim, o baricentro (G), o circuncentro (T) e o ortocentro (O) pertencem a um mesmo segmento A reta de Euler é a reta suporte desse segmento, como mostra a figura a seguir

O desenvolvimento que veremos a seguir vale para triângulos acutângulos, retângulos ou obtusângulos (por analogia). Consideraremos um triângulo acutângulo apenas para garantir que os pontos notáveis sejam internos ao triângulo

Seja um triângulo escaleno ABC. Nele, a mediana e a mediatriz do triângulo são distintas; logo, o baricentro G e o circuncentro T são pontos distintos. Assim, sejam:

- *r* a reta determinada por G e T;
- H um ponto pertencente a $\overrightarrow{TG}$, tal que $GH = 2 \cdot TG$;
- M o ponto médio do lado $\overline{BC}$.

FRENTE 3

Considerando a mediana e a mediatriz relativas ao lado $\overline{BC}$, teremos:

Os triângulos GHA e GTM são semelhantes pelo caso LAL:

$$\begin{cases} GH = 2 \cdot GT & \text{(pela construção)} \\ med(A\hat{G}H) = med(M\hat{G}T) & \text{(opostos pelo vértice)} \\ AG = 2 \cdot GM & \text{(propriedade do baricentro)} \end{cases}$$

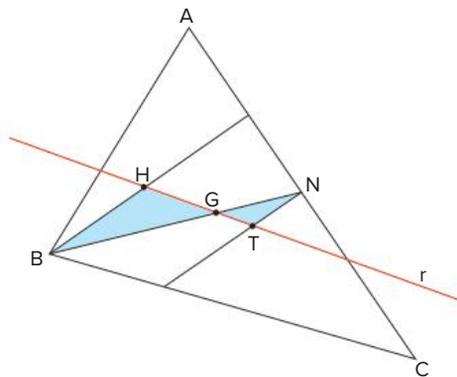
Assim:

- os ângulos $A\hat{H}G$ e $M\hat{T}G$ são congruentes;
- a reta suporte do segmento $\overline{AH}$ é paralela à mediatriz $\overleftrightarrow{TM}$

Com isso, H é um ponto que pertence à altura relativa ao lado $\overline{BC}$

Raciocinando do mesmo modo, mas considerando, desta vez, a mediana e a mediatriz relativas ao lado $\overline{AC}$, sejam:

- *r* a reta determinada por G e T;
- H um ponto pertencente a $\overrightarrow{TG}$, tal que GH = 2 TG;
- N o ponto médio do lado $\overline{AC}$.

Temos:

Os triângulos GHB e GTN são semelhantes pelo caso LAL:

$$\begin{cases} GH = 2 \cdot GT & \text{(pela construção)} \\ med(B\hat{G}H) = med(N\hat{G}T) & \text{(opostos pelo vértice)} \\ BG = 2 \cdot GN & \text{(propriedade do baricentro)} \end{cases}$$

Assim:

- os ângulos $B\hat{H}G$ e $N\hat{T}G$ são congruentes;
- a reta suporte do segmento $\overline{BH}$ é paralela à mediatriz $\overleftrightarrow{TN}$.

Com isso, H é um ponto que pertence à altura relativa ao lado $\overline{AC}$.

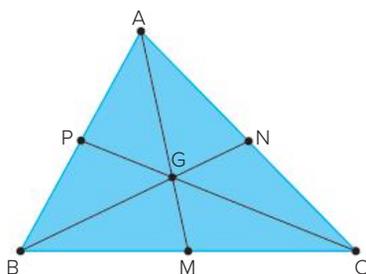
Portanto, como H é a interseção de duas alturas do triângulo ABC, H é, de fato, o ortocentro do triângulo.

Dessa forma, verificamos que o circuncentro, o baricentro e o ortocentro do triângulo são colineares e a reta a que pertencem é chamada de reta de Euler do triângulo ABC. Pelo fato de o ortocentro do triângulo ser único, verificamos também que o baricentro sempre estará entre o ortocentro e o circuncentro, com GH = 2 · GT.

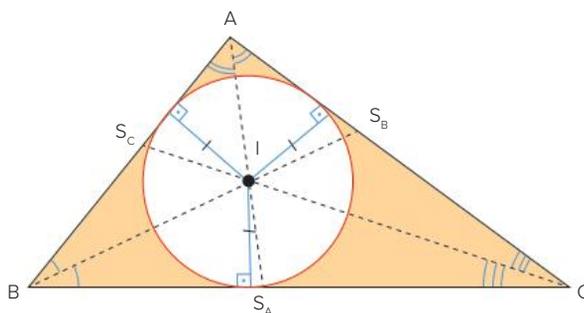
Resumindo

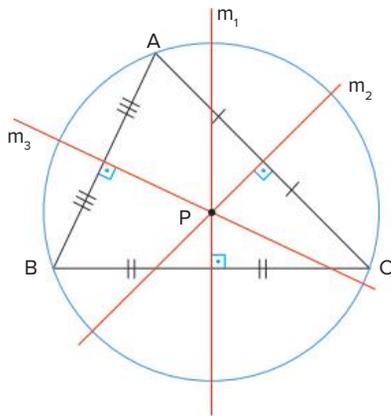
Pontos notáveis do triângulo

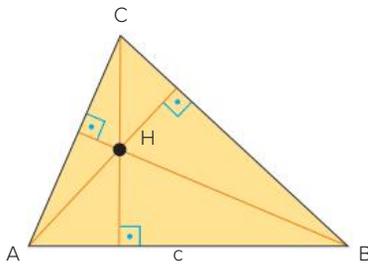
O baricentro e as medianas

- As três medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto, chamado de baricentro.
- O baricentro divide as medianas na razão 2:1
- As medianas dividem o triângulo em seis triângulos de mesma área.
- O baricentro é o centro de massa do triângulo de densidade uniforme.

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = 2$$

O incentro e as bissetrizes

- As três bissetrizes internas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado incentro.
- O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.
- O incentro equidista dos lados do triângulo.
- O raio da circunferência inscrita é a razão entre a área e o semiperímetro do triângulo.

O circuncentro e as mediatrizes

- As três mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam em um único ponto, chamado de circuncentro.
- O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
- O circuncentro equidista dos vértices do triângulo

O ortocentro e as alturas

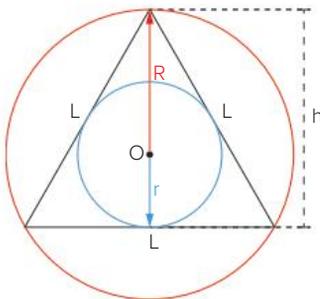
- As três alturas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado ortocentro.
- O ortocentro de um triângulo acutângulo é interno ao triângulo, o do triângulo retângulo coincide com o vértice do ângulo reto e o do triân gulo obtusângulo é externo ao triângulo.

Polígonos regulares

Área do polígono regular de *n* lados

Em função do perímetro (2p) e do apótema (a):

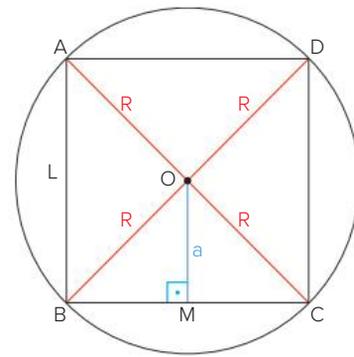
$$\text{Área} = n \cdot A_\Delta = n \cdot \frac{L \cdot a}{2} = \frac{2p \cdot a}{2} = p \cdot a$$

Em função do raio (R) da circunferência circunscrita e do ângulo central (α): $\text{Área} = n \cdot \frac{R^2 \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$.

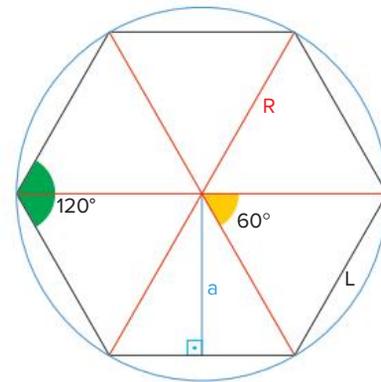
Estudo do triângulo equilátero

Altura $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$

Apótema $a = r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{6}$

Raio da circunferência circunscrita $R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{3}$

Estudo do quadrado

Apótema $a = \frac{L}{2}$

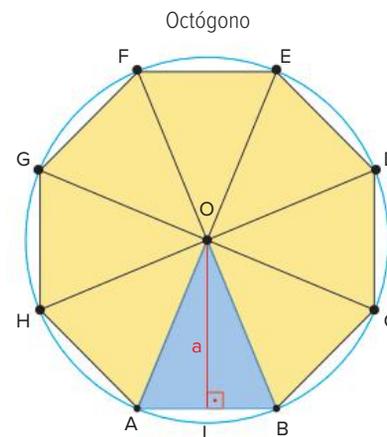
Raio da circunferência circunscrita $R = \frac{L\sqrt{2}}{2}$

Estudo do hexágono regular

Apótema $a = \frac{L\sqrt{3}}{2}$

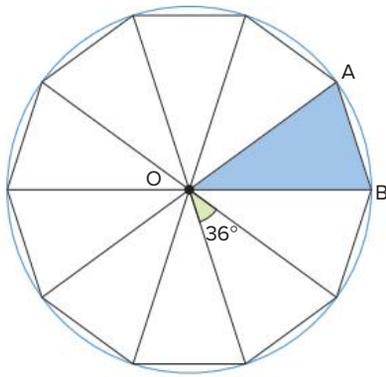
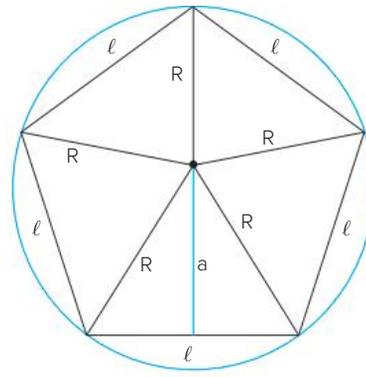
Raio da circunferência circunscrita $R = L$

$\text{Área} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Outras áreas

A área de um polígono regular em função do raio R da circunferência circunscrita será:

Octógono

$\text{Área}_{\text{octógono}} = 2R^2\sqrt{2}$

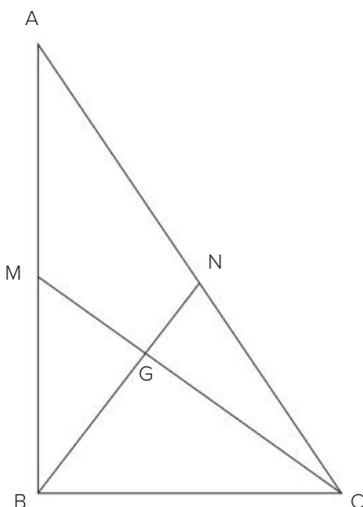
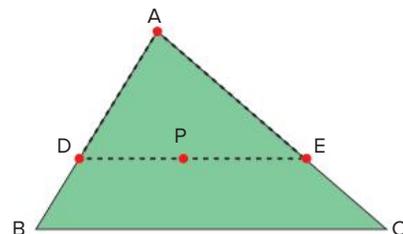
FRENTE 3

$$\text{Área}_{\text{decágono}} = \frac{5 \cdot R^2 \cdot \sqrt{10 \quad 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\text{Área}_{\text{pentágono}} = \frac{5R^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}$$

Quer saber mais?

Sites

- Observe a beleza nas simetrias proporcionadas pelas pavimentações do plano, com triângulos e quadriláteros, cujos lados estão na razão áurea.
  <https://p p4ed com/QKPRX>
  <https://p.p4ed.com/QJORP>.

Exercícios complementares

1 Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios dos lados AB = 6 cm e AC = 4 cm de um triângulo ABC. Sabendo que as medianas $\overline{CM}$ e $\overline{BN}$ são perpendiculares, determine a medida da base $\overline{BC}$ desse triângulo.

2 Um terreno em forma de um triângulo ABC, cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 15 m, 18 m e 24 m, será parcialmente cercado. Para cercá-lo, o proprietário mandou que fosse colocada uma estaca de madeira em um ponto P do interior do terreno, outra no vértice A e mais duas outras estacas nos pontos D e E dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, de modo que os pontos P, D e E fiquem alinhados, determinando uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ do terreno, como mostra a figura.

Determine quantos metros de cerca serão usados para cercar o triângulo ADE nos casos em que o ponto P é:

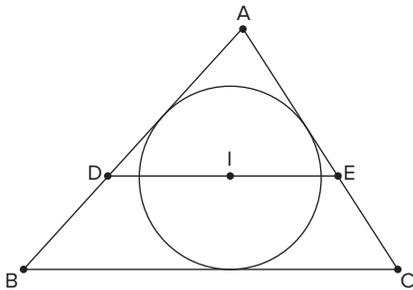
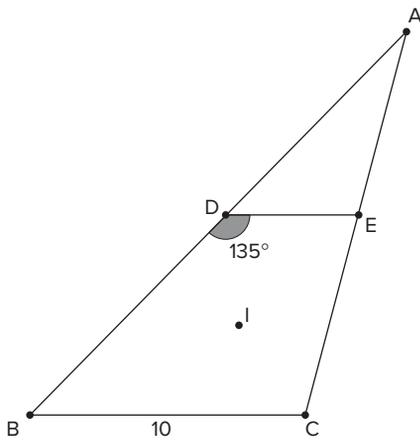
a) o incentro do triângulo ABC.

b) o baricentro do triângulo ABC.

3 Um triângulo ABC de lados AB = 16 cm e AC = 10 cm tem o ângulo interno $B\hat{A}C$ medindo 60°. Determine a distância do ponto P ao lado $\overline{BC}$ do triângulo PBC sabendo que P é o incentro do triângulo ABC.

4 **Col. Naval** Um triângulo isósceles tem os lados congruentes medindo 5 cm e a base 8 cm. A distância entre o seu incentro e o seu baricentro é, aproximadamente, igual a:

A 0,1 cm.
B 0,3 cm.
C 0,5 cm.
D 0,7 cm.
E 0,9 cm.

5 Na figura a seguir, I é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC. $\overline{BC}$ // $\overline{DE}$ e os pontos D, I e E são colineares. Calcule o perímetro do triângulo ADE sabendo que AB = 14 cm, BC = 13 cm e AC = 12 cm.

6 **Udesc 2015** Observe a figura

Sabendo que os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ são paralelos, que o ponto I é incentro do triângulo ABC e que o ângulo $B\hat{I}C$ é igual a 105°, então o segmento $\overline{AC}$ mede:

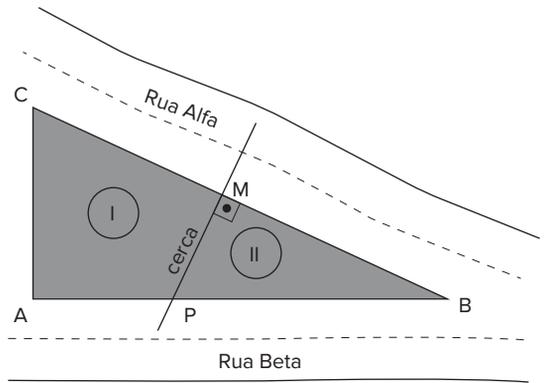
A $5\sqrt{2}$

B $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

C $20\sqrt{2}$

D $10\sqrt{2}$

E $\frac{20\sqrt{2}}{3}$

7 **EPCar 2016** Um terreno com formato de um triângulo retângulo será dividido em dois lotes por uma cerca feita na mediatriz da hipotenusa, conforme mostra a figura.

Sabe-se que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ desse terreno medem, respectivamente, 80 m e 100 m Assim, a razão entre o perímetro do lote I e o perímetro do lote II, nessa ordem, é:

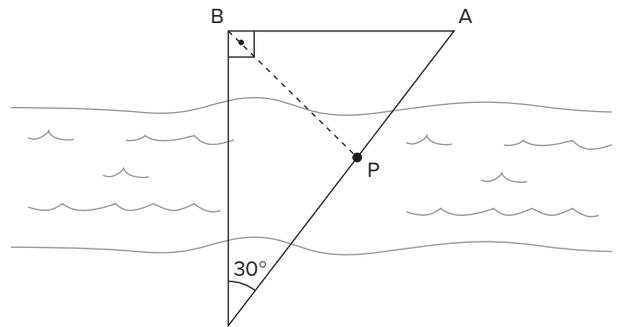
A $\frac{5}{3}$

B $\frac{10}{11}$

C $\frac{3}{5}$

D $\frac{11}{10}$

8 Calcule a distância entre o incentro e o circuncentro do triângulo retângulo de medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm.

9 **EPCar 2016** As cidades A, B e C situam se às margens de um rio e são abastecidas por uma bomba situada em P, conforme figura a seguir

Sabe-se que o triângulo ABC é retângulo em B e a bissetriz do ângulo reto corta $\overline{AC}$ no ponto P. Se $BC = 6\sqrt{3}$ km, então $\overline{CP}$ é, em km, igual a:

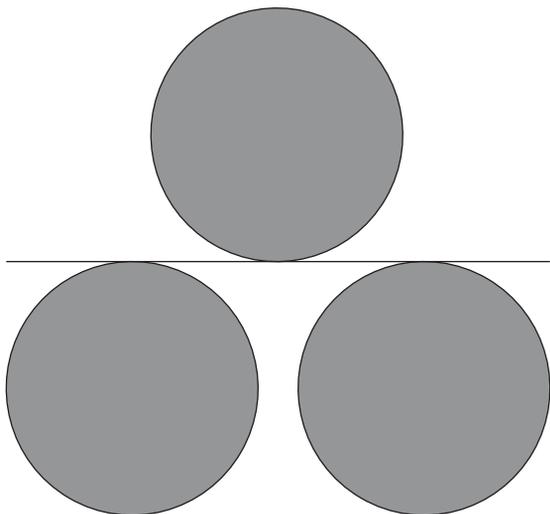
A $6+\sqrt{3}$

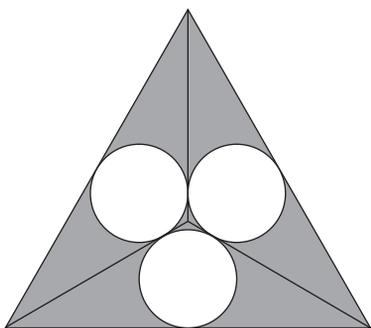
B $6\left(3-\sqrt{3}\right)$

C $9\sqrt{3}\quad\sqrt{2}$

D $9\left(\sqrt{2}\quad 1\right)$

10 Qual a área máxima de um triângulo retângulo cujo baricentro dista 5 cm do ortocentro?

11 **UFG 2013** Gerard Stenley Hawkins, matemático e físico, nos anos 1980, envolveu-se com o estudo dos misteriosos círculos que apareceram em plantações na Inglaterra. Ele verificou que certos círculos seguiam o padrão indicado na figura a seguir, isto é, três círculos congruentes, com centros nos vértices de um triângulo equilátero, e tinham uma reta tangente comum.

Nessas condições e considerando uma circunferência maior que passe pelos centros dos três círculos congruentes, calcule a razão entre o raio da circunferência maior e o raio dos círculos menores.

12 A figura a seguir apresenta o logotipo de um grupo empresarial, que consiste em um triângulo equilátero dividido em três triângulos congruentes, com uma circunferência inscrita em cada um.

Sendo A, B e C os centros das circunferências inscritas e P o vértice do triângulo equilátero mais distante do ponto B, podemos concluir que a medida do ângulo $P\hat{A}B$ é igual a:

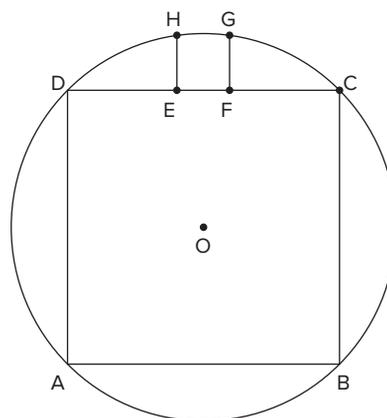
A 165°
B 150°
C 135°
D 120°
E 105°

13 O bilhar americano é jogado com 16 bolas, sendo uma branca e 15 coloridas, que, inicialmente, são colocadas dentro de uma peça de madeira com a forma de um triângulo equilátero, como mostra a figura a seguir.

Sabendo que as bolas coloridas têm 8 cm de diâmetro e admitindo que todas elas estejam em contato umas com as outras ou com o triângulo de madeira, faça uma estimativa da medida do lado desse triângu lo que cerca as 15 bolas coloridas usando, no final, o número 1,7 como aproximação da raiz quadrada de 3.

14 **Esc. Naval 2016** Um triângulo inscrito em um círculo possui um lado de medida $2\sqrt[4]{3}$ oposto ao ângulo de 15º. O produto do apótema do hexágono regular pelo apótema do triângulo equilátero inscritos nesse círculo é igual a:

A $3\left(\sqrt{3}+2\right)$
B $4\left(2\sqrt{3}+3\right)$
C $\sqrt{8\sqrt{3}+12}$
D $\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}+3\right)$
E $6\left(\sqrt{2}+1\right)$

15 **Insper 2013** O quadrado ABCD está inscrito na circunferência de centro O e raio de medida $2\sqrt{2}$ cm, como mostra a figura.

Os vértices E e F do quadrado EFGH pertencem ao lado $\overline{CD}$ e os vértices G e H pertencem à circunferência Assim, a medida do lado do quadrado EFGH, em cm, é igual a:

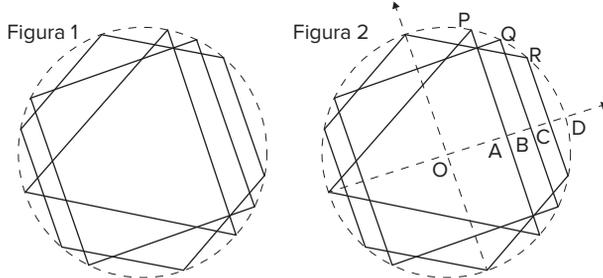
A 0,8
B 0,9
C 1,0
D 1,1
E 1,2

16 Em uma circunferência de raio 4 m, está inscrito um hexágono regular ABCDEF Nele, está inscrita outra circunferência tangente a todos os lados do hexágono. Finalmente, nessa última circunferência, está inscrito o quadrado MNPQ, cujo vértice M é também ponto médio do lado $\overline{AB}$ do hexágono Se a nomenclatura dos polígonos referidos é cíclica e horária, ou seja, os pontos A, B, C, D, E e F seguem, nessa ordem, contornando o hexágono no sentido horário, bem como os vértices M, N, P e Q que contornam o quadrado, determine:

a) a medida, em metros, do lado do quadrado.

b) a distância aproximada, em centímetros, que existe entre os pontos F e Q

(Use: $\sqrt{2} = 1,41$ e $\sqrt{3} = 1,73$)

17 Em uma mesma circunferência de raio 1 km, estão inscritos um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular, como mostra a Figura 1

Aproveitando-se do fato de que há um feixe de paralelas determinado por certos lados desses polígonos, escolhe-se um sistema ortonormal de coordenadas cartesianas com origem no centro da circunferência (Figura 2), de tal forma que o semieixo positivo das abscissas desse sistema é perpendicular ao feixe de paralelas nos pontos A, B e C e intercepta a circunferência no ponto D.

Usando os números 1,414 e 1,732 como aproximações das raízes quadradas dos números 2 e 3, bem como 3,14 para aproximar o número π, considerando que a ilustração esteja representando uma pista de corrida, responda às seguintes perguntas:

a) Quais os valores aproximados para as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, em metros?

b) Quem, entre Alex, Beto e Caio, levaria vantagem em relação à distância se os três disputassem uma corrida em que Alex devesse partir do ponto A e chegar até o ponto R, Beto do ponto B até o ponto Q e Caio do ponto C até o ponto P, de modo que os três tivessem que correr em linha reta até o ponto D e seguir até seus destinos finais percorrendo a trajetória determinada pelo arco da circunferência?

18 **Fatec 2013** Considere o texto a seguir para responder à questão.

As "áreas de coberturas" a serem atendidas por um serviço de telefonia móvel são divididas em células, que são iluminadas por estações-rádio base localizadas no centro das células

As células em uma mesma área de cobertura possuem diferentes frequências, a fim de que uma célula não interfira na outra Porém, é possível reutilizar a frequência de uma célula em outra célula relativamente distante, desde que a segunda não interfira na primeira

Cluster é o nome dado ao conjunto de células vizinhas, o qual utiliza todo o espectro disponível Uma configuração muito utilizada está exemplificada na Figura 1, que representa um modelo matemático simplificado da cobertura de rádio para cada estação base

O formato hexagonal das células é o mais prático, pois permite maior abrangência de cobertura, sem lacunas e sem sobreposições

A Figura 2 ilustra o conceito de reutilização de frequência por *cluster*, em que as células com mesmo número utilizam a mesma frequência

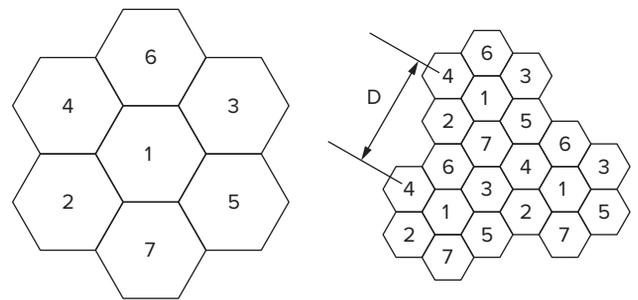
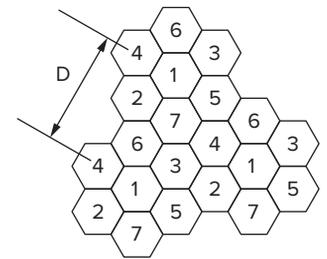



Figura 1: *cluster* de sete células Figura 2: reúso de frequência

Disponível em: <www.teleco.com.br/tutorialatalaia/pagina_2.asp> e <www.teleco.com.br/tutoriais/tutorialsmsloc/página_3.asp> Acesso em: 5 out 2012 (Adapt)

Na Figura 2, os hexágonos são congruentes, regulares, têm lado de medida R e cobrem uma superfície plana. Para determinar a distância D, distância mínima entre o centro de duas células que permitem o uso da mesma frequência, pode-se traçar um triângulo cujos vértices são os centros de células convenientemente escolhidas, conforme a Figura 3.

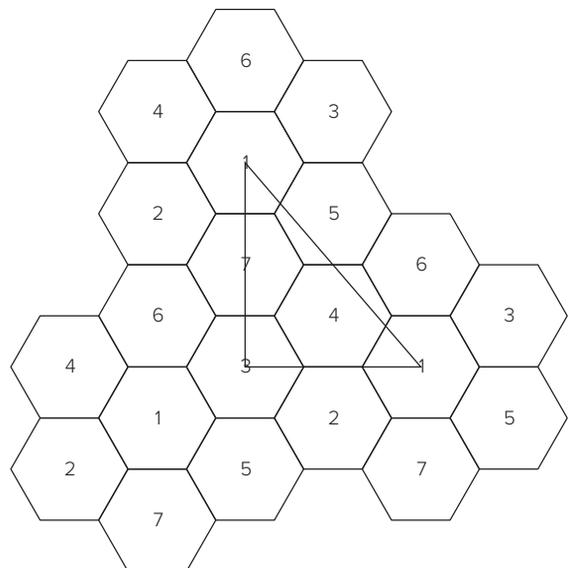
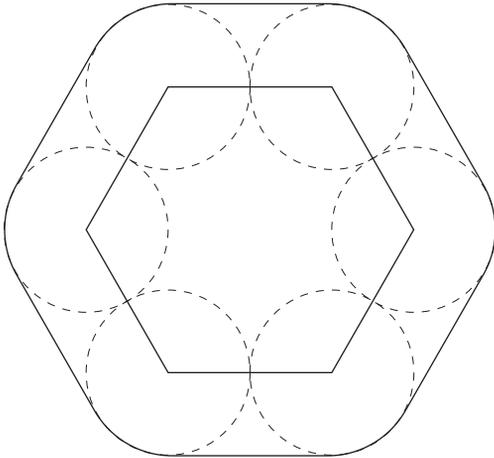



Figura 3

Assim sendo, o valor de D, expresso em função de R, é igual a

A $R\sqrt{21}$
B $5R$
C $3R\sqrt{3}$
D $R\sqrt{30}$
E $6R$

19 **ITA 2017** Seis circunferências de raio 5 cm são tangentes entre si (duas a duas) e seus centros são vértices de um hexágono regular, conforme a figura a seguir.

O comprimento de uma correia tensionada que envolve externamente as seis circunferências mede, em cm:

A $18 + 3\pi$
B $30 + 10\pi$
C $18 + 6\pi$
D $60 + 10\pi$
E $36 + 6\pi$

20 **ITA 2016** Seja P_n um polígono convexo regular de *n* lados, com $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. P_n é inscritível numa circunferência.
II. P_n é circunscritível a uma circunferência.
III. Se ℓ_n é o comprimento de um lado de P_n e a_n é o comprimento de um apótema de P_n, então $\frac{a_n}{\ell_n} \leq 1$ para todo $n \geq 3$

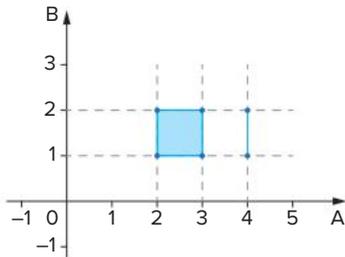
É(São) verdadeira(s):

A apenas I.
B apenas II.
C apenas III
D apenas I e II
E I, II e III.

Gabarito

Frente 1

Capítulo 1 – Teoria elementar dos conjuntos

Revisando

1.

a) U

b) {a; c; e}

c) {b; f}

d) {b; d; f}

e) {f}

f) {b; e; f; g}

g) U

2. V; F; V; F; F; F; F; F; V; V

3. F; V; V; V; V; V; F; F; V; V

4. 155 alunos

5.

Exercícios propostos

1

a) ∈

b) ⊂

c) ⊅

d) ⊃

e) x, x ≠ 7

2 C

3 D

4 C

5. D

6. C

7 C

8 {2}

9. {0; 1; 2; 3; 4; 5}

10 {3; {1}}

11 Soma: 01 + 02 + 04 = 07

12 E

13. D

14. A

15. B

16. Soma: 02 + 04 + 08 = 14

17. A

18.

a) 1671

b)

Recordaram os votos	Eleitores
Para ambos os cargos	1099
Apenas para deputado estadual	179
Apenas para deputado federal	393

19.

20. $x = \frac{2}{7}$; $y = 6$

21. A = {1}
B = {0; 1; 2}

22. B

23. E

24. D

25. D

26. E

27. Soma: 04

28.

a) {x ∈ R| – 2 ≤ x < 4}

b) {x ∈ ℝ| 1 ≤ x < 3}

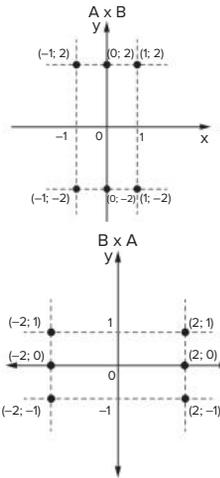
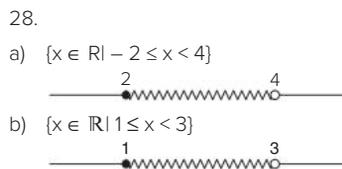
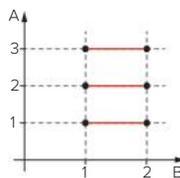
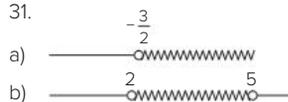
c) ∅

29.

30. C

31.

a) $-\frac{3}{2}$

b) 2 5

32. D

33.

a) 315 b) 75 c) 235 d) 135

34.

a) 48 caixas b) 38 caixas c) 86 caixas

35. E

36 550

37. 75%

38. D

39. 50

Textos complementares

1. F; V; V; V; V

2 A

3 E

4.

a)

p	q	r	p∨q	~(p∨q)	~(p∨q)∧r
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

b)

p	q	r	p∧q	(p∧q)→r
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

c)

p	q	r	~p	~pvq	~pvq→r
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F

Exercícios complementares

1. A

2 ∅, {0}, {5}, {10}, {0, 5}, {0, 10}, {5, 10}, {0, 5, 10}

3 D

4. Z = {5}

5. F; V; F; F; F; F; V; V; V

6. A

7. A

8. {a; c}

9.

a) {0, 1, 2, 3}

b) {8, 9, 10, 11, 12}

c) ∅

d) {0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12}

e) {0, 1, 2, 3}

10 A

11.

a) {0, 5, 7, 9, 10, 90}

b) {0, 5, 7, 9, 10, 90}

c) {5, 7, 9, 10, 90}

d) {7, 8, 9, 10}

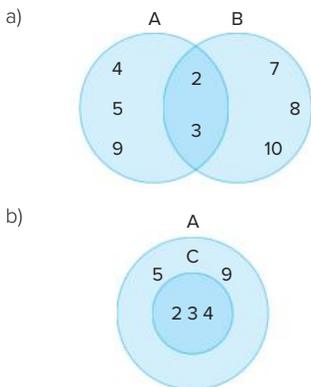
12 A

13. B

14. Soma: 02 + 04 = 06

15.

a)

b)

16. Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15

17. B

18 V; V; V; V; F

19 C

20. F; F; F; V

21.

a) {1, 6, 5, 4} ∪ {1, 7, 2, 6} =
= {1, 2, 4, 5, 6, 7}

b) {2, 9, 10} ∪ {4, 5, 90, 7} =
= {2, 4, 5, 7, 9, 10, 90}

22 B

23. C

24. F; F; F; F; F

25.

a)

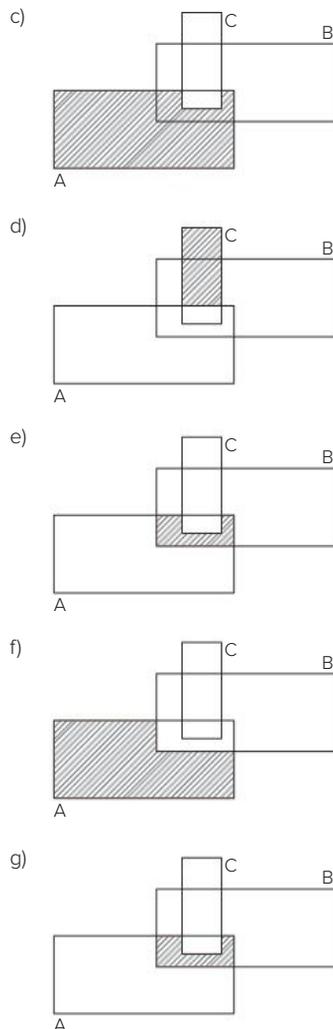
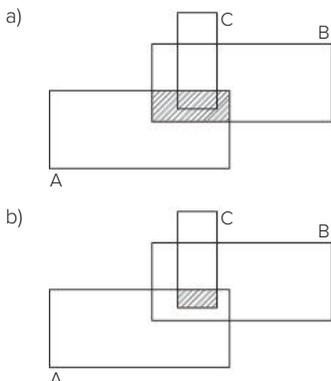
b)

c)

d)

e)

f)

g)

26.

a) P = {3, 4, 5, 7}; Q = {1, 2, 3, 7}; R = {2, 5, 6, 7}

b) (P ∩ Q) – R = {3}

c) (P ∪ Q) ∩ R = {2, 5, 7}

d) (P ∪ R) – P = {2, 6}

e) (Q ∩ R) ∪ P = {2, 3, 4, 5, 7}

27. B

28. Soma: 01 + 02 + 04 = 07

29 E

30 A

31.

a) (1,–1); (1,0); (2,–1); (2,0); $(\frac{3}{5},-1)$; $(\frac{3}{5},0)$

b) 9

c) 4

32. A

33 A x B = {(1, $\frac{2}{3}$); (1, 8); (2, $\frac{2}{3}$); (2, 8);
(–4, $\frac{2}{3}$); (–4, 8)}

A x A = {(1, 1); (1, 2); (1, –4); (2, 1);
(2, 2); (2, –4); (–4, 1); (–4, 2); (–4, –4)}

34. D

35 E

36 A

37.

a) $(A \cup B) = B \quad \cup (A \quad B) \cap \overline{B} =$
$(\overline{B} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = \varnothing \cup (A \cap B) =$
$A \cap \overline{B} = A \quad B$

b) $A - (B \cup C) = A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) =$
$A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = (A \cap A) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) =$
$(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = (A - B) \cap (A - C)$

c) $(A \cap B) - C = (A \cap B) \cap \overline{C} =$
$(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cap \overline{C}) =$
$(A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C}) =$
$(A - C) \cap (B - C)$

d) $\overline{(A \quad B)} = \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup B$

e) $(A \cup B) - (A \cap B) =$
$(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} =$
$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) =$
$[(A \cup B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cup B) \cap \overline{B}] =$
$[(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap A)] \cup$
$[(\overline{B} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A)] =$
$[(\overline{A} \cap B) \cup \varnothing] \cup [\varnothing \cup (A \cup \overline{B})] =$
$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cup \overline{B}) =$
$(B - A) \cup (A - B)$

f) $A \cup (B \quad A) = A \cup (B \cap \overline{A}) =$
$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap (B) =$
$A \cup B = B$ (pois $A \subset B$)

38 Demonstração

39

a) A

b) [–1;0] ∪] 3;5 [

c) B

40.

a)]–3, 0]

b) [7, 10]

41. Soma: 02 + 08 = 10

42.

a) {8, 9, 10, ...}

b) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

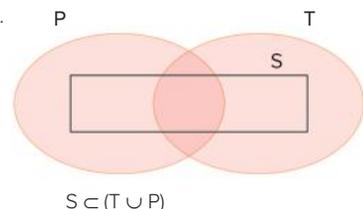
c) {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

d) {1, 2, 3, 4, 5}

43 A = {1, 3}
B = {4, 8, 16}

44 A

45.

$S \subset (T \cup P)$

46 C

47 C

48 C

49. B

50 E

51 21

52. C

53. E

54.

a) ℕ, ℚ, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, ℤ

b) ℤ, ℚ

c) ℕ, ℚ, ℤ, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$

55. D

56. D

57. 56

58. E

59 B

60 D

61. Soma: 01 + 02 = 03

Capítulo 2 – Relações e funções

Revisando

1. A função *f* é bijetora; logo, é inversível. Assim, $f^{-1}: [0; 6] \rightarrow [1; 1]$ e $x = 3y + 3$

$$\therefore \frac{x-3}{3} = y \text{ e } f^{-1}(x) = \frac{x-3}{3}$$

2 $f \circ g(x) = g \circ f(x);\ \forall\ x \in \mathbb{R} \therefore f(g(x)) = g(f(x));\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

$2g(x) + 1 = a\ f(x) + b \therefore 2(ax + b) + 1 = = a(2x+1)+b \therefore 2ax+2b+1=2ax+a+b \Rightarrow \Rightarrow a \quad b = 1$

Tomando como exemplo a = 3 e b = 2, tem se $g(x) = 3x + 2$

Assim, $f \circ g(x) = f(g(x)) - 2g(x) + 1 =$

$= 2(3x + 2) + 1 = 6x + 5$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = 3f(x) + 2 = 3(2x + 1) + 2 = = 6x + 5$

3. *f* é bijetora; *g* é sobrejetora e não é injetora; *h* é injetora e não é sobrejetora.

4 $a = \quad 2$, $b = 1$ e $c = 2$

Exercícios propostos

1. {6; 9; 12}

2

3 E

4. A

5. A

6. D

7. B

8 D

9 E

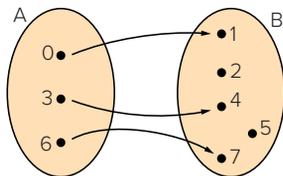
10. A

11. C

12. B

13. C

14 B

15

a) $S = \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$

b) $S = \left]-\infty, \quad 6\right] \cup \left\{\frac{1}{3}, \quad \frac{5}{4}\right\}$

c) $S = \left]-\infty, \quad 2\right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \quad \right[$

d) $S = \left]-\frac{1}{5}, \frac{3}{4}\right]$

e) $S = \left]-\infty, \quad 10\right[\cup \left] \frac{4}{3}, +\infty \quad \right[$

f) $S = \left[\frac{1}{2}, 3\right[\cup \left]5, +\infty\right[$

g) $S =]0, 1[\cup]2; +\infty[$

h) $S =]-1, 0] \cup \left]\frac{1}{3}, 1\right[\cup [3, +\infty[$

16. C

17 A

18 B

19. E

20. A

21. B

22 E

23. E

24. A

25. V; F; V; F

26. D

27 C

28. A

Exercícios complementares

1. C

2. C

3. E

4. D

5. 6 unidades de área

6. 33 horas

7 R$ 50,00

8. C

9. B

10. D

11.

a) F = 95

b) C = 160

12. C

13. E

14. D

15 E

16 C

17 A

18. $\left]-\infty, -3\right[\cup \left]\frac{5}{2}, \infty\right[$

19

a) $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{4}\right\}$

b) $\frac{x+4}{(4x+3)} = g^{-1}(x)$

20. B

21. $g \circ f(x) = g(f(x)) = 4f(x) + 3 = 4(1 - x) + 3 = = 4 - 4x + 3 = -4x + 7$

$h \circ (g(f(x))) = 2g(f(x)) - 5 = 2(-4x + 7) - 5 = = -8x + 9$

22. $f \circ g(x) = x^2 - 2x + 2 \therefore f(g(x)) = x^2 - 2x + 2$

$\therefore 2g(x) + 7 = x^2 - 2x + 2$

$$2g(x) = x^2 - 2x - 5 \therefore g(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{5}{2}$$

23 $f \circ g(x) = 2x^2 - 4x + 3 \therefore f(g(x)) = 2x^2 - 4x + 3 \therefore$

$\therefore f(2x - 1) = 2x^2 - 4x + 3$

$2x - 1 = t$ e $f(t) = 2x^2 - 4x + 3$

Como $x = \frac{t+1}{2}$, temos

$f(t) = 2\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{t+1}{2}\right) + 3 =$

$= 2 \cdot \frac{(t+1)^2}{4} - 2(t+1) + 3 \therefore$

$\therefore f(t) = \frac{t^2 + 2t + 1}{2} - 2t - 2 + 3 = \frac{t^2}{2} - t + \frac{3}{2}$

Assim: $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$

24. A

25. D

26. C

27.

a) 160 gramas.

b) 295 gramas.

28 B

29 E

30. B

31. E

32. D

33.

a) $\frac{3}{2} - \frac{12}{5} = \frac{(15 \quad 24)}{10} = -\frac{9}{10} = -0{,}9$

b)

34. B

35. B

36. B

37. D

38. D

39. B

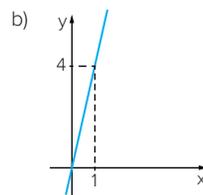
40 B

41

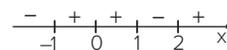
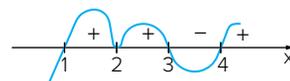
a) $m \neq 2$ e $m \neq \quad 2$ e $m \neq 0$

b) $m = -2$

c) $m = 2$

42. C

43. 60

44. Fazendo a análise de sinal da função, temos:

− + + − +
−1 0 1 2 x

A função f(x – 2) desloca o gráfico 2 unidades para a direita, observe o esboço da nova função:

45. $f(-x) = \sqrt{2^{(-x)^2} - 1} = \sqrt{2^{x^2} - 1} = f(x)$, ou seja, x e x são elementos distintos do domínio e f(–x) = f(x), logo ela não pode ser injetora.

46. Calculando $f\left(\frac{1}{x}\right)$: $2f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f(x) = \frac{1}{x^2}$

Assim, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} 2f(x)\quad 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \\ 3f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} -4f(x) + 6f\left(\frac{1}{x}\right) \quad 2x^2 \\ 9f(x) - 6f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-3}{x^2} \end{cases} \oplus$$

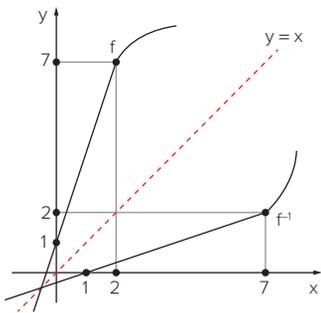
$$\oplus \rightarrow 5f(x) = -2x^2 - \frac{3}{x^2} \therefore$$

$$\therefore f(x) = -\frac{2x^2}{5} - \frac{3}{5x^2}$$

47 $y = \begin{cases} 2x+3;\ x \geq 2 \\ 3x+1;\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x+3;\ x \geq 2 \text{ e } y \geq 7 \\ y = 3x+1;\ x < 2 \text{ e } y < 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y+3;\ y \geq 2 \text{ e } x \geq 7 \\ x = 3y+1;\ y < 2 \text{ e } x < 7 \end{cases} \sim f^{-1}(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{x\quad 3}{2};\ x \geq 7 \\ \frac{x-1}{3};\ x < 7 \end{cases}$$

48 $x = 1 \quad f(1) + 2f(5) = 1$ $\Rightarrow$
$x = 5 \quad f(5) + 2f(1) = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2f(5) + f(1) = 1 \\ f(5) + 2f(1) = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} 2f(5) + f(1) = 1 \\ -2f(5) - 4f(1) = -10 \end{cases}$$

$$-3f(1) = -9$$

$$\therefore f(1) = 3$$

49. $f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x) - 4g + 3; g \geq 2 \\ 2g\ \ 3 \quad ;g\quad 2 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} (2x+3)^2 - 4(2x+3) + 3; 2x+3; \geq 2 \\ 2(2x+3) - 3;\ 2x+3 < 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 4x^2 + 4x;\ x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x + 3;\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$g \circ f(x) = 2f(x) + 3 =$

$$= \begin{cases} 2\left(x^2 - 4x + 3\right) + 3;\ x \geq 2 \\ 2\left(2x - 3\right) + 3;\ x < 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x^2 + 8x\ \ 9;\ x\quad 2 \\ 4x - 3;\ x < 2 \end{cases}$$

Capítulo 3 – Função do 2º grau

Revisando

1. $x^2 - \frac{161}{36}x + \frac{17}{18} = 0$

2 $\frac{-155}{238}$

3. $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x\quad 9}{x+7}\right)$

4. $a + c = 17$

5. $a < 0$; $c > 0$ e $b \in \mathbb{R}$

6. $f^{-1} : \left[-1; +\infty\right[\rightarrow \mathbb{R}$ e $f\ ^{1}(x) = \ \sqrt{x\quad 1}$

Exercícios propostos

1

a) $V = \{-3, -2\}$

b) $V = \{-5, 0\}$

2. B
3. C
4. E
5. A
6. C
7 D
8. A
9. D
10. D
11. E
12. A
13 C

14

a) 1 segundo

b) 0,75 metro

15. A

16. Soma: $01 + 04 + 08 = 13$

17.

a) Para encontrarmos essa solução, iremos calcular o valor para que *x* seja 0, desta forma:

$$c(x) = \left(x^2 - 30x + 1000\right)\cdot 1000$$
$$\left(x^2 - 30x + 1000\right)\cdot 1000 = 0$$
$$x^2 - 30x + 1000 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-30)^2 - 4(1)(1000)$$
$$\Delta = 900 - 4\,000$$
$$\Delta = \quad 3\,100$$

A equação não possui raízes, pois o valor de delta é negativo Desta forma, não é possível que o custo de produção seja zero.

b) Para encontrarmos a quantidade que deverá ser produzida para que o custo seja mínimo, utilizamos a seguinte fórmula:

$$x_{mín} = \left(-\frac{b}{2a}\right)$$
$$x_{mín} = \left(-\frac{-30}{2(1)}\right)$$
$$x_{mín} = 15$$

18 $\frac{1}{8}$

Como a função que define a área corresponde a uma parábola com a concavidade voltada para baixo, ela não apresenta valor mínimo.

19. A
20. A
21 C
22 D
23. A
24. E
25.

a) P (7, 24)

b) $x < 5$; $x \neq 1$

26. $x < -4$ ou $x > -2$

27. $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

28 E

29. D

30 B

31. D

32. $]-1; 1[\cup [2; +\infty[\cup \{-3\}$

33. E

34. 56

35. Soma: $04 + 08 + 16 = 28$

36 B

37 10

Exercícios complementares

1.

a) $V = \left\{\frac{1}{9}, \frac{1}{4}\right\}$

b) $\left\{8 - \sqrt{39}, 8 + \sqrt{39}\right\}$

c) $V = \left\{2, \frac{17}{4}\right\}$

d) $\left\{\frac{\left(6 - \sqrt{48}\right)}{2}, \frac{\left(6 + \sqrt{48}\right)}{2}\right\}$

e) $V = \left\{\frac{-13}{5}, 3\right\}$

2.

a) $S = \{4, -1\}$

b) $S = \{(4, -4), (-1, 6)\}$

3. B

4. $x = 4$

5. B

6

a) $t < 4$

b) $t = 4$

c) $t > 4$

7. B

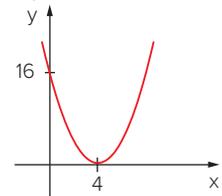
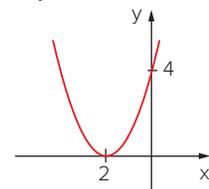
8.

a) $P(3) = 0, \forall\ k \in \mathbb{R}$

b) $\left\{k \in \mathbb{R} \mid k \leq 4\ \ 2\sqrt{6}\ \text{ou}\ k\quad 4 + 2\sqrt{6}\right\}$

9. $m = -8 \Rightarrow y = x^2 - 8x + 16$

$m = 4 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 4$

y
4
2
x

10.

a) $\frac{7}{5}$

b) $\frac{-11}{5}$

c) $\frac{159}{25}$

d) $\frac{-7}{11}$

11. B
12. A
13. E
14. B
15. D
16. C
17. E

18. A
19. A
20. D
21. D
22 D
23. 10

24.

a) O lucro é nulo para 100 peças ou para 500 peças.

b) O lucro é negativo para $0 \leq x < 100$ e $500 < x \leq 600$.

c) Devem ser vendidas 150 ou 450 peças.

25. C
26. (0, 8)
27. D
28. E
29. D

30. A
31. A
32. C
33. A
34. 62

35.

a) 1600 m^2

b) 1800 m^2

36. C
37. D
38. A
39. E

40.

a) 25 e a mulher é levemente obesa.

b) h = 1,8 m

41.

a) As retas se interceptam em x = 8 e x = 3

b) $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3 \cap x \geq 8\}$

c) 8 e 1

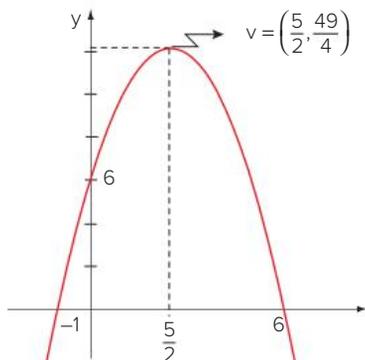
42. 82,8

43. F; V; V; F; V

44. C

45

a) a = –1, b = 5 e c = 6

b) O gráfico da função obtida no item a está esquematizado no gráfico adiante:

46. m = –3

47. bb' = 2(ca' + c'a)

48. D

49. Todos possuem 1 ponto em comum no eixo do *x*, a raiz (1; 0).

50. E
51. D
52. B

53. *f* é periódica de período 2a.

54.

a) $a = -2$, $b = \frac{-1}{4}$ e $g = \frac{-1}{16}$

b) 1 e $\sqrt{2}$.

55. D
56. A

57. $m \in]-\infty; -1[$ U $]0; 2[$

58. B

59 a ∈ [3; 3]

60 B

Capítulo 4 – Função exponencial

Revisando

1

a) $\frac{7}{8}$

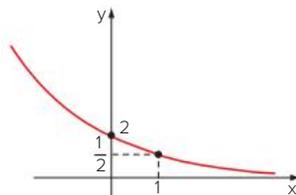
b) 6^n

c) 4

2. 1

3.

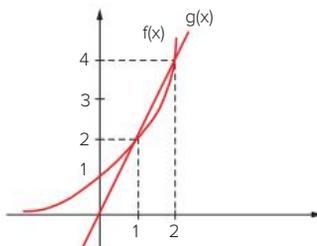
4. S = {1}

5. $S =]-\infty; 1[$ U $]2; +\infty[$

Exercícios propostos

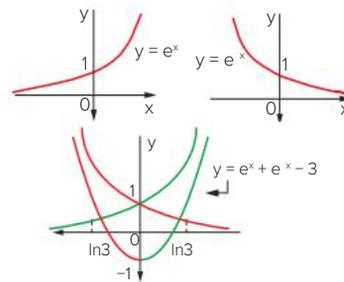
1 S = {4}
2 E
3 C
4. E
5. C
6. B
7. B
8. A
9. E
10. C

11 C
12. A
13. A
14 D
15. C
16. C
17. B
18. D
19. C

20.

a)

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

c) $2\sqrt{2}$ é o maior.

21.

A função $f(x) = e^x + e^{-x} - 3$ é par, ou seja, $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se existe um número real b tal que f(b) = 0, então f(–b) = 0. Observa-se no gráfico que tais números reais não nulos existem
Logo: $e^b + e^{-b} = 3$.
Portanto, $e^{3b} + e^{-3b} = (e^b)^3 + (e^{-b})^3 =$
$= (e^b + e^{-b})^3 - 3(e^b)^{2e-b} - 3^{eb}(e^{-b})^2 =$
$= (e^b + e^{-b})^3 - 3e^b e^{\ b}(e^b + e^{\ b}) =$
$= 3^3 - 3(1) \cdot 3 = 18$

22. C

Exercícios complementares

1. x = 7

2. x = 2

3.

a) S = {3}

b) S = {1; –3}

c) S = {3}

d) S = {0}

e) S = {3}

4. A
5. B
6. C
7. A
8. A

9. S = {–5; 3}

10. S = {1; 2}

11. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

12 $2^{10} \cdot \left(1 + 2^5\right)$

13 A
14 C
15 $A_r = 12$
16 A
17 A
18 D
19 A
20 B
21 E
22 A

23. A
24. D
25. $\frac{1}{2}$
26 D
27. C
28. C
29. D
30. C
31 E

32

a) $\alpha = 54$ e $\beta = \frac{-1}{90}$

b) 360

33.

a) a = 120 e b = – ln2

b) $x = 3$

34. D

35. $\left(1-2^{\frac{-1}{16}}\right)\cdot M(0)$

36. V; V; V; V

37. D

38. D

39. E

40 E

41.

a) $x = 0$ ou $x = -1$

b) $-12 < m \leq 0$

42. C

43.

44. $\varnothing$

45. $\left]-\frac{1}{2};\ 1\right[$

46 $m \in]-1; 1[$

47. Vamos analisar três casos para provarmos o absurdo:

$a = b$ $1 < 1$ absurdo

$a > b$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} > 1$ absurdo

$a < b$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} > 1$ absurdo

48

a) 130 kg e 3,9 mL

b) $k = \frac{2}{3}$ e 1,25 mg

Frente 2

Capítulo 1 – Conjuntos numéricos

Revisando

1

a) $\frac{17}{10}$

b) $\frac{8}{25}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{26}{3}$

e) $\frac{6}{11}$

f) $\frac{13}{2}$

g) $\frac{1}{30}$

h) $\frac{12}{5}$

i) $\frac{1}{3}$

j) -1

2.

a) $3,\overline{142857}$ (6 algarismos)

b) 8

c) 0,0013

d) 880 m

3

a) $x^5 < x^4 < x^3 < x^2 < x^1$

b) $x^5 < x^3 < x^1 < x^2 < x^4$

c) $x^1 < x^3 < x^5 < x^4 < x^2$

4.

a) 3 074

b) 1 000 000

c) 6,24

d) $5\sqrt{2}$

e) $6\sqrt{6}$

f) $\sqrt[6]{32}$

g) $2\sqrt{2}$

5.

a) 7

b) 5

c) 3

d) 12

6

a)

$$\begin{array}{r|l} 4200 & 2 \\ 2100 & 2 \\ 1050 & 2 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 4200 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

$$\begin{array}{r|l} 1500 & 2 \\ 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 1500 = 2^2 \quad 3^1 \quad 5^3$$

b) $d(4200) = 96$
$d(1500) = 48$

c) $mmc(4200, 1500) = 21000$

d) $mdc(4200, 1500) = 300$

7.

a) $mmc(8000, 10000) = 40000$ km

b) $mmc(8000, 12000) = 24000$ km

c) $mmc(10000, 12000) = 60000$ km

d) $mmc(10000, 8000, 12000) = 120000$ km

8.

a) 50 escolas

b) 224 balas

c) 750 chicletes

d) 369 pirulitos

9. $N = 67$

10. O dígito X tem valor 3 e o dígito Y tem valor 5.

Exercícios propostos

1. B
2 D
3. D
4. A
5. C
6. B
7. $p < r < q$.
8 B
9 A
10. C
11. E
12. B
13. Soma: 01 + 02 + 08 + 16 = 27
14 Apenas a quarta afirmativa está correta
15 A
16. D
17. B
18. A
19. B
20 C
21. D
22. E
23. E
24. D
25. $\begin{cases} a = 0,\ b = 15 \text{ e } c = 1 \\ a = 4,\ b = 3 \text{ e } c = 9 \end{cases}$
26. C
27. C
28. B
29. C
30 D
31. D
32. E
33. C
34. B
35. E
36. E
37 D
38. C
39. E
40. E
41. Soma: 04 + 08 = 12
42 C
43 B
44. 256
45. D
46. E
47. E
48 C
49. D
50 C
51. A
52. C
53. A
54. E
55 C
56.

a) $N = 1681$

b) 41 saquinhos plásticos/41 bolinhas de gude em cada um.

57. C
58. A
59. $x = 6$
60. E

Exercícios complementares

1. C
2 D
3. C
4. C

5. A

6.

a) 1009

b) 576

7 $x = 9$

8 A

9. E

10 D

11. C

12. A

13 A

14 B

15. B

16. A

17. A

18.

a) $x = 3 - 2\sqrt{2}$ é unidade de J.

b) $x = 5 + 3\sqrt{2}$ não é unidade de J.

c) -7 e 7

19.

a) $n \in \{1, 2, 3, 6\}$

b) $m = 2^6 = 64$

20. B

21. A

22. $\frac{1}{2}$

23 B

24 B

25 $(a, b, c) \in \{(0, 2, 2), (\ \ 2, 1, 4), (6, -1, \ \ 4)\}$

26

a) 2018

b) 2018^2

c) 2017

27. A

28. $p_1 = 2$

29. E

30. $C_1 = \{x, y, z\} = \{1400, 1960, 7000\}$ ou $C_2 = \{y, z, w\} = \{1960, 7000, 9800\}$

31. D

32. E

33.

a) 360 dias

b) 72 dias

34.

a) 100 colunas usando 200 canudinhos.

b) No máximo, 222 canudinhos para fazer 18 colunas.

35. E

36. C

37. 964

38. D

39. B

40. A

41 C

42

a) $N = 655556$, não é um múltiplo de 9.

b) $n = 4$

43. A soma dos algarismos de N é 10.

44. E

45 C

46. D

47 E

48 D

49. E

50. B

51 E

52 C

53. D

54. E

55 C

56 C

57. Como $9 \cdot (2r + 3s) = 2 \cdot (9r + 5s) + 17s$ e 17 não divide 9 nem 2, temos que 17 divide $2r + 3s$ se, e somente se, dividir também $9r + 5s$.

58. $n = 285\,714$

59. E

60. D

Capítulo 2 – Sentenças matemáticas e modelagens algébricas

Revisando

1

a) $25x^2 + 30x + 9$

b) $9a^2 \quad 6ab^2 + b^4$

c) $\frac{4x^2}{9} - xy + \frac{9y^2}{16}$

d) $4x^2 \quad 12xy \quad 20x + 9y^2 + 30y + 25$

e) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

f) $27x^3 - 135x^2y + 225xy^2 - 125y^3$

g) $8m^9 \ +6m^6 \quad \frac{3}{2}m^3 \quad \frac{1}{8}$

h) $9a^2 - 1$

i) $\frac{x^4}{9} - \frac{y^6}{4}$

j) $x^2 \quad 10x + 21$

k) $y^2 - 9y - 22$

l) $\frac{1}{8} + x^3$

m) $a^9 - \frac{b^6}{8}$

2.

a) $-\frac{41}{25}$

b) $\frac{198}{125}$

3 D

4.

a) $(x \quad y)(x \quad 5)$

b) $(a - m)(ab - c)$

c) $(2x + 3y)^2$

d) $\left(1 - \frac{a}{2b}\right)^2$

e) $(x + 5)(x - 9)$

f) $(y + 2)(y - 1)$

g) $(x \quad 4)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

h) $\left(x \quad \frac{1}{5}\right)(x + 2)$

i) $(1 + 5x)(1 \quad 5x)$

j) $\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{9}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{z}{9}\right)$

5. $(x^2 + 1)(x + 1)(x \quad 1)$

6. D

7 A

8. 4

9.

a) $S = \{0, 7\}$

b) $S = \left\{0, \frac{11}{2}\right\}$

c) $S = \{-6, 6\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \{-5, 3\}$

f) $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$

g) $S = \varnothing$

h) $S = \{\sqrt{7}, 3\}$

i) $S = \{\sqrt{2}, \sqrt{5}\}$

j) $S = \{-1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

k) $S = \{-1, 1\}$

l) $S = \{5\}$

m) $S = \{8\}$

10. $t = \pm 4$

Exercícios propostos

1. E

2. E

3. B

4. A

5. E

6.

a) $(x - y + z) \cdot (x - y - z)$

b) $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$

7. B

8. A

9.

a) $F = x - 1$

b) $F = 1$

10. A

11. C

12. C

13. $(5, -1), (1, -5), (3, -2)$ e $(2, -3)$

14. C

15. B

16. B

17. A

18. D

19. E

20. A

21. A

22. E

23. E

24. A

25.

a) 300

b) $y = 0{,}28\,x + 16$

26. D

27. B

28. 20 anos.

29. D

30. A

31. A

32. B

33.

a) $K \neq 2$

b) $k = 6$

34. $m = \frac{1}{3}$

35 $p = 10$

36 C

37. B

38. B

39.

a) 6

b) R$ 1.800,00

40. $v = \frac{4c}{5}$

41.

a) 705 000 pizzas.

b) Mozarela: 278 250 pizzas.
Calabresa: 198 750 pizzas.

42. A

43.

a) 1. Uma gravíssima e duas leves;
2. Duas graves e uma leve;
3. Uma grave e duas médias;
4. Uma média e três leves.

b) R$ 122.900,00

44.

a) 36 mL

b) $x = 5$

45. D

46. B

47. D

48 A

49. B

50. D

51. A

52 C

53. D

54.

a) O resultado está mais próximo de patologia benigna

b) 8,8 ng/mL

55.

a) 8 e 4

b) $x^2 \quad 12x + 32 = 0$

56. D

57. C

58. D

59 B

60 C

Exercícios complementares

1. E

2. C

3. E

4. C

5. C

6. $S = \left\{\frac{7}{3}, 1\right\}$

7. –1

8. $A - B = 7{,}5$

9. $m = \pm 1$

10 $x = -1$ e $y = -6$ ou $x = 5$ e $y = 0$

11

a) Identidade

b) Equação

c) Equação

12. $10\sqrt{10} - 1$

13. $(x^2 - 1)\left[x^3 + x + 1\right]$

14.

a) (0, 1) e (2, 3)

b) $b = 0$

c) $y = -x + 1$ ou $y = 3x - 3$

15. B

16

a) Índice 1 ≅ 129,22%

b) Índice 2 ≅ 38,7%; Índice 3 ≅ 20,8%

c) $V_A \cong 188{,}8 \cdot 10^9$ litros; Índice 2 ≅ 14,9%

17. B

18

a) cafezinho: 50%; cafezinho com leite: 60%

b) R$ 100,00 por litro

19 B

20. E

21.

a) 240 calorias.

b) $\frac{c}{m \cdot v} = 0{,}21$

22 C

23 C

24 D

25 C

26. C

27. $A = 12$ e $B = 14$

28. A

29. $S = \left\{\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}\right\}$

30. $m \in \{0, 7, 9, 25, 27, 34\}$

31. D

32.

a) $S = \{a, -b\}$

b) $S = \{2a, a \quad b\}$

33. B

34. D

35. D

36 A

37. $m \in \left]-2, -\sqrt{2}\right[$

38. B

39. $(m, n) \in \{(13, 51), (-13, -51), (37, 99), (\ 7 \quad 21), (7, 21), (\ 37, \quad 99)\}$

40 D

41. C

42 B

43 C

44 E

45. B

46. B

47. Soma: 04 + 08 = 12

48. B

49. C

50. $a = \frac{5}{3}$ e $b = \frac{26}{9}$

51. $x = a + b + c$

52 $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

53. Demonstração

54. D

55. E

56. E

57.

a) 2

b) $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$

c) $\frac{1}{505}$

58.

a) $x = 3 - 2\sqrt{2}$ é unidade de J

b) $x = 5 + 3\sqrt{2}$ não é unidade de J

c) –7 e 7

59.

a) $k = 1$, $k = 9$ ou $k = 10$

b) $S = \left\{\frac{5}{12}\right\}$, $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ou $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

60. Demonstração

Capítulo 3 – Razões e proporções

Revisando

1 C

2. E

3. B

4. Noruega

5.

a) R$ 1.500,00

b) Aproximadamente 16,7%.

c) Aproximadamente 14,3%

6

a) 350 g

b) 100 g

c) 10%

d) 65%

e) 30%

f) 5%

7.

a) Antes ⇒ 80%; depois ⇒ 75%

b) 300 litros

c) 240 litros

8.
a) 56%
b) 35,9%
9.
a) Estados Unidos
b) Peru
c) ≅ 51,5 milhões de pessoas.
d) Estados Unidos
e) Estados Unidos
f) ≅ 5,5 milhões de pessoas.
10.
a) 60%
b) 62,5%
c) 75%
d) 72%
e) 45%

Exercícios propostos

1. B
2. A
3. A
4. A
5. C
6. B
7 C
8 B
9. A
10 A
11 D
12. C
13. B
14. A
15. D
16. D
17. D
18. B
19. A
20. E
21. A
22. D
23. A
24. C
25. B
26. B
27. C
28. E
29. A
30. E
31 A
32 A
33. D
34. E
35. D
36. B
37. D
38. D
39. C
40. D

Exercícios complementares

1.
a) 5 km
b) R$ 0,60
2. D
3. E
4. D
5. B
6. E
7 A
8 C
9.
a) 4 litros
b) 1000 km
10. A
11. B
12. B
13. C
14.
a) Índice 1 ≅ 129%
b) Índice 2 ≅ 39% e Índice 3 ≅ 21%
c) Índice 2 ≅ 15%
15 A
16
a) 110 para 3
b) $4{,}5 \cdot 10^{12}$/L
c) 5,5%
17
a) 36 mL
b) $x = 5$
18 E
19
a) 640 pessoas
b) 420 homens.
20 D
21 E
22 B
23 B
24 A
25 B
26 D
27 A
28. C
29. A
30. E
31 A
32 A
33.
a) 55
b) 92%
34. D
35. C
36.
a) Escola A
b) R$ 3.564,00
37.
a) 75%
b) Exame 2
38. Banco B: R$ 2.000,00; Banco C: r$ 3.000,00; $\alpha = 87°$; $\beta = 162°$ e $\gamma = 111°$
39. B
40. E

Frente 3

Capítulo 1 – Ferramentas básicas da Geometria

Revisando

1 E
2 $10\sqrt{2}$ cm
3 Perímetro: 24 cm
4 C
5. $h = 24$ cm
6. C
7. B
8. C
9. D
10. C
11. $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{3\sqrt{91}}{91}$
12. C
13. C
14 Valor mínimo: 7 m
Valor máximo: 10 m

Exercícios propostos

1. D
2. D
3 C
4. C
5. D
6. D
7. D
8. C
9. $R = 200{,}5$ m
10 B
11. $AB = 21$ m e
$EF = 23$ m.
12. $AE = \dfrac{bc\sqrt{2}}{b + c}$
13. A
14. E
15. C
16. E
17 1
18 C
19. A
20. C
21. E
22. A
23. A
24. B
25 C
26. D

Exercícios complementares

1 D
2 B
3. $\dfrac{125}{12}$ polegadas
4. B
5.
a) $x = \sqrt{5}$ cm
b) Demonstração
6. D
7.
a) $h = \dfrac{5 + 3\sqrt{3}}{4}$ m
b) $h = 2{,}7$ m
8. $AD = \sqrt{7}$
9. B
10. $x = 30$ cm
11.
a) $a = 1$ cm, $b = 4$ cm e $c = 5$ cm
b) $c = 10$
12. $\alpha = \text{arc tg}\left(\dfrac{h}{a + b + 2d}\right)$
13. B
14. A
15 C
16 Comp: $(6\sqrt{3} + 6\pi)$ cm
17. B
18. $\sqrt{2}$ e 2 ou $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ e $4 + 2\sqrt{3}$
19. B

20. C

21. D

22 C

Capítulo 2 – Princípios de Geometria Plana

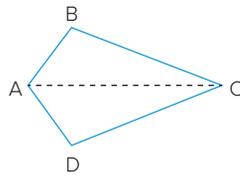
Revisando

1. Reto: 2 eixos de simetria e invariante por rotações de 180° em torno de seu centro.
   T: 1 eixo de simetria.
   L: assimétrico.
   Reverso: 0 eixo de simetria, mas invariante por rotações de 180° em torno de seu centro.
   Quadrado: 4 eixos de simetria e inva riante por rotações de 90° em torno de seu centro.

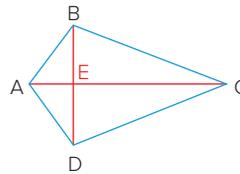
2

	Figura	Ângulos internos	Diagonais
I		$\hat{A} = \hat{D}$ $\hat{B} = \hat{C}$ $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} = 180°$	AC = BD
II		$\hat{A} = \hat{C}$ $\hat{B} = \hat{D}$ $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} = 180°$	$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se dividem ao meio.
III		$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$	AC = BD $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se dividem ao meio.
IV		$\hat{A} = \hat{C}$ $\hat{B} = \hat{D}$ $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} = 180°$	$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se dividem ao meio. $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares. $\overline{AC}$ é a bissetriz de $\hat{A}$ e $\hat{C}$. $\overline{BD}$ é a bissetriz de $\hat{B}$ e $\hat{D}$.
V		$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} =$ 90°	AC = BD $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se dividem ao meio $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares $\overline{AC}$ é a bissetriz de $\hat{A}$ e $\hat{C}$. $\overline{BD}$ é a bissetriz de $\hat{B}$ e $\hat{D}$.

3.

a)

Traçando a diagonal $\overline{AC}$, temos que os triângulos ABC e ADC são congruentes pelo caso LLL.

Portanto, os ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ têm a mesma medida.

b)

- $\overline{AC}$ divide $\overline{BD}$ ao meio: EB = ED.
- $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares.
- $\overline{AC}$ é bissetriz dos ângulos internos de vértices A e C do quadrilátero.

c) Há três pares de triângulos congruentes na figura: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$, $\Delta ABE \cong \Delta ADE$ e $\Delta BCE \cong \Delta DCE$.

4.

a) Complemento: 30°
Suplemento: 120°

b) Complemento: 52°
Suplemento: 142°

c) Complemento: 67°30'
Suplemento: 157°30'

d) Complemento: 81°14'48''
Suplemento: 171°14'48''

5. x = 40°43''

6 x = 60°, y = 65° e z = 55°

7.

a) 8 triângulos

b) ABC, ACD e ABD

c) $\alpha + \beta = 35°$

8.

a) 2π cm

b) $9(\pi \quad \sqrt{3})\ cm^2$

9.

a) 150°

b) 15°

c) 75°

d) 30°

10

a) $S_e = 360°$

b) 40°

c) $S_i = 1260°$

d) 140°

e) 120°

f) 20°

g) 100°

h) d = 27

i) 80°

j) 60°

Exercícios propostos

1. D
2. D
3. E
4. D
5 E
6 B
7 B
8. A
9. B
10. C
11. B
12. D
13. A
14. C
15. B
16. E
17. E
18. C
19. C
20. E
21 C
22. D
23. D
24. C
25. B
26. D
27. B
28 A
29. D
30. B
31 C
32. A
33 E
34. C
35. C
36. D
37. B
38. B
39. B
40. B
41 E

Exercícios complementares

1. 179°54'52''
2. 67°30'
3. 16
4. C
5. E
6 192°
7 75° e 105°
8. B
9. 180°
10. 72° e 108°
11.
a) 25°
b) 50°
c) 25°
12. 100°
13. $\beta - \alpha = 80°$
14. 17°30'
15. C
16
a) Aproximadamente 10 m
b) Aproximadamente 11
c) Aproximadamente 764 m
17. A
18.
a) 33 m
b) 61 estacas

19. E

20 Aproximadamente 73°22'48"

21 614 m

22 C

23 E

24. A

25. 150 m e 12 m.

26. A

27. 60°

28. 45° e 35°.

29.

a) 60°

b) 30°

c) $\alpha = 180° - 3\theta$

30 Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15

31.

a) Octógono côncavo

b) 225°

c) 1080°

d) Aproximadamente 193 cm.

32. D

33. E

34. E

35. 108°, 38°, 70° e 144°.

36. 140°, 100°, 60° e 20°.

37. 54°

38

a) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = 0$.

b) $D_f = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 3\}$

c) Para y = 28, n = 8.
Não existe valor de n para o qual y seja igual a 32

39.

a) 70

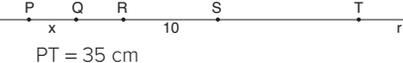
b) Aproximadamente 128° e 38°30'.

40. F; V; F; V; F; F; V; F; V; F

Capítulo 3 – Teoria das proporções geométricas

Revisando

1.

P Q R S T
x 10 r

PT = 35 cm

2

a) 4 pontos: P, Q, R e S.

b) 6 segmentos de reta: $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{PS}$, $\overline{QR}$, $\overline{QS}$ e $\overline{RS}$.

c) QR = 18 (menor)

d) PS = 98 (maior)

3. B

4. A

5.

a) Lado: 12 m

b) FG = 21 m

c) $k^2 = 49\%$

6. A

7. B

8.

a) PQ = 130 cm

b) PQ = 120 cm

9.

a) AB = 10 cm

b) AP = 8 cm

10. Opção 1: aprox. 34,3 m
Opção 2: aprox. 32,4 m

11.

a) $\frac{AP}{BP} = \frac{5}{12}$

b) $\frac{AP}{BP} = \frac{25}{144}$

12. Comprimentos: $2 \pm \sqrt{3}$

Exercícios propostos

1. A
2. B
3. A
4. C
5. B
6. B
7. B
8. B
9. D
10 C
11 D
12 E
13. D
14. A
15 C
16 D
17. C
18. A
19. C
20. C
21. A
22. D
23. D
24. E
25. E
26. C
27. D
28. D
29. C
30. D
31 x = 7
32 B
33 B
34 C
35. B
36. C
37 C
38 C
39. C
40. A

Exercícios complementares

1 A

2 E

3. Demonstração.

4. A

5. AB = 6,4 m

6. A

7. Atingirá a 9 m da rede.

8. Altura: 6 cm

9. B

10. x = 22 mm

11 $x = \frac{6}{17}$ m

12 Lados: 54 cm

13.

a) 1 m

b) $\alpha = 30°$

14.

a) AB = 40 cm

b) AC ≅ 67 cm

15 B

16. A

17. Perímetro: 75 m

18. B

19. A

20

a) k = 4

b) $k^3 = 64$

c) Faltam 315 mL.

21. CD = 5 cm

22

a) CD = 10 cm

b) BE = 16 cm

23. C

24.

a) AB = 4 cm

b) BC = 3,5 cm

25. B

26. E

27.

a) $DC = 4\sqrt{3}$

b) R = 6

28. D

29. Soma: 01 + 02 + 04 + 16 = 23

30. C

31

a) $P_1P_2 = 12$

b) $P_{O_1O_2P_2P_1} = 90$

c) $P_{\Delta QO_2P_2} = 96$

32

a) CE = 2x

b) $CD = \frac{x}{2}$

c) $BD = \frac{x\sqrt{3}}{4}$

33. D

34. r = 1,2 m

35. E

36

a) $AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}r$

b) $CO = r\sqrt{3}$

37. E

38. B

39.

a) x = 19,2 m

b) Demonstração.

40. $d = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\ell$

Capítulo 4 – Teorema dos senos e dos cossenos

Revisando

1. D
2. Situação 1: AB = 20 m.
   Situação 2: AB = 700 m.
3 AH = 28 cm
4. A
5. AB = 1 cm ou AB = 3 cm
6.
a) AB = 5 cm
b) $\text{sen}(\hat{B}) = \frac{3}{5}$
c) $AP = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm
7.
a) BC = 3 cm
b) r = 3 cm
8.
a) $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$
b) $\alpha = 60°$
c) $\text{sen}(\beta) = \frac{3\sqrt{21}}{14}$, $\text{sen}(\gamma) = \frac{\sqrt{21}}{7}$
9. BD = 7
10 $AC = 2\sqrt{7}$ cm

Exercícios propostos

1. A
2. B
3. B
4. B
5. A
6. A
7 B
8. D
9. D
10 B
11. D
12. A
13. C
14. C
15. B
16. C
17 B
18. C
19. D
20 B

Exercícios complementares

1.
a) $\alpha = 45°$
b) $x = 4\sqrt{6}$ cm
2 AB = 20 hm
3 D
4. B
5. C
6. E
7.
a) Perímetro: 21,2 cm.
b) Não, as medidas não formam um triângulo.
8.
a) $AB = 5\sqrt{3}$
b) $BD = 5\sqrt{7}$
9. AB ≅ 40 m
10. D
11. A
12.
a) BD = 36 cm
b) $DE = 12\sqrt{3}$ cm
13 Demonstração, NP = 3 km
14
a) $\text{med}(\widehat{AB}) = \frac{12800\pi}{3}$ km
b) $d = 6400\sqrt{2}$ km
15. C
16 D
17. CF = 10
18. D
19. A
20. AD = 2 cm

Capítulo 5 – Centros dos triângulos e polígonos

Revisando

1 $\frac{10}{3}$ cm
2. 40 cm^2
3.
a) $\sqrt{21}$ cm
b) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ cm
4. D
5. 48 cm
6. B
7 C
8 D
9. E
10. D
11
a) 15
b) 5
12
a) 2 cm
b) 4 cm
13. C
14. C
15. A
16.
a) Perímetro: 72 cm
   Área: $216\sqrt{3}$ cm^2
b) CF = 24 cm
   $CE = 12\sqrt{3}$ cm
c) Razão = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
17. $2(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ cm
18. $4\sqrt{2}\ \ \sqrt{2}$ cm
19. B

Exercícios propostos

1.
a) 14 cm
b) 7 cm
c) 22,5 cm
d) 12 cm
2. D
3. 6 cm^2
4. A
5. B
6. D
7. A
8.
a) 19,5 cm
b) 6,5 cm
9. 31° e 59°
10. B
11 V; F; V; F; F; F; F; F
12. E
13 6 cm
14. C
15 E
16. A
17
a) 12 cm
b) $12(4\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
18. E
19 B
20. A

Exercícios complementares

1 $2\sqrt{\frac{13}{5}}$
2
a) 33 m
b) 38 m
3. $3\sqrt{3}$ cm
4. B
5. 26 cm
6 D
7. D
8. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
9. B
10. $\frac{225}{4}$ cm^2
11 $\frac{4}{3}$
12. C
13. 45,6 cm
14. A
15. A
16.
a) $2\sqrt{6}$ m
b) 54 cm
17.
a) AB = 207 m, BC = 159 m e CD = 500 m
b) Alex.
18. A
19. D
20. D